Український математичний вісник
Том 6 **(2009)**, № 3, 400 – 424

Обмежені розв'язки рівняння четвертого порядку з модельною бістійкою нелінійністю

Анатолій М. Самойленко, Ірина Л. Нижник

Анотація. Досліджуються обмежені розв'язки рівняння четвертого порядку з кусково-лінійною бістійкою нелінійністю. Наводиться конструктивний метод побудови розв'язків через їх нулі. Показано, що відстань між нулями таких розв'язків можна характеризувати непарними числами. При цьому для довільної послідовності непарних чисел існує та єдиний з точністю до знаку і зсуву обмежений розв'язок. Явно описані періодичні розв'язки. Показано наявність просторового хаосу. Знайдено точне значення просторової ентропії відносно періодичних розв'язків.

2000 MSC. 34A34, 34C25.

Ключові слова та фрази. Нелінійні рівняння, бістійка нелінійність, періодичні розв'язки, хаос, ентропія.

1. Вступ

Нелінійні параболічні рівняння відіграють важливу роль у різних розділах фізики, хімії, біології [1–8]. Зокрема, до них належить рівняння Фішера–Колмогорова [2] $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(u)$, його узагальнення $\frac{\partial u}{\partial t} = -\gamma \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(u)$ — розширене рівняння Фішера–Колмогорова [3, 4], рівняння Свіфт–Гогенберга [7] $\frac{\partial u}{\partial t} = -(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2})^2 u - f(u)$ та їх різницеві аналоги [9–11]. При цьому в першу чергу розглядаються бістійкі нелінійності, коли рівняння $\frac{du}{dt} = -f(u)$ має два стійкі стаціонарні розв'язки. При вивченні таких параболічних рівнянь важливу роль відіграють стаціонарні розв'язки, обмежені на всій осі, тобто обмежені розв'язки для звичайних нелінійних рівнянь другого і четвертого порядків [9–17].

Стаття надійшла в редакцію 3.08.2009
Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України проект Ф29.1/010 *(другий автор).*

ISSN 1810 – 3200.

Для нелінійних рівнянь вигляду

$$y^{(4)} + qy^{''} + f(y) = 0$$

з кубічною бістійкою нелінійністю $f(y) = ky(y^2 - 1)$ [11–15] та з її кусково-лінійною апроксимацією [16, 17] досить детально досліджені періодичні розв'язки, а також кінки за допомогою варіаційних методів [12, 14, 15] та топологічного методу пристрілки [13].

Слід зауважити, що дослідження періодичних розв'язків для нелінійних диференціальних рівнянь є актуальною тематикою, якій присвячено велику кількість робіт: див. посилання в [18–21].

У даній роботі ми будемо вивчати обмежені розв'язки на всій осі $-\infty < x < +\infty$ для модельного диференціального рівняння четвертого порядку з розривною нелінійністю

$$y^{(4)}(x) + 4y(x) = 4 \operatorname{sign} y(x). \tag{1.1}$$

2. Лінійне рівняння

Спочатку розглянемо лінійне рівняння

$$y^{(4)}(x) + 4y(x) = h(x) \tag{2.1}$$

з відомою правою частиною $h(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^1)$, де $h(x)$ є вимірною суттєво обмеженою функцією. Якщо $h(x)$ — неперервна функція, то *класичним розв'язком рівняння* (2.1) називається 4 рази неперервно-диференційовна функція, яка задовольняє рівняння (2.1) для всіх x.

У випадку довільних функцій $h \in L_\infty$ під *розв'язком рівняння* (2.1) будемо розуміти тричі неперервно-диференційовну функцію $y(x)$, у якої $y^{'''}(x)$ є абсолютно неперервною функцією, і отже, майже всюди по x існує $y^{(4)}(x)$, і функція задовольняє рівняння (2.1) майже всюди по x.

Легко бачити, що однорідне рівняння

$$y^{(4)}(x) + 4y(x) = 0 \tag{2.2}$$

має фундаментальну систему розв'язків

$$e^{-x}\cos x, \quad e^{-x}\sin x, \quad e^{x}\cos x, \quad e^{x}\sin x. \tag{2.3}$$

Лема 2.1. *В однорідного рівняння* (2.2) *не існує нетривіальних розв'язків, обмежених на всій осі.*

Доведення. Нехай $y(x)$ — обмежений розв'язок рівняння (2.2). Тоді існують сталі $C_k,\ k = 1, \ldots, 4$, такі, що

$$y(x) = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x + C_3 e^{x} \cos x + C_4 e^{x} \sin x.$$

Вирази $C_1 \cos x + C_2 \sin x$ і $C_3 \cos x + C_4 \sin x$ можна представити у вигляді $A\cos(x-\alpha)$ і $B\cos(x-\beta)$, де $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, B = \sqrt{C_3^2 + C_4^2}$. Тому $y(x) = Ae^{-x}\cos(x-\alpha) + Be^{x}\cos(x-\beta)$. Виберемо послідовність аргументів $x_k = 2k\pi + \beta \to \infty$, коли $k \to \infty$. Тоді $y(x_k) = Ae^{-x_k}\cos(x_k - \alpha) + Be^{x_k}$.

Числа $y(x_k)$ будуть обмеженими тільки при умові $B = 0$. Вибираючи $\widetilde{x}_k = -2k\pi + \alpha \to -\infty$ приходимо до висновку $A = 0$. Таким чином, обмежений розв'язок рівняння (2.2) $y(x) \equiv 0$. □

Лема 2.2. *У рівняння* (2.1) *існує і єдина обмежена на всій осі функція Гріна* $\mathcal{G}(x)$, *яка має вигляд*

$$\mathcal{G}(x) = \frac{1}{8} e^{-|x|}(\cos x + \sin |x|). \tag{2.4}$$

Доведення. Функція $\mathcal{G}(x)$ вигляду (2.4) при $x > 0$ і при $x < 0$ є обмеженим розв'язком однорідного рівняння (2.2). Безпосередньо видно, що

$$\mathcal{G}(+0) = \mathcal{G}(-0) = \frac{1}{8},$$
$$\mathcal{G}'(+0) = \mathcal{G}'(-0) = 0,$$
$$\mathcal{G}''(+0) = \mathcal{G}''(-0) = -\frac{1}{4},$$
$$\mathcal{G}'''(+0) = \frac{1}{2}, \quad \mathcal{G}'''(-0) = -\frac{1}{2}.$$

Таким чином, $\mathcal{G}(x)$ — функція Гріна. Якщо б у рівняння (2.1) існувала інша обмежена функція Гріна $\mathcal{G}_1(x)$, то їх різниця була б обмеженим розв'язком на всій осі однорідного рівняння (2.2), і $\mathcal{G}(x) - \mathcal{G}_1(x) \equiv 0$ в силу леми 2.1. □

Лема 2.3. *Нехай у рівняння* (2.1) $h(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^1)$. *Тоді у цього рівняння існує та єдиний обмежений на всій осі розв'язок і*

$$y(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x-s)h(s)\,ds. \tag{2.5}$$

Доведення. Покажемо, що права частина в (2.5) існує. Дійсно, в силу (2.4) і $h \in L_\infty(\mathbb{R}^1)$ інтеграл існує і допускає оцінку

$$|y(x)| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(s)|\, ds \|h\|_{L_\infty} = K_0 \|h\|_{L_\infty}.$$

В силу явного вигляду (2.4) функції Гріна інтеграл у (2.5) допускає диференціювання по x під знаком інтеграла до третього порядку і $|y^{(i)}(x)| \le K_i \|h\|_{L_\infty}$, де $K_i = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}^{(i)}(s)|\, ds,\ i = 0, 1, 2, 3$. Наведемо явні значення констант K_i

$$\begin{aligned}
K_0 &= \frac{1}{4}\int\limits_0^\infty e^{-s}|\cos s + \sin s|\, ds = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{1-e^{-\pi}} \approx 0.2852,\\
K_1 &= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-s}|\sin s|\, ds = \frac{1+e^{-\pi}}{4(1-e^{-\pi})} \approx 0.273,\\
K_2 &= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-s}|\cos s - \sin s|\, ds = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}}{2(1-e^{-\pi})} \approx 0.337,\\
K_3 &= \int\limits_0^\infty e^{-s}|\cos s|\, ds = \frac{1}{2} + \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{1-e^{-\pi}} \approx 0.717.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Легко бачити, що

$$\begin{aligned}
y'''(x) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_x'''(x-s)h(s)\, ds\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{s-x}\cos(x-s)h(s)\, ds - \frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\infty} e^{x-s}\cos(x-s)h(s)\, ds
\end{aligned}$$

є абсолютно неперервною функцією, а $y^{(4)}(x)$ існує майже всюди по x і $y^{(4)}(x) = h(x) - 4y(x)$.

Таким чином, $y(x)$, що дається формулою (2.5), є обмеженим розв'язком рівняння (2.1) з $h \in L_\infty(\mathbb{R}^1)$. Єдиність обмеженого розв'язку випливає із леми 2.1. □

3. Розв'язки нелінійного рівняння

Перейдемо тепер до рівняння (1.1). Якщо $y(x)$ — неперервна функція, множина нулів якої має лебегову міру нуль, то функція $\operatorname{sign} y(x)$

визначена майже всюди і належить простору $L_\infty(\mathbb{R}^1)$. Тому можна в цьому випадку визначити розв'язки (1.1) як розв'язки (2.1) з $h(x) = 4\,\mathrm{sign}\, y(x)$.

Надалі будемо користуватись таким означенням розв'язку рівняння (1.1).

Означення 3.1. *Тричі неперервно-диференційовна функція* $y(x)$ *називається розв'язком рівняння* (1.1), *якщо зовні своїх нулів* $y(x)$ — *класичний розв'язок* (1.1).

Зауважимо, що для розв'язків $y(x)$ з ізольованою множиною нулів означення 3.1 співпадає з означенням розв'язків (1.1) через розв'язки рівняння (2.1) з $h(x) = 4\,\mathrm{sign}\, y(x)$.

Рівняння (1.1) має тривіальні розв'язки $y = \pm 1, 0$. При цьому ми вважаємо, що $\mathrm{sign}\, 0 = 0$. Зауважимо, що якщо $y(x)$ — розв'язок рівняння (1.1), тоді і $\pm y(x+a)$, де a — стала, є розв'язками рівняння (1.1). Ці розв'язки називатимемо *еквівалентними.* Відносно (1.1) справедливе таке просте твердження.

Якщо на деякому інтервалі $a < x < b$ *розв'язок рівняння* (1.1) *приймає додатне значення, тобто* $\mathrm{sign}\, y(x) = 1$, *то*

$$y^+(x) = 1 + C_1^+ e^{-x}\cos x + C_2^+ e^{-x}\sin x + C_3^+ e^{x}\cos x + C_4^+ e^{x}\sin x, \quad (3.1)$$

де $C_k^+ = \mathrm{const},\ k = 1, \ldots, 4.$
І навпаки, якщо функція виду (3.1) *приймає на деякому інтервалі додатнє значення, то* (3.1) *є розв'язком рівняння* (1.1).
Якщо на деякому інтервалі $a < x < b$ *розв'язок рівняння* (1.1) *приймає від'ємне значення, тобто* $\mathrm{sign}\, y(x) = -1$, *то*

$$y^-(x) = -1 + C_1^- e^{-x}\cos x + C_2^- e^{-x}\sin x + C_3^- e^{x}\cos x + C_4^- e^{x}\sin x. \quad (3.2)$$

Доведення очевидне, оскільки функції (2.3) $e^{-x}\cos x,\ e^{-x}\sin x,$ $e^x\cos x$, $e^x \sin x$ є фундаментальною системою розв'язків однорідного рівняння, а $y = \pm 1$ є частинним розв'язком рівняння (1.1).

Приклад 3.1. Знайдемо обмежений на всій осі розв'язок рівняння (1.1), який на додатній півосі приймає додатнє значення, а на від'ємній — від'ємне. Згідно з (3.1) і (3.2)

$$y(x) = \begin{cases} 1 + C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x, & x > 0, \\ -1 + C_3 e^{x}\cos x + C_4 e^{x}\sin x, & x < 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

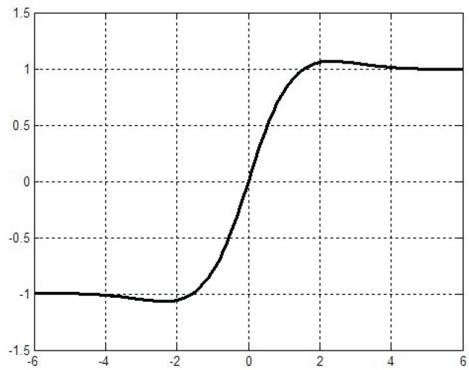
Умова неперервності функції $y(x)$ і її похідних до третього порядку в точці $x = 0$ дає явні значення констант C_k і явний вигляд розв'язку

$$y(x) = \mathrm{sign}\, x - \Phi(x), \quad (3.4)$$

де
$$\Phi(x) = \operatorname{sign} x \cdot e^{-|x|} \cos x. \tag{3.5}$$

Функція $\Phi(x)$ буде потрібна в подальшому.

Розв'язок (3.4) — це обмежений розв'язок рівняння (1.1), що має нуль у точці $x = 0$. Цей розв'язок називається *кінком*. На мал. 1 зображений графік кінка.



Мал. 1 Кінк $y(x) = \operatorname{sign} x(1 - e^{-|x|} \cos x)$.

4. Найпростіші симетричні періодичні розв'язки

Побудуємо в явному вигляді періодичний симетричний розв'язок рівняння (1.1).

Нехай $L = 2\ell > 0$ — період розв'язку. Нехай на інтервалі $0 < x < \ell$ розв'язок додатній, а на інтервалі $\ell < x < 2\ell = L$ розв'язок від'ємний. Тоді згідно з формулою (3.1)

$$y(x) = 1 + C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x + C_3 e^{x} \cos x + C_4 e^{x} \sin x, \quad 0 < x < \ell. \tag{4.1}$$

На інтервалі $\ell < x < 2\ell$ будемо вважати, що

$$y(x) = -y(x - \ell). \tag{4.2}$$

Умови, що розв'язок $y(x)$ і його похідні до третього порядку неперервні в точці $x = \ell$, дають граничні умови

$$y^{(i)}(\ell) = -y^{(i)}(0), \quad i = 0, 1, 2, 3. \tag{4.3}$$

Використавши граничні умови (4.3) для розв'язку (4.1), знаходимо явний вигляд констант C_k, тоді розв'язок має вигляд

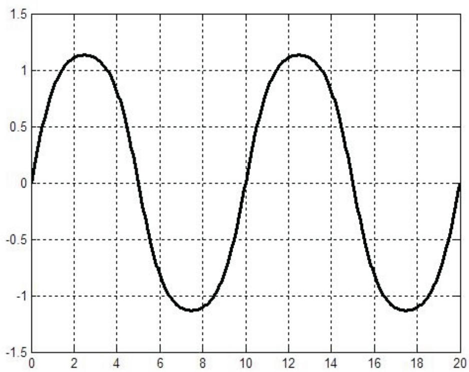
$$y(x) = 1 - \frac{\cosh(\ell - x)\cos x + \cosh x \cos(\ell - x)}{\cosh \ell + \cos \ell}, \quad 0 < x < \ell. \qquad (4.4)$$

На інтервалі $\ell < x < 2\ell$ вірне співвідношення (4.2), розв'язок отримується зсувом і віддзеркаленням.

Безпосередньо можна перевірити, що функція $y(x)$, визначена на інтервалі $[0, \ell]$ (4.4) і періодично продовжена на всю вісь з умовою (4.2) є 2ℓ-періодичний розв'язок рівняння (1.1). Така функція має нулі в точках $x = k\ell$, де $k \in \mathbb{Z}$. Зовні цих нулів функція $y(x)$ виражається через функцію (4.4) за допомогою зсувів або зсувів і віддзеркалювань. Тому на цих інтервалах вона є класичним розв'язком рівняння (1.1).

Такі періодичні розв'язки називатимемо найпростішими періодичними розв'язками рівняння (1.1).

На мал. 2, 3 представлені періодичні розв'язки для різних періодів $2\ell = 10$, $2\ell = 40$ відповідно.

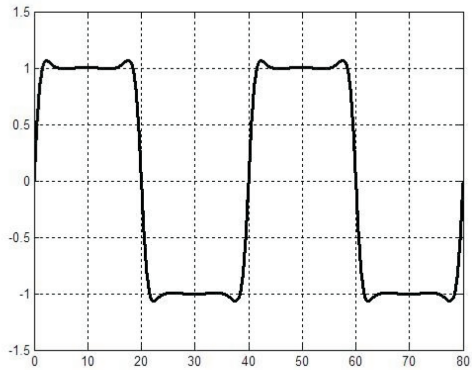


Мал. 2 Найпростіший періодичний розв'язок з $\ell = 5$.

5. Інтегральне рівняння для обмежених розв'язків

Нехай $y(x)$ — обмежений на всій осі розв'язок рівняння (1.1) з ізольованою множиною нулів. Тоді $y(x)$ задовольняє рівняння (2.1) з $h(x) = 4 \operatorname{sign} y(x)$. А згідно з лемою 2.3 задовольняє рівняння:

$$y(x) = 4 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x - s) \operatorname{sign} y(s)\, ds. \qquad (5.1)$$



Мал. 3 Найпростіший періодичний розв'язок з $\ell = 20$.

Навпаки, якщо $y(x)$ — неперервний обмежений на всій осі розв'язок рівняння (5.1), а множина його нулів — ізольована, то $y(x)$ — розв'язок рівняння (1.1).

Лема 5.1. *Обмежений розв'язок рівняння* (1.1) *згідно означення* 3.1 *є обмеженим неперервним розв'язком рівняння* (5.1)*, в якому покладено* $\operatorname{sign} 0 = 0$. *Навпаки, обмежений неперервний розв'язок інтегрального рівняння* (5.1)*, в якому* $\operatorname{sign} 0 = 0$ *є обмеженим розв'язком рівняння* (1.1) *згідно означення* 3.1.

Доведення. Нехай $y(x)$ — обмежений розв'язок рівняння (1.1) згідно означення 3.1. Поскільки функція $y(x)$ — неперервна, то X_0 — множина нулів цієї функції є множина замкнена. Нехай X_1 — множина точок скупчення множини X_0. Множина X_1 також замкнена і її доповнення $X = R \setminus X_1$ є множиною відкритою і отже може бути представлена як об'єднання відкритих інтервалів $X = \bigcup_k O_k$. Розглянемо функції $y_k(x)$, які співпадають з розв'язком $y(x)$ на O_k і рівні тотожньо нулю зовні O_k. Покажемо, що функції $y_k(x)$ також є розв'язками рівняння (1.1) згідно означення 3.1. Для цього відзначимо, що поскільки $y(x)$ тричі неперервно-диференційовна функція, то на X_1 вона разом з похідними до третього порядку включно перетворюється в нуль. Тому функції $y_k(x)$ — тричі неперервно-диференційовні на всій осі, а зовні своїх нулів вони співпадають з $y(x)$ і є класичним розв'язком рівняння (1.1). Покажемо, що функція $y_k(x)$ є розв'язком рівняння (5.1), в якому покладемо $\operatorname{sign} 0 = 0$. Дійсно, $y_k(x)$ є розв'язком рівняння (2.1) з правою частиною $h(x) = 4 \operatorname{sign} y_k(x)$ при $x \in O_k$ і $h(x) \equiv 0$ при $x \notin O_k$. Тобто $h(x) = 4 \operatorname{sign} y_k(x)$ для всіх x, якщо вважати $\operatorname{sign} 0 = 0$. Тому в силу леми 2.3 $y_k(x)$ є розв'язком рівняння (5.1). Покажемо, що, коли $y(x)$ є розв'язком рівняння (5.1), в якому $\operatorname{sign} 0 = 0$, то $y(x)$ є розв'язком рівняння (1.1) згідно означення 3.1. Дійсно, згідно леми 2.3 $y(x)$ є розв'язком рівняння (2.1) з $h(x) = 4 \operatorname{sign} y(x)$. Тому зовні нулів функції $y(x)$ є класичним розв'язком рівняння (2.1), а отже і рівняння (1.1). □

Позначаючи праву частину рівняння (5.1) як дію оператора $\mathcal{A}$ на функцію y, отримуємо

Наслідок 5.1. *Обмежені на всій осі розв'язки рівняння* (1.1) *є нерухомими точками оператора $\mathcal{A}$, і навпаки, кожна нерухома точка оператора $\mathcal{A}$, розглядуваного в просторі $C(\mathbb{R})$ (неперервних обмежених на всій осі функцій), є обмеженим розв'язком рівняння* (1.1).

Наслідок 5.2. *Кожний обмежений на всій осі розв'язок рівняння* (1.1) *допускає оцінку*

$$|y(x)| \leq 1.14. \tag{5.2}$$

Доведення. Із інтегрального рівняння (5.1) та явного вигляду функції Гріна (2.4) і оцінок (2.6) отримуємо

$$|y(x)| \leq 8 \int\limits_0^\infty |\mathcal{G}(t)|\, dt = 4K_0 \approx 1.14.$$

□

Лема 5.2. *Нехай обмежений на всій осі розв'язок $y(x)$ рівняння* (1.1) *зберігає знак на інтервалі $(x_0 - l, x_0 + l)$, $l > 0$. Тоді*

$$|y(x_0) - \operatorname{sign} y(x_0)| \leq \frac{2\sqrt{2}}{l}. \tag{5.3}$$

Доведення. Оскільки $y(x)$ задовольняє рівняння (5.1), а $4\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(x - s)\, ds = 1$, тоді

$$\begin{aligned} &|y(x_0) - \operatorname{sign} y(x_0)| \\ &\qquad = 4\Big|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(x_0 - s)[\operatorname{sign} y(s) - \operatorname{sign} y(x_0)]\, ds\Big| \\ &\qquad\qquad \leq 8 \int\limits_{|s-x_0|>l} |\mathcal{G}(x_0 - s)|\, ds \leq \frac{2\sqrt{2}}{l}, \end{aligned}$$

де використана оцінка $|\mathcal{G}(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{8} e^{-|x|}$, що випливає з (2.4). □

6. Представлення обмеженого розв'язку через його нулі

Для представлення обмежених на всій осі розв'язків рівняння (1.1) через його нулі важливо показати, що всі ізольовані нулі прості. Для цього потрібна наступна лема.

Лема 6.1. *Нехай* x_0 *— ізольований нуль розв'язку* $y(x)$ *рівняння* (1.1) *і* $y'(x_0) = 0$. *Тоді існує точка* x_1, *в якій* $|y(x_1)| \geq 1 + \cosh\pi > 12$.

Доведення. Нехай точка $x_0 = 0$ — ізольований нуль розв'язку $y(x)$. Тоді існує $\varepsilon > 0$ таке, що на інтервалах $I_1 = (0, \varepsilon)$ і $I_2 = (-\varepsilon, 0)$ розв'язок приймає значення одного знаку. Можливі два випадки:

а) коли розв'язок на інтервалах I_1 і I_2 одного знаку;

б) коли розв'язок на інтервалах I_1 і I_2 приймає значення різних знаків.

У випадку а) будемо вважати, що $y(x) > 0$ при $x \in I_1$ і $x \in I_2$. Якщо $y(x) < 0$, то розглядуємо розв'язок $-y(x)$.

Оскільки $y(0) = 0$ і $y^{'}(0) = 0$, то у випадку а) розв'язок $y(x)$ має вигляд

$$y(x) = 1 - \cosh x \cos x + A(\cosh x \sin x - \sinh x \cos x) + B \sinh x \sin x, \tag{6.1}$$

де A і B — сталі. При $x \to 0$ із (6.1) отримуємо

$$y(x) = \frac{x^4}{6} + \frac{2}{3}Ax^3 + Bx^2 + O(x^4),$$

а по умові а) $y(x) \geq 0$, тому стала $B \geq 0$. Функція $\varphi_1(x) = 1 - \cosh x \cos x$ парна і зростаюча при $0 \leq x \leq \pi$. Дійсно, $\varphi_1'(x) = -\sinh x \cos x + \cosh x \sin x$, $\varphi_1''(x) = 2 \sinh x \sin x \geq 0$ при $0 \leq x \leq \pi$. Поскільки $\varphi_1'(0) = 0$, тому $\varphi_1'(x)$ приймає невід'ємні значення. Функція $\varphi_1(0) = 0$, тому $\varphi_1(x)$ зростаюча від $\varphi_1(0)$ до $\varphi_1(\pi) = 1 + \cosh\pi$.

Функція $\varphi_2 = \cosh x \sin x - \sinh x \cos x$ непарна і зростаюча на інтервалі $(-\pi, \pi)$. Дійсно, $\varphi_2' = 2 \sinh x \sin x \geq 0$. В представленні (6.1) стала $B \geq 0$. Якщо стала $A \geq 0$, то розв'язок $y(x) \geq 1 - \cosh x \cos x > 0$ при $0 < x \leq \pi$. Тому $y(\pi) \geq 1 + \cosh\pi$. Якщо $A \leq 0$, то розв'язок (6.1) на інтервалі $(-\pi, 0)$ має оцінку $y(x) \geq 1 - \cosh x \cos x > 0$ і $y(-\pi) \geq 1 + \cosh\pi$.

Таким чином, у випадку а) показано, шо розв'язок $y(x)$ має представлення (6.1) на інтервалах $(-\varepsilon, \pi)$, коли $A \geq 0$, або $(-\pi, \varepsilon)$, коли $A < 0$, і в деякій точці $x_1 = \pi$, коли $A \geq 0$ або $x_1 = -\pi$, коли $A < 0$

приймає значення $y(x_1) \geq 1 + \cosh \pi$. Тобто лема доведена для випадку а).

Розглянемо тепер випадок б). Коли розв'язок на інтервалах I_1 і I_2 приймає значення різних знаків. Будемо вважати $y(x) > 0$, $x \in I_1$ і $y(x) < 0$, $x \in I_2$. У противному разі досить розглянути функцію $-y(x)$.

У цьому випадку розв'язок з умовами $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ має вигляд

$$y(x) = \begin{cases} 1 - \cosh x \cos x + A(\cosh x \sin x - \sinh x \cos x), & x \in I_1, \\ -1 + \cosh x \cos x + A(\cosh x \sin x - \sinh x \cos x), & x \in I_2, \end{cases} \tag{6.2}$$

де стала $A \geq 0$. Умови неперервності другої і третьої похідних $y(x)$ у точці $x = 0$ призводять до відсутності функції $\sinh x \sin x$ у представленні (6.2) і дають однакову сталу A на інтервалах I_1 і I_2. Оскільки із (6.2) випливає $y(x) \geq 1 - \cosh x > 0$ при $0 < x \leq \pi$, то представлення (6.2) вірне на інтервалі $(-\varepsilon, \pi)$. Але $y(\pi) \geq 1 + \cosh \pi$ при $x = \pi$. Тим самим лема доведена і для випадку б). □

Теорема 6.1. *Нехай* $y(x)$ *— нетривіальний обмежений на всій осі розв'язок рівняння* (1.1)*, всі нулі якого утворюють ізольовану множину* $\{x_k\}$, $k \in K$, *(*K *— множина індексів, причому* $K = \{0, 1, \dots, m\}$, *якщо кількість нулів* $m + 1$, $K = \{0, 1, 2, \dots\}$, *якщо нулів нескінченна кількість, обмежена зліва,* $K = \{\dots - 2, -1, 0\}$, *якщо нулів нескінченна кількість, обмежена справа і відповідно* $K = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, *якщо нулів нескінченна кількість, необмежена з двох сторін). Тоді всі нулі цього розв'язку є простими (тобто* $y'(x_k) \neq 0$, *якщо* $y(x_k) = 0$, $k \in K$*). Розв'язок* $y(x)$ *з точністю до знака визначається своїми нулями. При цьому, якщо* $y > 0$ *при* $x_{2k} \leq x \leq x_{2k+1}$, *то*

$$y(x) = \operatorname{sign} y(x) + \sum_{k \in K} (-1)^{k+1} \Phi(x - x_k), \tag{6.3}$$

де $\Phi(x) = \operatorname{sign} x e^{-|x|} \cos x$.

Доведення. Нехай $x_0 = 0$ — ізольований нуль обмеженого на всій осі розв'язку $y(x)$. Якщо б $y'(0) = 0$, то згідно з лемою 5.2 в околі цієї точки функція приймала б значення по модулю більше 12, але це протирічить наслідку 5.2, згідно з яким $|y(x)| \leq 1.14$. Тобто всі нулі розв'язку y є простими, а отже розв'язок при переході через кожен нуль міняє знак. Таким чином, $\operatorname{sign} y(x)$ однозначно (з точністю до знаку) визначається нулями розв'язку y :

$$\operatorname{sign} y(x) = \sum_{\substack{k\in K,\\ |k|\le 2j}} (-1)^k \operatorname{sign}(x-x_k), \quad x_{-2j} < x < x_{2j}, \tag{6.4}$$

якщо $y > 0$ при $x_{2k} \le x \le x_{2k+1}$. Легко бачити, що

$$4\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x-s)\operatorname{sign}(s-a)\,ds = \operatorname{sign}(x-a) - \Phi(x-a),$$

тобто є кінком в точці $x = a$. Підставляючи (6.4) в праву частину інтегрального рівняння (5.1), отримуємо (6.3). □

Теорема 6.2. *Нехай $y(x;\{x_k\})$ — обмежений розв'язок рівняння* (1.1) *із скінченним числом нулів $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ і з відстанями $a_k = x_k - x_{k-1}$ між сусідніми нулями і $y > 0$ при $x_0 \le x \le x_1$. Тоді*

$$y(x;\{x_k\}) = \operatorname{sign} y(x;\{x_k\}) + \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\Phi(x-x_k), \tag{6.5}$$

де $\Phi(x) = \operatorname{sign} x e^{-|x|}\cos x$.
Для того, щоб функція виду (6.5) *була обмеженим розв'язком рівняння* (1.1), *необхідно і достатньо, щоб числа $a_k > 0$ задовольняли системі трансцендентних рівнянь*

$$\Phi(a_k) = \sum_{\substack{0\le i<j,\\ i\le k\le j\le n}} (-1)^{i+j+1}\Phi(a_i+\cdots+a_j), \qquad k = 1,\ldots,n. \tag{6.6}$$

Доведення. Обмежений розв'язок з нулями $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ має вигляд (6.3). Умова $y(x_k) = 0$ дає систему рівнянь (6.6) для відстаней $a_k = x_k - x_{k-1}$ між сусідніми нулями. Нехай $\{a_k\}$ — розв'язок системи (6.6). Тоді, покладаючи $x_0 = 0$, $x_k = a_1 + \cdots + a_k$, $k = 1,\ldots,n$, отримуємо, що функція (6.5) з такими $\{x_k\}$ буде мати представлення

$$y(x) = 4\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x-s)h(s)\,ds, \quad \text{де} \quad h(x) = \begin{cases} -1, & x < x_0,\\ (-1)^k, & x\in[x_k, x_{k+1}],\\ (-1)^n, & x > x_n. \end{cases}$$

Оскільки $\{a_k\}$ — розв'язки системи (6.6), то функція $y(x)$ має нулі в точках $\{x_k\}$. Інших нулів у функції $y(x)$ немає, тому $h(x) = \operatorname{sign} y(x)$. Таким чином, $y(x)$ є розв'язком рівняння (5.1), а отже, обмеженим розв'язком рівняння (1.1) з нулями в точках $\{x_k\}$. □

7. Солітони

Солітоном називається обмежений розв'язок рівняння (1.1), який має два нулі. Поскільки розв'язки рівняння (1.1) допускають зсуви по x, тоді достатньо знайти солітонні розв'язки $y_s(x)$, у яких нулі розташовані в точках $x_0 = -a/2$ та $x_1 = a/2 > 0$. В цьому випадку $\operatorname{sign} y_s(x)$ — *скелет розв'язку* має вигляд

$$\operatorname{sign} y_s(x) = \begin{cases} -1, & x < -a/2, \\ 1, & -a/2 < x < a/2, \\ -1, & a/2 < x. \end{cases} \tag{7.1}$$

Із виразу (6.3) маємо

$$y_s(x) = \operatorname{sign} y_s(x) - \Phi(x + a/2) + \Phi(x - a/2), \tag{7.2}$$

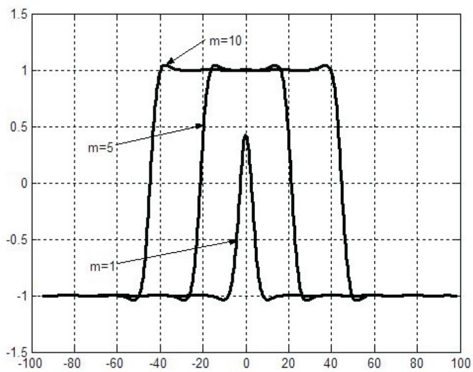
де явне значення функції Φ дається виразом (3.5). Умови $y_s(-a/2) = 0$ та $y_s(a/2) = 0$ дають рівняння $\Phi(a) = 0$ або

$$\cos a = 0. \tag{7.3}$$

Таким чином, величина a, що характеризує ширину солітонів і відстань між його нулями, може приймати тільки значення

$$a = (2m - 1)\frac{\pi}{2}, \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{7.4}$$

занумеровані непарними числами $2m - 1$. Графік солітонів, що відповідає різним ширинам (7.4), представлений на мал. 4.



Мал. 4 Солітонні розв'язки з $m = 1; 5; 10$.

8. Розв'язки з трьома нулями

Нехай обмежений розв'язок $y(x)$ рівняння (1.1) має три нулі $x_0 < x_1 < x_2$. Позначимо відстані між нулями $a_1 = x_1 - x_0$ та $a_2 = x_2 - x_1$. Із формули (6.3) отримуємо явний вигляд розв'язку, якщо відомі його нулі. Умови, що функція $y(x)$ із (6.3) рівна нулю при $x = x_0$, x_1, x_2, дають систему рівнянь (6.6) відносно a_1, a_2

$$\Phi(a_1) = \Phi(a_2) = \Phi(a_1 + a_2). \tag{8.1}$$

Теорема 8.1. *Нехай $y(x)$ — обмежений розв'язок рівняння* (1.1) *з трьома нулями $x_0 < x_1 < x_2$. Тоді відстань між нулями $a_1 = x_1 - x_0$ та $a_2 = x_2 - x_1$ перевищує величину* 1.56*:*

$$a_k \geq a_{min} = 1.56, \quad k = 1, 2. \tag{8.2}$$

Справедливі оцінки

$$\left| a_k - (2m_k - 1)\frac{\pi}{2} \right| < d = 0.212, \tag{8.3}$$

де непарні числа $2m_k - 1$ можна виразити через a_k за допомогою рівності

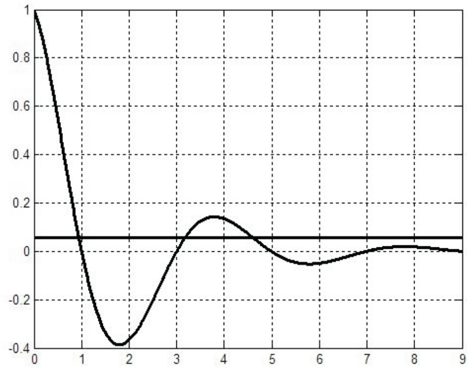
$$2m_k - 1 = \left[\frac{2a_k}{\pi}\right], \tag{8.4}$$

тут $[\alpha]$ — ціла частина числа α.

Для будь-яких непарних чисел $2m_1 - 1$ і $2m_2 - 1$ існує та єдиний з точністю до еквівалентності (*тобто з точністю до знака і зсуву по x*) *обмежений розв'язок рівняння* (1.1) *з трьома нулями, відстань між якими задовольняє нерівність* (8.3).

Доведення. Функція $y(x)$, що має вигляд (6.3), тоді і лише тоді буде обмеженим розв'язком з трьома нулями $x_0 < x_1 < x_2$, коли відстані $a_1 = x_1 - x_0$ та $a_2 = x_2 - x_1$ задовольняють системі рівнянь (8.1). В силу їх симетрії відносно a_1 та a_2 можна вважати, що $a_1 \leq a_2$. Якщо в (8.1) всі значення функцій від'ємні, тоді $a_k \geq \frac{\pi}{2}$ і нерівність (8.2) виконується. Якщо в (8.1) всі значення додатні, тоді мінімальні значення a_1 досягаються лише у випадку, зображеному на мал. 5, де абсциси точок перетину прямої лінії з графіком функції Φ відповідають значенням a_1, a_2, $a_1 + a_2$. В цьому випадку $a_1 = \frac{\pi}{2} - x$, $a_2 = \frac{3\pi}{2} + y$, де x і y задовольняють системі рівнянь, яку можна отримати із (8.1):

$$\sin x = e^{-(\frac{3\pi}{2} + y)} \cos(y - x), \quad \sin y = e^{-(\frac{\pi}{2} - x)} \cos(y - x), \tag{8.5}$$



Мал. 5 Графік функції $\Phi(x) = e^{-x}\cos x$.

де $0 < y < \frac{\pi}{4}$, $0 < x < y$. Чисельні розв'язки системи (8.5) зводяться до значень $x = 0.0072$, $y = 0.2067$. Таким чином, $a_{min} = \frac{\pi}{2} - x = 1.56$.

Отримаємо тепер оцінки (8.3). Для цього зручно представити систему (8.1) в явному вигляді

$$\cos a_1 = e^{-a_2}\cos(a_1 + a_2), \quad \cos a_2 = e^{-a_1}\cos(a_1 + a_2). \tag{8.6}$$

В силу оцінки (8.2), із (8.6) маємо

$$|\cos a_k| \le e^{-a_{min}} = 0.2094. \tag{8.7}$$

Тому справедливі оцінки (8.3), (8.4).

Покажемо тепер, що для будь-яких непарних чисел $2m_1-1$ і $2m_2-1$ існує та єдиний розв'язок системи (8.6), що задовольняє оцінку (8.3). Дійсно, покладаючи

$$a_k = (2m_k - 1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon_k, \tag{8.8}$$

систему (8.6) можна представити в еквівалентній формі:

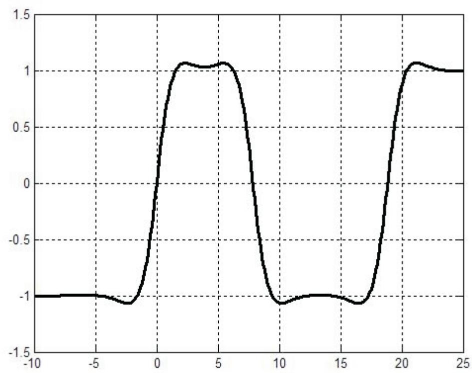
$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \arcsin[(-1)^{m_2-1}e^{\frac{\pi}{2}-m_2\pi-\varepsilon_2}\cos(\varepsilon_1+\varepsilon_2)], \\ \varepsilon_2 &= \arcsin[(-1)^{m_1-1}e^{\frac{\pi}{2}-m_1\pi-\varepsilon_1}\cos(\varepsilon_1+\varepsilon_2)]. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Систему (8.9) можна представити в операторному вигляді $\varepsilon = A(\varepsilon)$ у просторі двовимірних векторів з нормою $\|\varepsilon\| = \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\}$. Оператор A переводить замкнену множину $B = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : -0.01 \le \varepsilon_k \le 0.212,\ k = 1, 2\}$ в себе і є оператором стискання на B :

$$\|A(\eta) - A(\varsigma)\| \le q\|\eta - \varsigma\|, \qquad q < 0.5. \tag{8.10}$$

Тому існує та єдиний розв'язок рівняння $\varepsilon = A(\varepsilon)$ в B, який можна отримати за допомогою методу послідовних наближень, починаючи зі значення $\varepsilon = 0$. Для відстаней $a_k = (2m_k - 1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon_k$ справедлива оцінка (8.3). □

На мал. 6 зображений обмежений розв'язок з трьома нулями, відстані між якими характеризуються за допомогою непарних чисел $(2m_1 - 1, 2m_2 - 1) = (5, 7)$.



Мал. 6 Графік розв'язку з трьома нулями $2m_1 - 1 = 5,\ 2m_2 - 1 = 7$.

9. Розв'язок із скінченним числом нулів

Теорема 9.1. *Нехай $y(x; \{x_k\})$ — обмежений розв'язок рівняння* (1.1) *із скінченним числом нулів $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Нехай відстані $a_k = x_k - x_{k-1}$ між сусідніми нулями задовольняють умові $a_k \geq \pi$. Тоді розв'язок $y(x)$ однозначно (з точністю до знака та зсуву по x) визначається множиною непарних чисел $2m_k - 1 = \left[\frac{2a_k}{\pi}\right]$, $k = 1, \ldots, n$. Довільна скінченна послідовність непарних чисел $2m_k - 1 \geq 3$, $k = 1, \ldots, n$, однозначно (з точністю до еквівалентності) визначає обмежений розв'язок рівняння* (1.1)*, відстані між нулями якого задовольняють співвідношенню* (8.8) *з $|\varepsilon_k| < 0.1$.*

Доведення. Обмежений розв'язок з нулями $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ має вигляд (6.3). Умова $y(x_k) = 0$ дає систему рівнянь (6.6) для відстаней $a_k = x_k - x_{k-1}$ між сусідніми нулями. Використовуючи формулу (3.5), що дає явний вигляд функції Φ і оцінку $a_n \geq \pi$, що виконується за умовою теореми, із системи (6.6) отримуємо, що

$$|\cos a_k| \leq \sum_{\substack{0\leq i<j,\\ i\leq k\leq j\leq n}} e^{\pi(i-j)} < \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)p^n = p(2-p)(1-p)^{-2},$$

де $p = e^{-\pi}$. З цього випливає представлення (8.8) для розв'язків системи (6.6), з непарними числами $2m_k - 1 \geq 3$ та $|\varepsilon_k| < 0.1$ ($k = 1,\ldots,n$).

Покажемо, що для довільних непарних чисел $2m_k - 1 \geq 3$, система (6.6) має розв'язок, що допускає представлення (8.8) при $|\varepsilon_k| < 0.1$ і цей розв'язок єдиний. Користуючись (8.8) та (6.3), систему (6.6) можна трансформувати аналогічно (8.9) в еквівалентну $\varepsilon = A(\varepsilon)$ для вектора $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$. Рівняння має єдиний розв'язок, поскільки оператор A неперервний, відображає n-вимірний куб $\{\varepsilon : |\varepsilon_k| \leq 0.1\}$ в себе, а також є відображенням стискання. Нерівність

$$\|A(\varepsilon^{(2)}) - A(\varepsilon^{(1)})\| \leq q\|\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)}\|,$$

виконується при $\|\varepsilon\| = \max_{1\leq k\leq n}|\varepsilon_k|$ для значень констант q, що є добутком константи Ліпшіця функції $\arcsin x$, $|x| \leq 0.1$, та суми абсолютних значень частинних похідних правих частин системи (6.6) відносно змінних $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$. Таким чином, маємо оцінки:

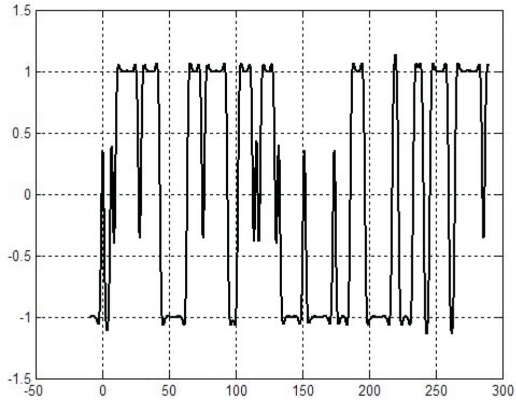
$$q \leq 1.01\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(n+1)p^n = 1.01p(6-3p+p^2)(1-p)^{-3} \approx 0.2926 < 1,$$

поскільки $p = e^{-\pi}$. □

10. Хаотичні розв'язки

Непарні числа $\{2m_1 - 1,\ldots,2m_n - 1\}$, що характеризують відстані між нулями обмежених розв'язків рівняння (1.1), можуть приймати будь-які значення, в тому числі можуть бути набором випадкових непарних чисел. Це призводить до розв'язків з "хаотичною" поведінкою. На мал. 7 представлено обмежений розв'язок рівняння (1.1), відстань між нулями у якого характеризує наступна випадкова вибірка непарних чисел (1, 3, 1, 1, 11, 1, 9, 13, 7, 1, 11, 5, 7, 1, 1, 1, 7, 1, 1, 11, 1, 13, 1, 7, 7, 13, 3, 7, 5, 3, 9, 3, 13, 1, 11, 9, 3, 11, 3, 5, 9, 1).

Означення 10.1. *Будемо говорити, що рівняння $y^{(4)} + f(y) = 0$ з бістійкою нелінійністю $f(\pm 1) = 0$, $f'(\pm 1) > 0$ допускає хаотичні розв'язки, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $d(\varepsilon) > 0$ таке, що для*



Мал. 7 Хаотичний розв'язок.

будь-якої послідовності точок $\{A_k(x_k, \sigma_k)\}_{k=1}^n$ *з* $x_{k+1} - x_k > d(\varepsilon)$ *та* σ_k, *що приймає одне з двох стійких значень для будь-якого* k, $(\sigma_k = \pm 1)$, *існує обмежений розв'язок* y, *графік якого проходить через* ε*-околи всіх точок* A_k, *тобто*

$$|y(x_k) - \sigma_k| < \varepsilon, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{10.1}$$

Теорема 10.1. *Рівняння* (1.1) *допускає хаотичні розв'язки в сенсі означення* 10.1.

Доведення. Нехай вибрано достатньо мале $\varepsilon > 0$, $(\varepsilon < 1/2)$. Покладемо $d(\varepsilon) = \frac{8}{\varepsilon} + 2\pi$. Нехай $\{A_k(x_k, \sigma_k)\}_{k=1}^n$ послідовність з означення 10.1. Розглянемо середини $y_k = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$ всіх інтервалів (x_k, x_{k+1}), таких що $\sigma_k \neq \sigma_{k+1}$. Розглянемо на осі $0X$ нові інтервали I_j довжиною 2π, середини яких лежать у точках y_j, а отже віддалених від точок A_k на відстані не меншій, ніж $\frac{4}{\varepsilon}$. Згідно з твердженням теореми 9.1, існує обмежений розв'язок такий, що має скінченне число нулів, і тільки один з них лежить у кожному I_j. Такий розв'язок задовольняє умові (10.1). Дійсно, в силу того, що розв'язок y не змінює знак між двома нулями, а абсциси точок A_k віддалені від нулів більше, ніж на $\frac{4}{\varepsilon}$, то згідно з лемою 5.1 виконується (10.1). □

11. Представлення періодичних розв'язків через їх нулі

Теорема 11.1. *Нехай* $y(x)$ — L*-періодичний розв'язок рівняння* (1.1), *нулями якого є* $x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} = x_0 + L$, *(не порушую-*

чи загальності, покладемо $x_0 = 0$), *числа* $a_k = x_k - x_{k-1}$ — *відстані між сусідніми нулями.*

Тоді при $0 < x < a_1$ *розв'язок має вигляд*

$$y(x) = 1 - \frac{1}{M}[e^{-x}\cos(x+\theta) - e^{-(L-x)}\cos(L-x+\theta)] + \\ \frac{e^{\theta}}{M}\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^k[\Phi(x_k - x + \theta) - \Phi(L - x_{2n-k} + x + \theta)], \quad (11.1)$$

де $\tan\theta = \frac{e^{-L}\sin L}{1-e^{-L}\cos L}$, $M = (1 - 2e^{-L}\cos L + e^{-2L})^{1/2}$.

Для того, щоб функція виду (11.1) *була періодичним розв'язком рівняння* (1.1), *необхідно і достатньо, щоб числа* a_k *задовольняли трансцендентне рівняння*

$$\Phi(a_1+\theta) - \Phi(a_1+a_2+\theta) + \cdots + \Phi(a_1 + \cdots + a_{2n-1} + \theta) = \\ \Phi(a_{2n}+\theta) - \Phi(a_{2n}+a_{2n-1}+\theta) + \cdots + \Phi(a_{2n} + \cdots + a_2 + \theta) \quad (11.2)$$

і всі рівняння, які отримуються із (11.2) *шляхом циклічної перестановки чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$.

Коментарі. Фактично, теорема 11.1 дає явний вигляд всіх періодичних розв'язків рівняння (1.1), якщо відомі відстані між нулями цих розв'язків, а для відстаней наводиться система трансцендентних рівнянь. Будемо називати цю систему рівнянь характеристичною системою для відстаней між нулями.

Таким чином, нелінійна проблема опису всіх періодичних розв'язків рівняння (1.1) еквівалентна проблемі опису всіх розв'язків характеристичної системи для відстаней. Тобто нескінченновимірна нелінійна проблема опису всіх періодичних розв'язків рівняння (1.1) із скінченним числом нулів зводиться до скінченновимірної нелінійної проблеми — характеристичної системи для відстаней. Як буде показано далі, всі розв'язки характеристичної системи можна повністю описати.

Доведення. Нехай $y(x)$ — L-періодичний розв'язок рівняння (1.1), нулями якого є $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n} = L$, що лежать на інтервалі $[0, L]$. Всі інші нулі отримуються із вказаних шляхом послідовного додавання або віднімання величини L. Тобто всі нулі на додатній осі мають вигляд

$$x_{2jn+k} = x_k + jL, \quad k = 1, \ldots, 2n, \quad j = 0, 1, \ldots$$

Нулі на від'ємній осі мають вигляд

$$x_{-2jn+k} = x_{2n-k} - jL.$$

Підставляючи ці значення нулів у формулу (6.3) і враховуючи, що

$$\begin{aligned}\Phi(a) + \Phi(a+L) + \dots + \Phi(a+jL) + \dots \\ = \operatorname{Re}[e^{(i-1)a} + e^{(i-1)(a+L)} + \dots] \\ = \operatorname{Re}\left[e^{(i-1)a}\frac{1}{1-e^{(i-1)L}}\right] = \frac{e^{-a}}{M}\cos(a+\theta),\end{aligned}$$

де $\cos\theta = \frac{1-e^{-L}\cos L}{M}$, $\sin\theta = \frac{e^{-L}\sin L}{M}$, $M = [1-2e^{-L}\cos L + e^{-2L}]^{1/2} = |1-e^{(i-1)L}|$, із (6.3) отримуємо (11.1).

Умова $y(0) = 0$ дає рівність (11.2). Функція $y(x-x_k)$ також є періодичним розв'язком рівняння (1.1). Цій функції відповідають відстані між нулями $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots a_{2n}$, $a_1, \dots, a_k$, що є циклічною перестановкою вихідних відстаней $a_1, \dots, a_{2n}$. Тому рівність (11.2) виконується і при циклічній перестановці $a_1, \dots, a_{2n}$.

Розв'язність характеристичної системи (11.2) є необхідною і достатньою умовою, щоб точки $x_0 = 0$, $x_1 = a_1, \dots, x_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k, \dots$ були нулями періодичного розв'язку (11.1) рівняння (1.1). $\square$

12. Періодичні розв'язки з двома нулями на періоді

У цьому випадку є лише a_1, a_2, і характеристична система для відстаней зводиться до

$$e^{-a_1}\cos(a_1+\theta) = e^{-a_2}\cos(a_2+\theta), \tag{12.1}$$

де $\tan\theta = \frac{e^{-L}\sin L}{1-e^{-L}\cos L}$.

Рівняння (12.1) завжди виконується, коли $a_1 = a_2$. Це призводить до розглядуваних раніше найпростіших періодичних розв'язків.

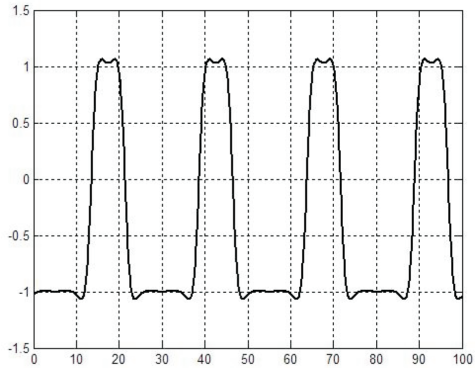
Нехай $L = N\pi$, де N — натуральне число. Тоді при $a_1 \neq a_2$ рівняння (12.1) виконується лише у випадку $\cos a_1 = \cos a_2 = 0$. Тобто у випадку, коли

$$a_1 = m_1\frac{\pi}{2}, \quad a_2 = m_2\frac{\pi}{2}, \qquad m_1 + m_2 = 2N,$$

де числа m_1 і m_2 непарні і в сумі дають $2N$.

У цьому випадку отримуємо нову серію точних періодичних розв'язків рівняння (1.1), *занумерованих непарними числами* m_1, m_2 :

$$\begin{aligned}y(x; m_1, m_2) = 1 - \frac{1}{M}[(e^{-x} + (-1)^{N+1}e^{-(L-x)})\cos x \\ + (e^{-(a_1-x)} + (-1)^{N+1}e^{-(a_2+x)})(-1)^{\frac{(m_1-1)}{2}}\sin x],\end{aligned} \tag{12.2}$$



Мал. 8 Періодичний розв'язок $y(x; m_1, m_2)$ з двома нулями на періоді $L = 8\pi$ з $m_1 = 5, \ \ m_2 = 11$.

де $N = \frac{1}{2}(m_1 + m_2), \ \ L = N\pi, \ \ M = 1 + (-1)^{N+1}e^{-L}$. На мал. 8 представлений розв'язок (12.2) з періодом $L = 8\pi$.

Характеристичне рівняння (12.1) можна також записати у вигляді

$$\Phi(a_1 + \theta) = \Phi(a_2 + \theta).$$

Із вигляду функції Φ (мал. 5) випливає, що розв'язки $a_1 \neq a_2$ є лише при $a_k \geq 1.56$ і $L \geq L_{min} = 4.73$.

Таким чином, при $L < L_{min}$ існують лише найпростіші періодичні розв'язки. При зростанні L кількість нееквівалентних розв'язків зростає, що видно із вигляду серії точних розв'язків (12.2).

Покладаючи $a_1 = m_1\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1$, де m_1 — непарне, характеристичне рівняння (12.1),

$$e^{-a_1}\cos(a_1 + \theta) = e^{-a_2}\cos(a_2 + \theta)$$

можна звести до рівняння

$$\varepsilon_1 = -\theta + \arcsin[(-1)^{\frac{m_1+1}{2}} e^{-(L-m_1\pi-2\varepsilon_1)}\cos(L - m_1\frac{\pi}{2} + \theta - \varepsilon_1)].$$

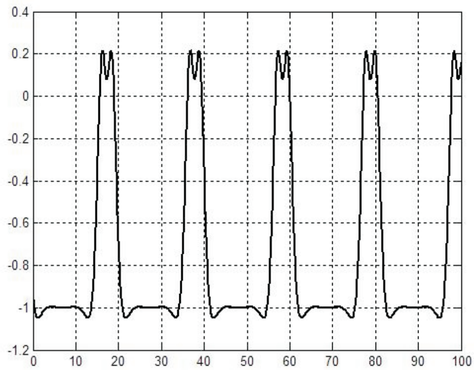
Методом стиснених відображень можна довести існування та єдиність розв'язків цього рівняння і $|\varepsilon_1| < \frac{\pi}{4}$.

13. Періодичні розв'язки з періодом $N\pi$

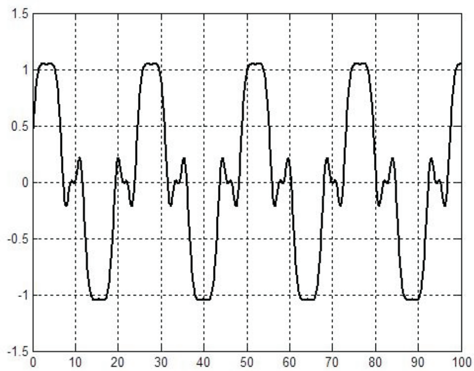
Теорема 13.1. *Нехай $L = N\pi$, де N — натуральне число. Тоді всі розв'язки характеристичної системи для відстаней між нулями $L-$ періодичних розв'язків мають вигляд $a_k = m_k\frac{\pi}{2} + \varepsilon_k$, де числа m_k — непарні, $|\varepsilon_k| < \frac{\pi}{4}$ і $m_1 + m_2 + \cdots + m_{2n} = 2N$.*

Доведення. Детальне доведення для випадку двох нулів на періоді дано вище. Загальний випадок доводиться застосуванням принципу стиснених відображень для рівнянь відносно $\{\varepsilon_k\}$ вигляду $\varepsilon = A(\varepsilon)$, що отримуються із характеристичної системи (11.2) для відстаней a_k вигляду (8.8) між нулями періодичних розв'язків. □

На мал. 9, 10 представлені періодичні розв'язки як ілюстрація теореми 13.1.



Мал. 9 Періодичний розв'язок з $m_k = \{1, 1, 1, 9\}$ і періодом $L = 6\pi$.



Мал. 10 Періодичний розв'язок з $m_k = \{1, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 5\}$ і періодом $L = 9\pi$.

14. Просторова ентропія

Нехай $S(L)$ число всіх нееквівалентних періодичних розв'язків рівняння (1.1) з найменшим періодом L. Число $S(L)$ завжди скінченне.

Означення 14.1. *Число*

$$\eta = \varlimsup_{L\to\infty} \frac{1}{L} \ln S(L) \tag{14.1}$$

називатимемо просторовою ентропією рівняння (1.1) *відносно періодичних розв'язків.*

Теорема 14.1. *Просторова ентропія рівняння* (1.1) *відносно періодичних розв'язків визначається числом*

$$\eta = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{14.2}$$

Доведення. Нехай $L = N\pi$, де N — ціле число. Позначимо через $F(N)$ кількість різних розбиттів числа N на непарні частини. На основі теореми 13.1 отримуємо нерівність

$$S(N\pi) \le F(2N). \tag{14.3}$$

З іншого боку, циклічні перестановки $a_1, \ldots, a_{2n}$ призводять до еквівалентного періодичного розв'язку. Тому

$$S(N\pi) \ge \frac{1}{2N} F(2N). \tag{14.4}$$

Легко бачити, що $F(N)$ є N — число Фібоначчі. Ці числа визначаються так: $F(1) = 1,\ F(2) = 1,\ F(n) = F(n-1) + F(n-2)$. Відомо, що

$$F(N) = \frac{1}{\sqrt{5}} (p^N - (-p)^{-N}),$$

де

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Тому, із (14.3), (14.4) отримуємо (14.2). □

Література

[1] D. G. Aronson, H. Weinberger, *Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics* // Adv. Math., **30**, (1978), 33–76.

[2] A. Kolmogorov, I. Petrovskii, N. Piskunov, *Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique* // Bull. Univ. Moskou, Ser. Internat. *Sec A*, **1** (1937), 1–25.

[3] P. Coullet, C. Elphick, and D. Repaux, *Nature of spatial chaos* // Phys. Rev. Lett., **58** (1987), 431–434.

[4] G. T. Dee and W. van Saarloos, *Bistable systems with propagating fronts leading to pattern formation* // Phys. Rev. Lett. **60** (1988), 2641-–2644.

[5] J. A. Powell, A. Newell, C. K. R. T. Jones, *Competition between generic and nongeneric fronts in envelope equations* // Phys. Rev. A, **44** (1991), 3636–3652.

[6] Y. Pomeau, P. Manneville, *Wavelength selection in cellular flows* // Phys. Lett. **75A** (1980), 296–298.

[7] J. Swift, P. Hohenberg, *Hydrodynamic fluctuations at the convective instability* // Phys. Rev. A, **15** (1977), 319-–328.

[8] W. Zimmermann, *Propagating fronts near a Lifschitz point* // Phys. Rev. Lett., **66** (1991), 1546.

[9] L. Nizhnik, M. Hasler, I. Nizhnik, *Stable stationary solutions in reaction-diffusion systems consisting of a* 1*-d array of bistable cells* // Int. J. Bifur. Chaos, **2** (2002), 261–279.

[10] I. Nizhnik, *Stable stationary solutions for a reaction–diffusion equation with a multi-stable nonlinearity* // Phys. Lett. A, **357** (2006), 319-–322.

[11] L. A. Peletier, J. A. Rodríguez, *The discrete Swift–Hohenberg equation* // Report Mathematical Institute, Leiden University, MI (2004), 2004-07, 34 pp.

[12] L. A. Peletier, W. C. Troy, R.C.A.M van der Vorst, *Stationary solutions of a fourth-order nonlinear diffusion equation* // Differential Equations, **31** (1995), 301–314.

[13] L. A. Peletier, W. C. Troy, *A topological shooting method and the existence of kinks of the extended Fisher–Kolmogorov equation* // Topol. Methods Nonlinear Anal., **6** (1995), N 2, 331–355.

[14] W. D. Kalies, R. C. A. M. VanderVorst, *Multitransition homoclinic and heteroclinic solutions of the extended Fisher–Kolmogorov equation* // J. Differential Equations, **131** (1996), 209–228.

[15] G. J. B. van den Berg, L. A. Peletier, W. C. Troy, *Global branches of multi bump periodic solutions of the Swift-Hohenberg equation* // Arch. Rational Mech. Anal., **158** (2001), 91–153.

[16] S. Albeverio, I. Nizhnik, *Spatial chaos in a fourth-order nonlinear parabolic equation* // Phys. Lett. A, **288** (2001), 299–304.

[17] L. A. Peletier, J. A. Rodríguez, *Homoclinic orbits to a saddle-center in a fourth-order differential equation* // J. Differential Equations, **203** (2004), 185–215.

[18] А. М. Самойленко, *Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы*, М.: Наука, 1987; (transl: *Elements of the Mathematical Theory of Multi-Frequency Oscillations*, Mathematics and its Applications, V. 71, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1991).

[19] А. М. Самойленко, Н. Й. Ронто, *Численно-аналитические методы исследования периодических решений*, К.: Вища школа, 1976; (transl: *Numerical-analytic methods of investigating periodic solutions*, Moscow: Mir Publishers, 1979).

[20] А. М. Самойленко, Р. І. Петришин, *Multifrequency Oscillations of Nonlinear Systems*, Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2004.

[21] А. М. Самойленко, Р. І. Петришин, *Математичні аспекти теорії нелінійних коливань*, Київ: Наукова думка, 2004.

Відомості про авторів

Анатолій Михайлович Самойленко, Ірина Леонідівна Нижник	Інститут математики НАН України, вул. Терещенківська, 3 01601 Київ-4, Україна *E-Mail:* `sam@imath.kiev.ua`, `irene@imath.kiev.ua`