Український математичний вісник
Том 5 **(2008)**, № 3, 350 – 365

Эллиптические по Дуглису–Ниренбергу системы в пространствах обобщенной гладкости

Александр А. Мурач

(*Представлена М. Л. Горбачуком*)

Аннотация. Изучена равномерно эллиптическая по Дуглису–Ниренбергу линейная система псевдодифференциальных уравнений в гильбертовой шкале функциональных пространств Хермандера, заданных на евклидовом пространстве. Доказана априорная оценка решения системы и исследована его внутренняя гладкость в этой шкале. В качестве приложения найдено достаточное условие существования непрерывных ограниченных производных у решения.

2000 MSC. 35J45, 46E35.

Ключевые слова и фразы. Равномерно эллиптическая система, пространства Хермандера, интерполяция с функциональным параметром, априорная оценка решения, гладкость решения.

1. Введение и постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается линейная система псевдодифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^{p} A_{j,k}\, u_k = f_j, \quad j = 1, \dots, p. \tag{1.1}$$

Здесь целые $n, p \geq 1$, а $A_{j,k}$, где $j, k = 1, \dots, p,$ — скалярные классические (полиоднородные) псевдодифференциальные операторы (ПДО), заданные в пространстве $\mathbb{R}^n$ [1, п. 1.5, 3.1]. Символ $a_{j,k}(x,\xi)$ ПДО $A_{j,k}$ является комплексно значной бесконечно дифференцируемой функцией аргументов $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, любая производная которой удовлетворяет неравенству

$$|\partial_x^\alpha\, \partial_\xi^\beta\, a_{j,k}(x,\xi)\,| \leq c_{\alpha,\beta}\, \langle\xi\rangle^{r_{j,k}-|\beta|} \quad \text{для любых} \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

Статья поступила в редакцию 24.09.2008

Здесь и далее $r_{j,k} := \operatorname{ord} A_{j,k}$, $\langle\xi\rangle := (1+\|\xi\|^2)^{1/2}$, где $\|\xi\| := (\xi_1^2+\dots+\xi_n^2)^{1/2}$, $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$, и $|\beta| := \beta_1+\dots+\beta_n$ для мультииндекса $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$.

Решение уравнения (1.1) понимается в смысле теории распределений. Важным примером системы (1.1) является система линейных дифференциальных уравнений с бесконечно гладкими комплексными коэффициентами, ограниченными со всеми производными в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.1 ([1, п. 3.2.b]). *Система* (1.1) *называется равномерно эллиптической в* $\mathbb{R}^n$ *по Дуглису–Ниренбергу, если существуют наборы вещественных чисел* $\{l_1,\dots,l_p\}$ *и* $\{m_1,\dots,m_p\}$ *такие, что:*

i) $\operatorname{ord} A_{j,k} \le l_j + m_k$ *для всех* $j,k = 1,\dots,p$;

ii) найдется число $c>0$ *такое, что*

$$|\det\bigl(a^{(0)}_{j,k}(x,\xi)\bigr)_{j,k=1}^{p}| \ge c \quad \text{для любых } x,\xi\in\mathbb{R}^n,\ \ \|\xi\|=1,$$

где $a^{(0)}_{j,k}(x,\xi)$ *— главный символ ПДО* $A_{j,k}$ *в случае* $\operatorname{ord} A_{j,k} = l_j + m_k$*, либо* $a^{(0)}_{j,k}(x,\xi)\equiv 0$ *в случае* $\operatorname{ord} A_{j,k} < l_j + m_k$.

Далее предполагается, что система (1.1) удовлетворяет определению 1.1.

Общие эллиптические системы уравнений смешанного порядка были введены А. Дуглисом и Л. Ниренбергом в [2]. Ими получены априорные оценки решения такой эллиптической системы дифференциальных уравнений в подходящих парах пространств Гельдера (нецелых порядков). Л. Хермандер [3, п. 175] установил априорные оценки решения общей эллиптической системы псевдодифференциальных уравнений в подходящих парах пространств Соболева. В случае, когда эллиптическая система задана на гладком замкнутом (компактном) многообразии, эти оценки равносильны тому, что ограниченный оператор, соответствующий системе, является фредгольмовым (т. е. имеет конечный индекс) [1, п. 3.2.b], [4, п. 19.5]. Если многообразие не компактно, то на символ равномерно эллиптического ПДО необходимо накладывать некоторые дополнительные условия, обеспечивающие фредгольмовость оператора [5, гл. IV], [6], [1, п. 3.1.h]).

В отличие от цитированных работ, мы изучаем систему (1.1) в гильбертовой шкале специальных изотропных пространств Хермандера [7, п. 2.2], [8, п. 10.1]

$$H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) := B_{2,\,\langle\cdot\rangle^s\,\varphi(\langle\cdot\rangle)} = \bigl\{\, w\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) :\ \langle\xi\rangle^s\varphi(\langle\xi\rangle)\,\widehat{w}(\xi)\in L_2(\mathbb{R}^n_\xi)\,\bigr\}. \tag{1.3}$$

Здесь, как обычно, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — линейное топологическое пространство Л. Шварца медленно растущих распределений (антилинейных функционалов), заданных в $\mathbb{R}^n$, а $\widehat{w}(\xi)$ — преобразование Фурье распределения w. Пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ зависит от двух параметров: числового $s \in \mathbb{R}$ и функционального φ. Последний эквивалентен в окрестности бесконечности медленно меняющейся по Карамата функции. В частности, допустима любая эталонная функция

$$\varphi(t) = (\log t)^{j_1} (\log \log t)^{j_2} \ldots (\log \ldots \log t)^{j_k} \quad \text{при} \quad t \gg 1,$$

где целое $k \geq 1$, а $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathbb{R}$. Отметим, что в гильбертовом случае пространства Хермандера, а значит, и пространства (1.3), совпадают с пространствами, введенными и изученными Л. Р. Волевичем и Б. П. Панеяхом [9, § 2], [10, п. 1.4.2].

Класс пространств (1.3) содержит шкалу пространств Соболева $H^s(\mathbb{R}^n) = H^{s,1}(\mathbb{R}^n)$, привязан к ней числовым параметром s и, очевидно, много тоньше ее. Этот класс мы называем *уточненной* шкалой (по отношению к соболевской шкале). Благодаря своим интерполяционным свойствам пространства $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ занимают особое место среди пространств обобщенной гладкости, которые все активнее исследуются и используются в последние годы (см. обзор [11], недавнюю работу [12] и приведенную там литературу).

Линейный оператор, соответствующий системе (1.1), непрерывно действует из пространства $\bigoplus_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в пространство $\bigoplus_{j=1}^{p} H^{s-l_j,\,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. В парах этих пространств нами доказана априорная оценка решения системы (1.1) (теорема 4.1) и исследована его гладкость (теоремы 5.1, 5.2). В качестве приложения установлено достаточное условие существования непрерывных ограниченных производных у решения (теорема 6.1).

Эллиптические операторы и эллиптические краевые задачи на гладких *компактных* многообразиях ранее исследованы в пространствах Хермандера в работах [14–24].

2. Уточненная шкала

Сформулируем необходимое нам определение [25, п. 1.1].

Определение 2.1. *Функция $\varphi : (b, \infty) \to (0, \infty)$, где $b \in \mathbb{R}$, называется* медленно меняющейся *на бесконечности по Карамата, если она измерима по Борелю на полуоси (b_1, ∞) для некоторого числа $b_1 \geq b$ и удовлетворяет условию*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\varphi(\lambda\, t)}{\varphi(t)} = 1 \quad \textit{для любого} \quad \lambda > 0.$$

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех функций $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$ таких, что:

(*i*) *φ измерима по Борелю на полуоси $[1,\infty)$;*

(*ii*) *функции φ и $1/\varphi$ ограничены на каждом отрезке $[1,b]$, где $1 < b < +\infty$;*

(*iii*) *функция φ эквивалентна на полуоси (b,∞) некоторой функции, медленно меняющейся на бесконечности по Карамата; здесь число $b \geq 1$.*

Замечание 2.1. Напомним, что положительные функции φ и φ_0 называются эквивалентными на множестве Q, если существуют положительные числа c_1 и c_2 такие, что $c_1\varphi_0(t) \leq \varphi(t) \leq c_2\varphi_0(t)$ для любого $t \in Q$.

Из известного [25, теорема 1.2] интегрального представления медленно меняющихся функций вытекает следующее описание класса $\mathcal{M}$.

Предложение 2.1. *Функция φ принадлежит классу $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда*

$$\varphi(t) = \exp\left(\beta(t) + \int\limits_1^t \frac{\alpha(\tau)}{\tau}\,d\tau\right) \quad \textit{при} \quad t \geq 1,$$

где функция $\beta : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ измерима по Борелю и ограничена, а функция $\alpha : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ непрерывна и $\alpha(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$.

Пусть $s \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathcal{M}$. Детализируя (1.3), дадим определение пространства $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 2.2. *Обозначим через $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ линейное пространство всех распределений $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, что их преобразование Фурье $\widehat{w}$ является локально суммируемой по Лебегу в $\mathbb{R}^n$ функцией, удовлетворяющей условию*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s}\,\varphi^2(\langle\xi\rangle)\,|\widehat{w}(\xi)|^2\,d\xi < \infty.$$

В пространстве $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ определено скалярное произведение распределений w_1, w_2 по формуле

$$(w_1,w_2)_{s,\varphi} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s}\varphi^2(\langle\xi\rangle)\,\widehat{w_1}(\xi)\,\overline{\widehat{w_2}(\xi)}\,d\xi.$$

Оно порождает норму $\|w\|_{s,\varphi} = (w,w)_{s,\varphi}^{1/2}$.

Пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ как специальный L_2-случай пространств Хермандера и Волевича–Панеяха обладает всеми их свойствами, установленными в [7, п. 2.2], [9]. Так, пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ сепарабельно и гильбертово, причем множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями плотно в нем.

Отметим, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют положительные числа c_1 и c_2 такие, что $c_1 t^{-\varepsilon} \leq \varphi(t) \leq c_2 t^{\varepsilon}$ при $t \geq 1$. Это вытекает из свойства [25, п. 1.5] медленно меняющихся функций и определения класса $\mathcal{M}$. Следовательно, справедливы непрерывные и плотные вложения

$$H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0. \tag{2.1}$$

Таким образом, в шкале пространств

$$\left\{ H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) : \, s \in \mathbb{R}, \ \varphi \in \mathcal{M} \right\} \tag{2.2}$$

функциональный параметр φ характеризует дополнительную гладкость по отношению к основной (степенной) s-гладкости (уточняет последнюю). Поэтому (2.2) естественно называть уточненной шкалой.

3. Интерполяционное свойство уточненной шкалы

Нам понадобится важное свойство уточненной шкалы, состоящее в том, что каждое пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ получается посредством интерполяции с подходящим функциональным параметром пары пространств Соболева. Напомним определение интерполяции с функциональным параметром пар гильбертовых пространств. Она является естественным обобщением классического интерполяционного метода С. Г. Крейна и Ж.-Л. Лионса [26, гл. 1, п. 2.1]. Для наших целей достаточно ограничиться сепарабельными пространствами.

Пусть задана упорядоченная пара $X := [X_0, X_1]$ сепарабельных комплексных гильбертовых пространств X_0 и X_1 такая, что справедливо непрерывное и плотное вложение $X_1 \hookrightarrow X_0$. Пару X мы называем *допустимой.* Для нее существует такой изометрический изоморфизм $J : X_1 \leftrightarrow X_0$, что J является самосопряженным положительно определенным оператором в пространстве X_0 с областью определения X_1. Оператор J определяется парой X однозначно. Пусть также задана измеримая по Борелю функция $\psi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$. Поскольку $\operatorname{spec} J \subset (0, +\infty)$, то в пространстве X_0 определен, как функция от J, оператор $\psi(J)$. Обозначим через $[X_0, X_1]_\psi$

или, короче, X_ψ область определения оператора $\psi(J)$, наделенную скалярным произведением графика:

$$(u,v)_{X_\psi} = (u,v)_{X_0} + (\psi(J)u, \psi(J)v)_{X_0}.$$

Пространство X_ψ сепарабельное, гильбертово и непрерывно вложено в X_0.

Определение 3.1. *Функция ψ называется интерполяционным параметром, если для произвольных допустимых пар $X = [X_0, X_1]$, $Y = [Y_0, Y_1]$ гильбертовых пространств и для любого линейного отображения T, заданного на X_0, выполняется следующее условие. Если при $j = 0, 1$ сужение отображения T на пространство X_j является ограниченным оператором $T : X_j \to Y_j$, то и сужение отображения T на пространство X_ψ является ограниченным оператором $T : X_\psi \to Y_\psi$.*

Описание класса всех интерполяционных параметров в смысле определения 3.1 вытекает из результата Я. Петре [27, п. 5.4] и приведено в [22, теорема 2.7].

Следующее интерполяционное свойство уточненной шкалы доказано в [15, теорема 3.1] (ср. [28]).

Предложение 3.1. *Пусть заданы функция $\varphi \in \mathcal{M}$ и положительные числа ε, δ. Положим $\psi(t) := t^{\varepsilon/(\varepsilon+\delta)}\,\varphi(t^{1/(\varepsilon+\delta)})$ при $t \geq 1$ и $\psi(t) := \varphi(1)$ при $0 < t < 1$. Тогда:*

- (i) *функция ψ является интерполяционным параметром;*
- (ii) *для произвольного $s \in \mathbb{R}$ справедливо равенство пространств с точностью до эквивалентности норм в них:*

$$\bigl[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n), H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n)\bigr]_\psi = H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n).$$

4. Эллиптическая система в уточненной шкале

Следуя [1, п. 1.1], обозначим через $\Psi^r(\mathbb{R}^n)$, где $r \in \mathbb{R}$, класс всех ПДО G в $\mathbb{R}^n$ (не обязательно классических) таких, что их символ $g(x,\xi)$ является комплексно значной бесконечно дифференцируемой функцией, удовлетворяющей условию вида (1.2): для произвольных мультииндексов α, β существует число $c_{\alpha,\beta} > 0$ такое, что

$$|\,\partial_x^\alpha\,\partial_\xi^\beta\,g(x,\xi)\,| \leq \,c_{\alpha,\beta}\,\langle\xi\rangle^{r-|\beta|} \quad \text{для любых} \quad x,\xi \in \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, $A_{j,k} \in \Psi^{l_j+m_k}(\mathbb{R}^n)$. Положим

$$\Psi^{-\infty}(\mathbb{R}^n) := \bigcap_{r\in\mathbb{R}} \Psi^r(\mathbb{R}^n).$$

Лемма 4.1. *Пусть G — ПДО класса $\Psi^r(\mathbb{R}^n)$, где $r \in \mathbb{R}$. Тогда сужение отображения $u \mapsto Gu$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, на пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ является линейным ограниченным оператором*

$$G : H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \to H^{s-r,\varphi}(\mathbb{R}^n) \tag{4.1}$$

для любых $s \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathcal{M}$.

Доказательство. В соболевском случае $\varphi \equiv 1$ эта лемма хорошо известна [1, теорема 1.1.2], [4, теорема 18.1.13]. Выберем произвольные $s \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathcal{M}$. Рассмотрим линейные ограниченные операторы

$$G : H^{s\mp1}(\mathbb{R}^n) \to H^{s\mp1-r}(\mathbb{R}^n).$$

Применим интерполяцию с функциональным параметром ψ из предложения 3.1, где полагаем $\varepsilon = \delta = 1$. В силу пункта (i) этого предложения имеем ограниченный оператор

$$G : \left[H^{s-1}(\mathbb{R}^n), H^{s+1}(\mathbb{R}^n)\right]_\psi \to \left[H^{s-1-r}(\mathbb{R}^n), H^{s+1-r}(\mathbb{R}^n)\right]_\psi.$$

Отсюда в силу пункта (ii) вытекает существование и ограниченность линейного оператора (4.1). □

Запишем систему (1.1) в матричной форме: $Au = f$. Здесь $A := (A_{j,k})_{j,k=1}^p$ — матричный ПДО, а $u = \mathrm{col}\,(u_1, \ldots, u_p)$, $f = \mathrm{col}\,(f_1, \ldots, f_p)$ — функциональные столбцы. Поскольку $A_{j,k} \in \Psi^{l_j+m_k}(\mathbb{R}^n)$, согласно лемме 4.1 имеем ограниченный оператор

$$A : \bigoplus_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\varphi}(\mathbb{R}^n) \to \bigoplus_{j=1}^{p} H^{s-l_j,\varphi}(\mathbb{R}^n) \tag{4.2}$$

для любых $s \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathcal{M}$. Найдем априорную оценку решения уравнения $Au = f$ для оператора (4.2).

Поскольку система (1.1) равномерно эллиптическая в $\mathbb{R}^n$, для матричного ПДО A существует параметрикс B, т. е. справедливо следующее утверждение [1, п. 3.2.b].

Предложение 4.1. *Существует матричный классичесский ПДО $B = (B_{k,j})_{k,j=1}^p$ такой, что $B_{k,j} \in \Psi^{-m_k-l_j}(\mathbb{R}^n)$ и*

$$BA = I + T_1, \quad AB = I + T_2, \tag{4.3}$$

где $T_1 = (T_1^{j,k})_{j,k=1}^p$ *и* $T_2 = (T_2^{k,j})_{k,j=1}^p$ *— некоторые матричные ПДО, элементы которых принадлежат классу* $\Psi^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$, *а* I *— тождественный оператор в* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 4.1. *Пусть* $s \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ *и* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Существует число* $c = c(s, \sigma, \varphi) > 0$ *такое, что для произвольных вектор-функций*

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{col}\,(u_1, \ldots, u_p) \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\,\varphi}(\mathbb{R}^n), \\ f &= \mathrm{col}\,(f_1, \ldots, f_p) \ \in \bigoplus_{j=1}^{p} H^{s-l_j,\,\varphi}(\mathbb{R}^n), \end{aligned} \tag{4.4}$$

удовлетворяющих уравнению $Au = f$ *в* $\mathbb{R}^n$, *справедлива априорная оценка*

$$\begin{aligned} \Bigl(\sum_{k=1}^{p} \|u_k\|^2_{s+m_k,\varphi} \Bigr)^{1/2} &\leq c \Bigl(\sum_{j=1}^{p} \|f_j\|^2_{s-l_j,\varphi} \Bigr)^{1/2} \\ &\quad + c \Bigl(\sum_{k=1}^{p} \|u_k\|^2_{s+m_k-\sigma,\varphi} \Bigr)^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Доказательство. Обозначим через $\|\cdot\|'_{s,\varphi}$, $\|\cdot\|''_{s,\varphi}$ и $\|\cdot\|'_{s-\sigma,\varphi}$ соответственно нормы в пространствах

$$\bigoplus_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\,\varphi}(\mathbb{R}^n), \quad \bigoplus_{j=1}^{p} H^{s-l_j,\,\varphi}(\mathbb{R}^n) \quad \text{и} \quad \bigoplus_{k=1}^{p} H^{s+m_k-\sigma,\,\varphi}(\mathbb{R}^n).$$

Пусть вектор-функции (4.4) удовлетворяют уравнению $Au = f$ в $\mathbb{R}^n$. В силу первого равенства в (4.3) запишем $u = Bf - T_1 u$. Отсюда следует оценка (4.5):

$$\|u\|'_{s,\varphi} = \|Bf - T_1 u\|'_{s,\varphi} \leq \|Bf\|'_{s,\varphi} + \|T_1 u\|'_{s,\varphi} \leq c\,\|f\|''_{s,\varphi} + c\,\|u\|'_{s-\sigma,\varphi}.$$

Здесь c — максимум норм операторов

$$B : \bigoplus_{j=1}^{p} H^{s-l_j,\,\varphi}(\mathbb{R}^n) \to \bigoplus_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\,\varphi}(\mathbb{R}^n), \tag{4.6}$$

$$T_1 : \bigoplus_{k=1}^{p} H^{s+m_k-\sigma,\,\varphi}(\mathbb{R}^n) \to \bigoplus_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\,\varphi}(\mathbb{R}^n). \tag{4.7}$$

Эти операторы ограниченные в силу леммы 4.1 и предложения 4.1. □

5. Гладкость решения эллиптической системы

Предположим, что правая часть уравнения $Au = f$ имеет некоторую внутреннюю гладкость в уточненной шкале на заданном открытом непустом множестве $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Изучим внутреннюю гладкость решения u на этом множестве. Рассмотрим сначала случай, когда $V = \mathbb{R}^n$. Обозначим через $H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ объединение всех пространств $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, где $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. В линейном пространстве $H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ вводится топология индуктивного предела.

Теорема 5.1. *Предположим, что вектор-функция $u \in (H^{-\infty}(\mathbb{R}^n))^p$ является решением уравнения $Au = f$ в $\mathbb{R}^n$, где*

$$f_j \in H^{s-l_j,\varphi}(\mathbb{R}^n) \quad \text{при} \quad j = 1, \dots, p$$

для некоторых параметров $s \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathcal{M}$. Тогда

$$u_k \in H^{s+m_k,\varphi}(\mathbb{R}^n) \quad \text{при} \quad k = 1, \dots, p.$$

Доказательство. В силу вложений (2.1), для вектор-функции $u \in (H^{-\infty}(\mathbb{R}^n))^p$ существует число $\sigma > 0$ такое, что

$$u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{s+m_k-\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n). \tag{5.1}$$

Отсюда и из условия теоремы получаем на основании формул (4.3), (4.6), (4.7) требуемое свойство:

$$u = BAu - T_1 u = Bf - T_1 u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\varphi}(\mathbb{R}^n). \qquad \square$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда V — произвольное открытое непустое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Положим

$$H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{int}}(V) := \bigl\{ w \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) : \chi w \in H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n) \\ \forall\, \chi \in C^{\infty}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n),\ \operatorname{supp}\chi \subset V,\ \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\chi, \partial V) > 0 \bigr\}.$$

Здесь $\sigma \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$, а $C^{\infty}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций, у которых любая частная производная ограничена в $\mathbb{R}^n$. Топология в пространстве $H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{int}}(V)$ задается полунормами $w \mapsto \|\chi w\|_{H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n)}$, где функции χ те же, что и в определении этого пространства.

Теорема 5.2. *Предположим, что вектор-функция* $u \in (H^{-\infty}(\mathbb{R}^n))^p$ *является решением уравнения* $Au = f$ *на множестве* V*, где*

$$f_j \in H^{s-l_j,\varphi}_{\mathrm{int}}(V) \quad \textit{при} \quad j = 1, \dots, p \tag{5.2}$$

для некоторых парметров $s \in \mathbb{R}$ *и* $\varphi \in \mathcal{M}$*. Тогда*

$$u_k \in H^{s+m_k,\varphi}_{\mathrm{int}}(V) \quad \textit{при} \quad k = 1, \dots, p. \tag{5.3}$$

Доказательство. Покажем сначала, что из условия (5.2) вытекает следующее свойство повышения внутренней гладкости решения уравнения $Au = f$: для каждого числа $r \geq 1$ справедлива импликация

$$u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{s-r+m_k,\varphi}_{\mathrm{int}}(V) \ \Rightarrow \ u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{s-r+1+m_k,\varphi}_{\mathrm{int}}(V). \tag{5.4}$$

Произвольно выберем функцию $\chi \in C^{\infty}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$ такую, что

$$\operatorname{supp}\chi \subset V \quad \text{и} \quad \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\chi, \partial V) > 0. \tag{5.5}$$

Для нее существует функция $\eta \in C^{\infty}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\operatorname{supp}\eta \subset V, \ \ \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\eta, \partial V) > 0, \ \ \eta = 1 \text{ в окрестности } \operatorname{supp}\chi. \tag{5.6}$$

Действительно, мы можем определить указанную функцию с помощью операции свертки $\eta := \chi_{2\varepsilon} * \omega_{\varepsilon}$, где $\varepsilon := \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\chi, \partial V)/4$, $\chi_{2\varepsilon}$ — индикатор 2ε-окрестности множества $\operatorname{supp}\chi$, а функция $\omega_{\varepsilon} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям

$$\omega_{\varepsilon} \geq 0, \quad \operatorname{supp}\omega_{\varepsilon} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \varepsilon\}, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_{\varepsilon}(x)\, dx = 1.$$

Непосредственно проверяется, что такая функция η принадлежит классу $C^{\infty}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$ и имеет следующее свойство: $\eta \equiv 1$ в ε-окрестности множества $\operatorname{supp}\chi$ и $\eta \equiv 0$ вне 3ε-окрестности этого же множества, т. е. η удовлетворяет условиям (5.6).

Переставив матричный ПДО A и оператор умножения на функцию χ, запишем

$$\begin{aligned} A\chi u = A\chi\eta u &= \chi\, A\eta u + A'\eta u \\ &= \chi\, Au + \chi\, A(\eta - 1)u + A'\eta u \\ &= \chi f + \chi\, A(\eta - 1)u + A'\eta u \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Здесь матричный ПДО $A' = (\,A'_{j,k}\,)_{j,k=1}^{p}$ — коммутатор ПДО A и оператора умножения на функцию χ. Поскольку $A'_{j,k} \in \Psi^{l_j+m_k-1}(\mathbb{R}^n)$, то в силу леммы 4.1 имеем ограниченный оператор

$$A' : \bigoplus_{k=1}^{p} H^{s-r+m_k,\,\varphi}(\mathbb{R}^n) \to \bigoplus_{j=1}^{p} H^{s-r+1-l_j,\,\varphi}(\mathbb{R}^n).$$

Следовательно,

$$u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{s-r+m_k,\,\varphi}_{\mathrm{int}}(V) \;\Rightarrow\; A'\eta u \in \bigoplus_{j=1}^{p} H^{s-r+1-l_j,\,\varphi}(\mathbb{R}^n). \qquad (5.8)$$

Далее, согласно условию (5.2) и ввиду неравенства $r \geq 1$ имеем

$$\chi f \in \bigoplus_{j=1}^{p} H^{s-l_j,\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \bigoplus_{j=1}^{p} H^{s-r+1-l_j,\varphi}(\mathbb{R}^n). \qquad (5.9)$$

Кроме того, так как носители функций χ и $\eta-1$ не пересекаются, то ПДО

$$\chi A_{j,k}(\eta-1) \in \Psi^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$$

для всех $j,k = 1,\dots,p$. Это сразу следует из формулы для символа композиции двух ПДО: $\chi A_{j,k}$ и оператора умножения на функцию $\eta-1$ (см. [1, п. 1.2.d]). Отсюда, поскольку для вектор-функции $u \in (H^{-\infty}(\mathbb{R}^n))^p$ справедливо (5.1) при некотором $\sigma > 0$, мы получаем в силу леммы 1 включение

$$\chi\, A(\eta-1)u \in \bigoplus_{j=1}^{p} H^{s-r+1-l_j,\varphi}(\mathbb{R}^n). \qquad (5.10)$$

На основании формул (5.7) – (5.10) и теоремы 5.1 получаем, что

$$u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{s-r+m_k,\,\varphi}_{\mathrm{int}}(V) \;\Rightarrow\; A\chi u \in \bigoplus_{j=1}^{p} H^{s-r+1-l_j,\varphi}(\mathbb{R}^n)$$
$$\Rightarrow\; \chi u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{s-r+1+m_k,\,\varphi}(\mathbb{R}^n).$$

Тем самым доказано (5.4) ввиду произвольности выбора функции $\chi \in C^{\infty}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей условию (5.5).

Теперь с помощью (5.4) легко вывести свойство (5.3). Можно считать, что в формуле (5.1) число $\sigma > 0$ целое. Значит,

$$u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{s-\sigma+m_k,\,\varphi}_{\mathrm{int}}(V).$$

Применив импликацию (5.4) последовательно для $r = \sigma$, $\sigma - 1, \ldots, 1$, выводим свойство (5.3):

$$u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{s-\sigma+m_k,\,\varphi}_{\mathrm{int}}(V) \;\Rightarrow\; u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{s-\sigma+1+m_k,\,\varphi}_{\mathrm{int}}(V) \;\Rightarrow\; \ldots \Rightarrow\; u \in \bigoplus_{k=1}^{p} H^{s+m_k,\,\varphi}_{\mathrm{int}}(V).$$

□

Теорема 5.2 уточняет применительно к шкале пространств $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ известные утверждения о повышении внутренней гладкости решений эллиптических уравнений в соболевской шкале (см., например, [7, п. 10.6], [29, гл. III, § 4]). Как видим, уточненная гладкость φ правой части эллиптического уравнения наследуется его решением.

Замечание 5.1. Следует различать *внутреннюю* и *локальную* гладкость на открытом множестве $V \subset \mathbb{R}^n$. Пространство распределений, имеющих данную локальную гладкость на этом множестве, определяется следующим образом:

$$H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(V) := \bigl\{ w \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) : \chi\, w \in H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^n) \quad \forall\, \chi \in C^{\infty}_{0}(\mathbb{R}^n),\, \operatorname{supp}\chi \subset V \bigr\}.$$

В случае, когда множество V ограничено, пространства $H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{int}}(V)$ и $H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(V)$ совпадают. Если же V неограничено, то может быть строгое включение $H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{int}}(V) \subset H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(V)$. Для локальной уточненной гладкости справедлив аналог теоремы 5.2; в ее формулировке следует лишь заменить int на loc в обозначениях пространств. Он легко выводится из этой теоремы.

6. Приложение

Теорема 5.2 позволяет установить наличие непрерывных производных у выбранной компоненты u_k решения системы (1.1). При этом используется следующий результат, уточняющий классическую теорему вложения Соболева. Обозначим через $C^{r}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$, где целое число $r \geq 0$, банахово пространство всех функций $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, имеющих непрерывные и ограниченные в $\mathbb{R}^n$ частные производные до порядка r включительно.

Предложение 6.1. *Пусть заданы функция $\varphi \in \mathcal{M}$ и целое число $r \geq 0$. Тогда неравенство*

$$\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t\,\varphi^2(t)} < \infty \tag{6.1}$$

эквивалентно вложению $H^{r+n/2,\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^r_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$. Это вложение непрерывно.

Предложение 6.1 является следствием теоремы 2.2.7 из монографии Л. Хермандера [7].

Теорема 6.1. *Пусть заданы целые числа $k \in \{1, \ldots, p\}$, $r \geq 0$ и функция $\varphi \in \mathcal{M}$, удовлетворяющая неравенству (6.1). Предположим, что вектор-функция $u \in (H^{-\infty}(\mathbb{R}^n))^p$ является решением уравнения $Au = f$ на открытом множестве $V \subseteq \mathbb{R}^n$, где*

$$f_j \in H^{r-m_k-l_j+n/2,\varphi}_{\mathrm{int}}(V) \quad \text{для всех} \quad j = 1, \ldots, p. \tag{6.2}$$

Тогда компонента u_k решения имеет на множестве V непрерывные частные производные до порядка r включительно, причем эти производные ограничены на каждом множестве $V_0 \subset V$ таком, что $\mathrm{dist}(V_0, \partial V) > 0$. В частности, если $V = \mathbb{R}^n$, то $u_k \in C^r_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. В силу теоремы 5.2, где полагаем $s := r - m_k + n/2$, справедливо включение $u_k \in H^{r+n/2,\varphi}_{\mathrm{int}}(V)$. Пусть функция $\eta \in C^\infty_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям

$$\mathrm{supp}\,\eta \subset V, \quad \mathrm{dist}(\mathrm{supp}\,\eta, \partial V) > 0, \quad \eta = 1 \text{ в окрестности } V_0.$$

Эта функция строится так же, как и в доказательстве теоремы 5.2, если заменить в нем множество $\mathrm{supp}\,\chi$ на V_0. Для распределения ηu_k в силу предложения 6.1 имеем

$$\eta u_k \in H^{r+n/2,\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^r_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n).$$

Отсюда вытекает, что все частные производные функции u_k до порядка r включительно непрерывны и ограничены в некоторой окрестности множества V_0. Тогда эти производные непрерывны и на множестве V, поскольку можно взять $V_0 := \{x_0\}$ для любой точки $x_0 \in V$. □

Замечание 6.1. Если использовать теорему 6.1 лишь для шкалы пространств Соболева, то придется вместо (6.2) потребовать, чтобы для некоторого числа $\varepsilon > 0$ выполнялось условие

$$f_j \in H^{r-m_k-l_j+n/2+\varepsilon,1}_{\mathrm{int}}(V) \quad \text{для всех} \quad j = 1, \dots, p.$$

Оно завышает основную гладкость правых частей системы (1.1), что существенно огрубляет результат.

Литература

[1] M. S. Agranovich, *Elliptic operators on closed manifolds* // Encycl. Math. Sci., vol. **63**, Partial differential equations. VI, Berlin: Springer-Verlag, 1994, 1–130.

[2] A. Douglis, L. Nirenberg, *Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations* // Commun. Pure Appl. Math. **8** (1955), N 4, 503–538.

[3] L. Hörmander, *Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems* // Ann. Math. **83** (1966), N 1, 129–209. (Имеется перевод в кн. *Псевдодифференциальные операторы*, Москва: Мир, 1967, 166– 296.)

[4] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. III: Pseudo-Differential Operators*, Berlin: Springer-Verlag, 1985, 525 p. (Имеется перевод: Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 3, Москва: Мир, 1987, 696 с.)

[5] М. А. Шубин, *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория*, Москва: Наука, 1978, 280 с.

[6] B. Helffer, *Théorie spectrale pour des opérateurs globalement elliptiques* // Astérisque. **112** (1984), 3–197.

[7] L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*, Berlin: Springer-Verlag, 1963, 285 p. (Имеется перевод: Л. Хермандер, *Линейные дифференциальные операторы с частными производными*, Москва: Мир, 1965, 380 с.)

[8] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. II: Differential Operators with Constant Coefficients*, Berlin: Springer-Verlag, 1983, 391 p. (Имеется перевод: Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 2, Москва: Мир, 1986, 456 с.)

[9] Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях, *Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения* // Успехи мат. наук. **20** (1965), N 1, 3–74.

[10] B. Paneah, *The Oblique Derivative Problem. The Poincaré Problem*, Berlin: Wiley–VCH, 2000, 348 p.

[11] G. A. Kalyabin, P. I. Lizorkin, *Spaces of functions of generalized smoothness* // Math. Nachr. **133** (1987), 7–32.

[12] W. Farkas, H.-G. Leopold, *Characterisations of function spaces of generalised smoothness* // Ann. Mat. Pura Appl. **185** (2006), N 1, 1–62.

[13] G. Slenzak, *Ellptic problems in a refined scale of spaces* // Moscow Univ. Math. Bull. **29** (1974), N 3–4, 80–88.

[14] V. A. Mikhailets, A. A. Murach, *Improved scales of spaces and elliptic boundary-value problems. I* // Ukrainian. Math. J. **58** (2006), N 2, 244–262.

[15] V. A. Mikhailets, A. A. Murach, *Improved scales of spaces and elliptic boundary-value problems. II* // Ibid. **58** (2006), N 3, 398–417.

[16] V. A. Mikhailets, A. A. Murach, *Refined scales of spaces and elliptic boundary-value problems. III* // Ibid. **59** (2007), N 5, 744–765.

[17] V. A. Mikhailets, A. A. Murach, *Regular elliptic boundary-value problem for homogeneous equation in two-sided refined scale of spaces* // Ibid. **58** (2006), N 11, 1748–1767.

[18] V. A. Mikhailets, A. A. Murach, *Elliptic operator with homogeneous regular boundary conditions in two-sided refined scale of spaces* // Ukrainian Math. Bull. **3** (2006), N 4, 529–560.

[19] А. А. Мурач, *Эллиптические по Петровскому системы дифференциальных уравнений в уточненной шкале пространств на замкнутом многообразии* // Доповіді НАН України. Математика, природознавство, техн. науки. (2007), N 5, 29–35.

[20] А. А. Мурач, *Крайова задача для еліптичної за Петровським системи диференціальних рівнянь в уточненій шкалі просторів* // Доповіді НАН України. Математика, природознавство, техн. науки. (2007), N 6, 24–31.

[21] A. A. Murach, *Elliptic pseudo-differential operators in a refined scale of spaces on a closed manifold* // Ukrainian Math. J. **59** (2007), N 6, 874–893.

[22] V. A. Mikhailets, A. A. Murach, *Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces* // Methods Funct. Anal. Topology. **14** (2008), N 1, 81–100.

[23] A. A. Murach, *Douglis-Nirenberg elliptic systems in the refined scale of spaces on a closed manifold* // Ibid. **14** (2008), N 2, 142–158.

[24] В. А. Михайлец, А. А. Мурач, *Эллиптическая краевая задача в двусторонней уточненной шкале пространств* // Укр. мат. журн. **60** (2008), N 4, 497–520.

[25] E. Seneta, *Regularly Varying Functions*, Berlin: Springer-Verlag, 1976, 112 p. (Имеется перевод: Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Москва: Наука, 1985, 142 с.)

[26] J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications*, vol. 1, Paris: Dunod, 1968, 372 p. (Имеется перевод: Ж.-Л. Лионс, Э Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Москва: Мир, 1971, 372 с.)

[27] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation Spaces*, Berlin: Springer-Verlag, 1976, 207 p. (Имеется перевод: Й. Берг, Й. Лёфстрём, *Интерполяционные пространства. Введение*, Москва: Мир, 1980, 264 с.)

[28] C. Merucci, *Application of interpolation with a function parameter to Lorentz, Sobolev and Besov spaces* // Proc. Lund Conf. 1983, Lecture Notes in Math. **1070**, Berlin: Springer-Verlag, 1984, 183–201.

[29] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Киев: Наукова думка, 1965, 800 с.

Сведения об авторах

Александр Александрович Мурач

Институт математики НАН Украины,
ул. Терещенкивська 3,
01601, Киев,
Украина;
Черниговский государственный технологический университет,
ул. Шевченка, 95,
14027, Чернигов,
Украина
E-Mail: murach@imath.kiev.ua