Український математичний вісник
Том 5 **(2008)**, № 3, 336 – 349

Расслоение решений стохастических уравнений Ито параболического типа с экспоненциальными нелинейностями

Сергей А. Мельник

(*Представлена С. Я. Махно*)

Аннотация. В работе получены условия, при которых обобщенное решение задачи Коши для стохастического уравнения Ито параболического типа с экспоненциальными нелинейностями допускает расслоение.

2000 MSC. 60F10, 62F05.

Ключевые слова и фразы. Стохастическое уравнение в частных производных, амплитуда, фронт, расслоение.

1. Определения, обозначения, постановка задачи

На полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ рассмотрим следующую задачу Коши в $\mathbb{R}^1$

$$\begin{gathered} du(t,x) = a(e^{u(t,x)})_{xx}\,dt + be^{\gamma u(t,x)}\,dw(t), \\ t \in [0;\tau), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad u(0,x) = u_0(x). \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь: $w(t)$ — стандартный винеровский процесс со значениями в $\mathbb{R}^1$, согласованный с потоком σ-алгебр $\{F_t\}, t \geq 0$; a, γ — положительные числа; τ — марковский момент остановки, согласованный с потоком σ-алгебр $\{F_t\},\ t \geq 0$; $u_0(x)$ — неслучайная неотрицательная функция такая, что $\int u_0(x)\exp(u_0(x))\,dx < +\infty$. Буквенный индекс, стоящий внизу возле знака функции, означает взятие частной производной по соответствующей переменной.

Задача (1.1) рассматривается на случайном отрезке времени. Это вызвано тем, что при различных сочетаниях параметров решение задачи (1.1) может существовать как бесконечно долго, так и "взрываться". Определение решения задачи (1.1) на случайном отрезке времени $[0;\tau)$ дадим следуя аналогичному определению для обыкновенных

Статья поступила в редакцию 23.09.2008

ISSN 1810 – 3200.

стохастических дифференциальных уравнений, сформулированному в [1, с. 246]. Под решением задачи (1.1) будем понимать случайный процесс $u(t,x)$, подчиненный потоку σ-алгебр $\{F_t\}$, $t \geq 0$, и удовлетворяющий уравнению (1.1) в смысле определения 2.1 [2, с. 104], т.е.

$$\int u(t,x)g(x)\,dx - \int u(0,x)g(x)\,dx$$
$$= -a\int\limits_0^{t\wedge\tau}\int (e^{u(s,x)})_x g_x(x)\,dx\,ds + b\int\limits_0^{t\wedge\tau}\int e^{\gamma u(s,x)}g(x)\,dx\,dw(s)$$

при каждом $t \in [0;+\infty)$ для любой $g \in W_2^1(\mathbb{R}^1)$ с вероятностью 1.

В работе используются следующие обозначения:

$$\mathbf{W} = W_2^1(\mathbb{R}^1)\bigcap L_{\gamma+1}(\mathbb{R}^1)\bigcap L_1(\mathbb{R}^1),$$
$$p = \|v\|_1^1 = \int v(y)\,dy, \qquad q = \|v\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} = \int |v(y)|^{\gamma+1}\,dy,$$
$$z = \|v_y\|_2^2 = \int |v_y(y)|^2 dy, \qquad l = \int v(y)\ln v(y)\,dy,$$
$$\Lambda = (\frac{B(\gamma+1)p}{bq})^{1/\gamma}, \qquad y_0 = \min\{y>0 : v(y)=0\}.$$

Определение 1.1. *Говорят, что процесс $U(t,x)$ допускает расслоение, если он может быть представлен в виде: $U(t,x)=r(t)v(xr^m(t))$, где $r(t)$ — случайный процесс, который с вероятностью 1 принимает неотрицательные значения, $m \in \mathbb{R}^1$, $v \in$ $\boldsymbol{W}$. Процесс $r(t)$ называют амплитудой, а функцию $v(y)$ пространственной формой процесса $U(t,x)$. Процесс $x_0(t) = \min\{x > 0 : v(xr^m(t)) = 0\}$ называется точкой фронта процесса $U(t,x)$.*

Замечание 1.1. В данной работе за основу принят подход к изучению нелинейных уравнений в частных производных, предложенный в работе [3]. Структура уравнения (1.1) такова, что удобнее строить расслоение не самого решения $u(t,x)$, а процесса $U(t,x) = \exp(u(t,x))$.

Замечание 1.2. В теории детерминированных уравнений в частных производных параболического типа большую роль играют решения, пространственная форма которых является дифференцируемой в нуле четной неотрицательной функцией, убывающей на положительной полуоси [4, с. 173–174]. В данной работе рассматриваются решения с аналогичными свойствами.

Постановка задачи. Пусть исходные данные задачи (1.1) удовлетворяют перечисленным выше ограничениям. Выясним, при каких условиях процесс $U(t,x)$ допускает расслоение, а также построим уравнения, которым удовлетворяют его амплитуда и пространственная форма.

2. Основные результаты

Теорема 2.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. $a > 0,\ A < 0,\ bB > 0,\ \gamma > 0.$
2. $r(t)$ *является решением задачи*

$$dr(t) = (Ar^4(t) + 0.5B^2r^{2\gamma+1}(t))\,dt + Br^{\gamma+1}(t)\,dw(t),\qquad r(0) = r_0 > 0. \tag{2.1}$$

3. $v(y)$ *является решением задачи*

$$\begin{gathered} v_{yy} = \frac{A}{a}\Lambda^{2\gamma+3}q^{3/\gamma}\Big(1 + \frac{3(\gamma+1)p}{\gamma q}v^{\gamma}\Big), \quad y \in (-y_0; y_0), \\ v(-y) = v(y), \quad v_y(0) = 0, \quad v(0) = v_0 > 0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

4. $u_0(x) = \ln[r_0\Lambda v(xr_0\Lambda^{\gamma+1}q)]$ *при* $x \in (-\frac{y_0}{r_0q}\Lambda^{-\gamma-1}; \frac{y_0}{r_0q}\Lambda^{-\gamma-1})$.

Тогда решение задачи (1.1) *допускает представление следующего вида*

$$u(t,x)=\ln[r(t)\Lambda v(xr(t)\Lambda^{\gamma+1}q)] \quad \text{при} \quad x\in\Big(-\frac{y_0}{r(t)q}\Lambda^{-\gamma-1}; \frac{y_0}{r(t)q}\Lambda^{-\gamma-1}\Big).$$

3. Вспомогательные результаты

В данном разделе предполагаются выполненными условия теоремы 2.1.

Замечание 3.1. Согласно теореме 6 [1, с. 246] для любых действительных чисел A и B существует момент остановки τ такой, что $\mathbf{P}\{\tau > 0\} = 1$ и решение уравнения (2.1) существует и единственно при $t \in [0;\tau)$. Кроме того, как показано в [5, теорема 4.35, теорема 4.37], существует единственное неотрицательное решение задачи (2.1). Поэтому степенные выражения в уравнении (2.1) определены.

Докажем существование и единственность решения задачи (2.2) и изучим его свойства.

Лемма 3.1. *Существует число $Y_0 > 0$ такое, что задача*

$$V_{YY}(Y) + \frac{3(\gamma+1)}{\gamma} V^{\gamma}(Y) + 1 = 0,$$
$$Y \in [0; Y_0], \quad V(0) = V_0 > 0, \quad V_Y(0) = 0, \tag{3.1}$$

имеет единственное неотрицательное решение, обладающее следующими свойствами:

1. *Точка Y_0 является точкой фронта решения, т.е.*

$$Y_0 = \min\{Y > 0 : V(Y) = 0\}.$$

2. *Решение $V(Y)$ является выпуклой вверх функцией при $Y \in [0; Y_0)$.*

Доказательство. Наряду с задачей (3.1) рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$V_{YY}(Y) + \frac{3(\gamma+1)}{\gamma} |V(Y)|^{\gamma-1} V(Y) + 1 = 0,$$
$$Y \in [0; +\infty), \quad V(0) = V_0 > 0, \quad V_Y(0) = 0.$$

Поскольку функция $3(\gamma+1)|V(Y)|^{\gamma-1}V(Y) + \gamma$ является непрерывной, то согласно [6, с. 89] существует, по крайней мере, одно решение вспомогательной задачи и всякое такое решение является непрерывной функцией. Обозначим $Y_0 = \min\{Y > 0 : V(Y) = 0\}$. Так как $V(0) = V_0 > 0$, то всякое решение либо строго положительно при всех $Y \geq 0$ и $Y_0 = +\infty$, либо существует число, являющееся точкой фронта решения, т.е. $Y_0 < +\infty$. Функция $3(\gamma+1)|V(Y)|^{\gamma-1}V(Y) + \gamma$ является локально липшицевой на множестве $V \in (0; V_0]$. Значит, согласно [6, с. 89] при $Y \in [0; Y_0)$ вспомогательная задача имеет единственное решение, которое принимает положительные значения на указанном множестве. Но при $Y \in [0; Y_0)$ вспомогательная задача и задача (3.1) совпадают. Значит, задача (3.1) имеет единственное неотрицательное решение. Покажем, что решение задачи (3.1) имеет конечную точку фронта. Понизив порядок уравнения (3.1), получим задачу

$$V_Y = -\sqrt{C_0 - \frac{3}{\gamma} V^{\gamma+1} - V}, \qquad Y \geq 0, \quad V(0) = V_0, \tag{3.2}$$

где $C_0 = \frac{3}{\gamma}V_0^{\gamma+1} + V_0 > 0$. Поскольку $C_0 - \frac{3}{\gamma}V^{\gamma+1} + V > 0$ при $V \in [0; V_0)$, то $V_Y(Y) < 0$ при $Y \in (0; Y_0)$, причем $\lim_{Y\to Y_0} V_Y(Y) = -\sqrt{C_0} < 0$. Это означает, что решение задачи (3.1) имеет конечную точку фронта и является положительной слева от неё. Определим тип выпуклости функции $V(Y)$. Из уравнения (3.1) следует, что $V_{YY} < 0$ при $Y \in [0; Y_0]$. Лемма 3.1 доказана. □

Лемма 3.2. *Если $a > 0,\ A < 0,\ Bb > 0,\ \gamma > 0,\ v_0 > 0$, то существует число $y_0 > 0$ такое, что задача*

$$\begin{gathered} v_{yy}(y) = \frac{A}{a}q^{3/\gamma}\Big[\frac{3(\gamma+1)p}{\gamma q}v^{\gamma}(y) + 1\Big], \\ y \in [0; y_0], \quad v(0) = v_0, \quad v_y(0) = 0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

имеет единственное неотрицательное решение с точкой фронта y_0 и выпуклое вверх при $y \in [0; y_0]$.

Доказательство. Воспользуемся методом, изложенным в [3]. Рассмотрим функционал $\zeta(v) = Apq^{3/\gamma} + 0.5az$. Прежде всего отметим, что $\nabla\zeta(v) = Aq^{3/\gamma}[\frac{3(\gamma+1)p}{\gamma q}v^{\gamma}(y) + 1] - av_{yy}(y)$, т.е. критические точки функционала $\zeta(v)$ являются решениями уравнения (3.3). В качестве нормирующего функционала выберем $E(s, v) = E(v) = p/q$. Отметим, что $\nabla E(v) = 1/q - (\gamma+1)pv^{\gamma}/q^2$ и $\langle\nabla E(v), v\rangle = -\gamma p/q \neq 0$, т.е. выполнено условие (5.1) из [3]. Обозначим $S = \{v \in \mathbf{W} : p/q = 1\}$. Положим $v(y) = \rho\bar{v}(y)$, где $\rho \geq 0,\ \bar{v} \in S$. Тогда, $\zeta(\rho\bar{v}) = A\rho^{(4\gamma+3)/\gamma}\bar{p}\bar{q}^{3/\gamma} + 0.5a\rho^2\bar{z}$. Покажем, что выполнено условие реализуемости расслоения (2.1) [3]

$$\zeta_\rho(\rho\bar{v}) = \frac{4\gamma+3}{\gamma}A\rho^{3(\gamma+1)/\gamma}\bar{p}\bar{q}^{3/\gamma} + a\rho\bar{z} = 0.$$

Так как $a > 0,\ A < 0$, то уравнение имеет единственный положительный корень $\rho_0 = (-\frac{a\gamma\bar{z}}{A(4\gamma+3)\bar{p}\bar{q}^{3/\gamma}})^{\gamma/(2\gamma+3)}$, являющийся точкой максимума функции $\zeta(\rho\bar{v})$ как функции от ρ. Тогда

$$\hat{\zeta}(\bar{v}) = \max_{\rho>0}\zeta(\rho\bar{v}) = \hat{C}\Big(\frac{\bar{z}^{(4\gamma+3)/(2\gamma)}}{\bar{p}\bar{q}^{3/\gamma}}\Big)^{2\gamma/(2\gamma+3)},$$

где $\hat{C} = \frac{a(2\gamma+3)}{2(4\gamma+3)}(-\frac{a\gamma}{A(4\gamma+3)})^{2\gamma/(4\gamma+3)}$. Докажем, что функционал $\hat{\zeta}(\bar{v})$ имеет условно стационарную точку на S. Функция Лагранжа имеет вид: $\mathcal{L}(\bar{v}, \alpha) = \hat{\zeta}(\bar{v}) - \alpha(\bar{q}/\bar{p} - 1)$. Точки, подозрительные на экстремум, находим из уравнения

$$\mathcal{L}_{\bar{v}}(\bar{v},\alpha) = -\frac{2}{2\gamma+3}\bar{C}(\bar{z}^{4\gamma+3}\bar{p}^{-4\gamma-3}\bar{q}^{-6})^{1/(2\gamma+3)} \times \Big[(4\gamma+3)\frac{\bar{p}}{\bar{z}}\bar{v}_{yy} + 3(\gamma+1)\frac{\bar{p}}{\bar{q}}\bar{v}^{\gamma} + \gamma\Big] - \alpha\Big(\frac{1}{\bar{q}} - (\gamma+1)\frac{\bar{p}}{\bar{q}^2}\bar{v}^{\gamma}\Big) = 0$$

при условии $\bar{q} = \bar{p}$. Умножив уравнение на $\bar{v}(y)$ и проинтегрировав по y, получим: $\alpha\gamma\bar{p}/\bar{q} = 0$, т.е. $\alpha = 0$. Тогда, уравнение, с учётом условия, принимает вид:

$$(4\gamma+3)\frac{\bar{p}}{\bar{z}}\bar{v}_{yy} + 3(\gamma+1)\bar{v}^{\gamma} + \gamma = 0. \tag{3.4}$$

Добавив начальные условия $\bar{v}_y(0) = 0$, $\bar{v}(0) = \bar{v}_0 > 0$, получим задачу Коши для функции $\bar{v}(y)$. Произведём замены: $Y = \sqrt{\frac{\gamma\bar{z}}{(4\gamma+3)\bar{p}}}y$, $V(Y) = \bar{v}(y)$. Для функции $V(Y)$ получаем задачу (3.1). Согласно лемме 3.1 функция $V(Y)$ является единственным неотрицательным решением задачи (3.1), имеет конечную точку фронта и выпукла вверх при $Y \in [0; Y_0]$. Тогда, функция $v(y) = \rho_0 V(Y)$ является единственным неотрицательным решением задачи (3.3), которое имеет конечную точку фронта y_0, и выпукла вверх при $y \in [0; y_0]$. Лемма 3.2 доказана. □

Лемма 3.3. *Если* $a > 0$, $A < 0$, $Bb > 0$, $\gamma > 0$*, то задача* (2.2) *имеет единственное неотрицательное решение, которое имеет конечную точку фронта, и является выпуклой вверх функцией всюду, где она положительна.*

Доказательство. Вначале рассмотрим задачу (2.2) на множестве $y \in [0; y_0)$. В уравнении (2.2) произведём замену переменных: $y = B(\gamma + 1)p\tilde{y}/q$, $v(y) = \tilde{v}(\tilde{y})$. Тогда, функция $\tilde{v}(\tilde{y})$ удовлетворяет уравнению и условиям задачи (3.3). В силу леммы 3.2 функция $\tilde{v}(\tilde{y})$ существует, единственна и обладает необходимыми свойствами. Продолжив построенную функцию симметричным образом на интервал $y \in (-y_0; 0)$, получим решение задачи (2.2) с необходимыми свойствами. Лемма 3.3 доказана. □

Лемма 3.4. *Если* $V(Y)$ *— решение задачи* (3.1)*, то справедливы следующие равенства:*

1. $\|V\|_1^1 = \|V\|_{\gamma+1}^{\gamma+1} = \sqrt{-\frac{A}{a}}\big(\frac{b}{B(\gamma+1)}\big)^{\frac{2\gamma+3}{2\gamma}}$.

2. $\|V_Y\|_2^2 = \frac{4\gamma+3}{\gamma}\|V\|_1^1 = \frac{4\gamma+3}{\gamma}\sqrt{-\frac{A}{a}}\left(\frac{b}{B(\gamma+1)}\right)^{\frac{2\gamma+3}{2\gamma}}$.

3. $Y_0 = \frac{5\gamma+6}{2(4\gamma+3)C_0}\|V_Y\|_2^2 = \frac{5\gamma+6}{2\gamma C_0}\sqrt{-\frac{A}{a}}\left(\frac{b}{B(\gamma+1)}\right)^{\frac{2\gamma+3}{2\gamma}}$.

Доказательство. Согласно лемме 3.2 имеет место равенство $\|\bar v\|_1^1 = \|\bar v\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}$. Но $\bar v(\tilde y) = V\big(\sqrt{\frac{\gamma\bar z}{(4\gamma+3)\bar p}}\tilde y\big)$. Значит, $\|V\|_1^1 = \|V\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}$. Поскольку $v(y) = v(B(\gamma+1)p\tilde y/b) = \tilde v(\tilde y)$, то $p = \|v\|_1^1 = B(\gamma+1)p\|\tilde v\|_1^1/b$, т.е. $\|\tilde v\|_1^1 = \frac{b}{B(\gamma+1)}$. Поскольку $\tilde v(\tilde y) = \rho_0\bar v(\tilde y)$, то $\|\tilde v\|_1^1 = (-\frac{a\gamma\bar z\bar p}{A(4\gamma+3)})^{\gamma/(2\gamma+3)}$. Значит, $\bar z\bar p = -\frac{A(4\gamma+3)}{a\gamma}(\frac{b}{B(\gamma+1)})^{(2\gamma+3)/\gamma}$. С другой стороны, из равенства $\bar v(\tilde y) = V\big(\sqrt{\frac{\gamma\bar z}{(4\gamma+3)\bar p}}\tilde y\big)$ следует, что $\bar z\bar p = \frac{4\gamma+3}{\gamma}(\|V\|_1^1)^2$. Значит, справедливо первое равенство леммы 3.4. Умножив уравнение (3.1) на $V(Y)$ и проинтегрировав, получим второе равенство леммы 3.4. Возведя равенство (3.2) в квадрат и проинтегрировав, получим равенство: $\|V\|_2^2 = 2C_0Y_0 - \frac{3+\gamma}{\gamma}\|V\|_1^1$, которое, с учетом первого и второго равенств, дает третье равенство. Лемма 3.4 доказана. $\square$

4. Доказательство теоремы 2.1

В задаче (1.1) произведём замену фазовой переменной $U(t,x) = \exp(u(t,x))$. Тогда

$$\begin{gathered} d\ln U(t,x) = aU_{xx}dt + bU^{\gamma}dw(t), \\ t\in[0;\tau), \quad x\in\mathbb{R}^1, \quad U(0,x) = \exp(u_0(x)). \end{gathered} \tag{4.1}$$

Рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} f(U) = \int U(t,x)\ln U(t,x)\,dx \\ - \int U(0,x)\ln U(0,x)\,dx + \frac{a}{2}\int_0^t \|U_x(s,\cdot)\|_2^2\,ds \\ - \frac{b}{\gamma+1}\int_0^t \|U(s,\cdot)\|_{\gamma+1}^{\gamma+1}\,dw(s). \end{aligned}$$

Он определен на пространстве $L_2([0;T)\times\Omega;\mathbf{W})$ и дифференцируем по Гато по подпространству $\mathbf{W}$ в среднем квадратическом [7, с. 118].

Его дифференциал Гато по подпространству равен

$$Df(U) = \int \ln U(t,x)g(x)\,dx - \int \ln U(0,x)g(x)\,dx + a\int_0^t \int U_x(s,x)g_x(x)\,dx\,ds - b\int_0^t \int |U(s,x)|^{\gamma-1}U(s,x)g(x)\,dx\,dw(s).$$

Здесь $g \in W_2^1(\mathbb{R}^1)$. Таким образом, критические точки функционала $f(U)$, являющиеся положительными функциями, будут являться решениями задачи (4.1), а решения задачи (1.1) могут быть получены из решений задачи (4.1) с помощью равенства $u(t,x) = \ln U(t,x)$. Докажем, что функционал $f(U)$ имеет критическую точку, допускающую расслоение. Подставим в $f(U)$ следующее выражение $U(t,x) = r(t)\phi(p,q)v(y)$, где: $y = xr(t)\psi(p,q)$, $r(t)$ — решение задачи (2.1) с некоторыми действительными A, B и положительным $r(0)$; $\phi(p,q)$ и $\psi(p,q)$ — некоторые неотрицательные дифференцируемые функции; $v(y)$ — решение задачи (2.2). Согласно замечанию 3.1 процесс $r(t)$ существует, единственен и принимает положительные значения. Согласно лемме 3.3 функция $v(y)$ может быть построена. Тогда,

$$\begin{gathered}\int U(t,x)\,dx = \frac{\phi}{\psi}p, \qquad \int |U(t,x)|^{\gamma+1}\,dx = \frac{\phi^{\gamma+1}}{\psi}qr^{\gamma}(t),\\ \int |U_x(t,x)|^2\,dx = \phi^2\psi z r^3(t), \\ \int U(t,x)\ln U(t,x)\,dx = \frac{\phi}{\psi}p\Big[\ln r(t) + \ln\phi + \frac{l}{p}\Big]\end{gathered} \tag{4.2}$$

и

$$f(U) = \frac{p\phi}{\psi}(\ln r(t) - \ln r(0)) + 0.5az\phi^2\psi\int_0^t r^3(s)\,ds - \frac{bq\phi^{\gamma+1}}{(\gamma+1)\psi}\int_0^t r^{\gamma}(s)\,dw(s).$$

Выберем $\phi(p,q) = (\frac{B(\gamma+1)p}{bq})^{1/\gamma}$. Тогда $\frac{p\phi}{\psi} = \frac{bq\phi^{\gamma+1}}{B(\gamma+1)\psi}$ и

$$f(U) = \frac{p\phi}{\psi}(\ln r(t) - \ln r(0) - B\int\limits_0^t r^\gamma(s)\,dw(s)) + 0.5az\phi^2\psi\int\limits_0^t r^3(s)\,ds.$$

Из уравнения (2.1) по формуле Ито получаем:

$$\ln r(t) - \ln r(0) - B\int\limits_0^t r^\gamma(s)\,dw(s) = A\int\limits_0^t r^3(s)\,ds.$$

Следовательно,

$$f(U) = \frac{Ap\phi}{\psi}\int\limits_0^t r^3(s)\,ds + 0.5a\int\limits_0^t \|U_x(s,\cdot)\|_2^2\,ds.$$

Если $\psi = \phi^{\gamma+1}q$, то $(\|U(s,\cdot)\|_{\gamma+1}^{\gamma+1})^{3/\gamma} = r^3(s)$ и

$$f(U) = \int\limits_0^t \left[A\|U(s,\cdot)\|_1^1\,\|U(s,\cdot)\|_{\gamma+1}^{3(\gamma+1)/\gamma} + 0.5a\|U_x(s,\cdot)\|_2^2\right]ds.$$

Вычислим дифференциал Гато функционала $f(U)$ по подпространству $\mathbf{W}$.

$$\begin{aligned} Df(U) = \int\limits_0^t\int \Big[&A\|U(s,\cdot)\|_{\gamma+1}^{3(\gamma+1)/\gamma} \\ &+ \frac{3(\gamma+1)}{\gamma}A\|U(s,\cdot)\|_1^1\,\|U(s,\cdot)\|_{\gamma+1}^{(3-\gamma)(\gamma+1)/\gamma}U^\gamma(s,x) \\ &- aU_{xx}(s,x)\Big]g(x)\,dx\,ds. \end{aligned}$$

Так как $U(s,x) = r(s)\phi v(r(s)\phi^{\gamma+1}qx)$, то

$$U_x(s,x) = r^2(s)\phi^{\gamma+2}qv_y(r(s)\phi^{\gamma+1}qx).$$

Тогда, с учетом равенств (4.2), получаем

$$\begin{aligned} Df(U) = \int\limits_0^t r^3(s)\int \Big[&A + \frac{3(\gamma+1)Ap}{\gamma q}v^\gamma(r(s)\phi^{\gamma+1}qx) \\ &- a\phi^{2\gamma+3}q^2v_{yy}(r(s)\phi^{\gamma+1}qx)\Big]g(x)\,dx\,ds. \end{aligned}$$

Так как функция $v(y)$ является решением задачи (2.2), то выражение в квадратных скобках равно нулю и $Df(U) = 0$. Значит, функция $U(t,x) = r(t)\phi v(r(t)\phi^{\gamma+1}qx)$ является решением задачи (4.1) при $|x| < y_0/(r(t)\Lambda^{\gamma+1}q)$, а функция $u(t,x) = \ln U(t,x)$ является решением задачи (1.1). Теорема 2.1 доказана.

5. Применение расслоения к изучению динамики решения задачи (1.1)

Исследуем предельное поведение процесса $u(t,x)$ при $t \to +\infty$. Согласно доказанной теореме 2.1 пространственная форма $v(y)$ и амплитуда $r(t)$ определяют решение задачи (1.1). Вначале исследуем предельное поведение процесса $r(t)$, который является решением задачи (2.1).

Теорема 5.1. *Пусть процесс* $r(t)$ *является решением задачи* (2.1). *Если* $A < 0$, $r_0 > 0$, $0 < \gamma < 1.5$, *то*

$$\mathbf{P}\Big\{\lim_{t\to+\infty} r(t) = 0\Big\} = 1 - P_\infty, \qquad \mathbf{P}\Big\{\lim_{t\to+\infty} r(t) = +\infty\Big\} = P_\infty,$$

где: $P_\infty = \mathbf{\Gamma}(2/(3-2\gamma), h(r_0))/\mathbf{\Gamma}(2/(3-2\gamma))$, $\mathbf{\Gamma}(x)$, $\mathbf{\Gamma}(x,h)$ *— полная и неполная гамма-функции,* $h(r) = \frac{2|A|}{(3-2\gamma)B^2} r^{3-2\gamma}$.

Доказательство. Обозначим $P(r,\epsilon,R,\alpha)$ — решение следующей задачи

$$0.5B^2 r^{2(\gamma+1)} P_{rr}(r,\epsilon,R,\alpha) + (Ar^4 + 0.5B^2 r^{2\gamma+1}) P_r(r,\epsilon,R,\alpha) = 0,$$
$$0 < \epsilon < r < R < +\infty,$$
$$P(\epsilon,\epsilon,R,\alpha) = \alpha, \quad P(R,\epsilon,R,\alpha) = 1-\alpha, \quad 0 \le \alpha \le 1. \tag{5.1}$$

Если $\alpha = 1$, то $P(r,\epsilon,R,1)$ является вероятностью выхода процесса $r(t)$ из интервала $(\epsilon;R)$ через левый конец при условии, что $r(0) = r \in (\epsilon;R)$. Если $\alpha = 0$, то $P(r,\epsilon,R,0)$ является вероятностью выхода процесса $r(t)$ из интервала $(\epsilon;R)$ через правый конец при условии, что $r(0) = r \in (\epsilon;R)$.

Решение задачи (5.1) имеет вид

$$P(r,\epsilon,R,\alpha) = \alpha + (1-2\alpha)H(\epsilon,r)/H(\epsilon,R),$$

где

$$H(\epsilon,r) = \int\limits_{\epsilon}^{r} m \exp(-h(m))\, dm.$$

Замена $s = h(m)$ приводит $H(\epsilon,r)$ к виду

$$H(\epsilon, r) = \Big(\frac{B^2(3-2\gamma)}{2|A|}\Big)^{2/(3-2\gamma)} \frac{1}{3-2\gamma} \int\limits_{h(\epsilon)}^{h(r)} s^{2/(3-2\gamma)-1} e^{-s}\, ds.$$

По условию теоремы $3-2\gamma > 0$. Значит,

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0,\\ R\to+\infty}} P(r,\epsilon,R,\alpha) = \alpha + (1-2\alpha)\mathbf{\Gamma}(2/(3-2\gamma), h(r_0))/\mathbf{\Gamma}(2/(3-2\gamma)).$$

Положив, поочередно, $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$, получим утверждение теоремы. Теорема 5.1 доказана. □

Теорема 5.2. *Пусть процесс* $r(t)$ *является решением задачи* (5.1). *Если* $A < 0$, $r_0 > 0$, $\gamma = 1.5$, *то*

$$\mathbf{P}\big\{\lim_{t\to+\infty} r(t) = 0\big\} = 1,$$

причем время достижения процессом $r(t)$ *значения* 0 *с вероятностью* 1 *конечно.*

Доказательство. В случае $\gamma = 1.5$ решением задачи (5.1) является функция $P(r,\epsilon,R,\alpha) = \alpha + (1-2\alpha)(r^\lambda - \epsilon^\lambda)/(R^\lambda - \epsilon^\lambda)$, $\lambda = -2AB^{-2}$. Так как $A < 0$, то $\lambda > 0$ и

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0,\\ R\to+\infty}} P(r,\epsilon,R,1) = 1, \qquad \lim_{\substack{\epsilon\to 0,\\ R\to+\infty}} P(r,\epsilon,R,0) = 0.$$

Таким образом, процесс $r(t)$ с вероятностью 1 устремится к нулю. Докажем, что время достижения точки ноль является конечным. Обозначим: τ_0, τ_ϵ, τ_R — моменты достижения процессом $r(t)$ значений 0, ϵ и R, соответственно.

$$\lim_{\epsilon\to 0} P(r,\epsilon,R,1) = (R^\lambda - r^\lambda)R^{-\lambda} = \mathbf{P}\{\tau_0 < \tau_R\}.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\tau_0 < +\infty\} = \lim_{R\to+\infty} \mathbf{P}\{\tau_0 < \tau_R\} = 1.$$

Это означает, что время достижения процессом $r(t)$ значения 0 с вероятностью 1 конечно. Теорема 5.2 доказана. □

Теорема 5.3. *Пусть процесс* $r(t)$ *является решением задачи* (2.1). *Если* $A < 0$, $r_0 > 0$, $\gamma > 1.5$, *то*

$$\mathbf{P}\Big\{\lim_{t\to+\infty} r(t)=0\Big\}=1,$$

причем время достижения процессом $r(t)$ *значения* 0 *с вероятностью* 1 *бесконечно.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 5.1 функция

$$P(r,\epsilon,R,\alpha)=\alpha+(1-2\alpha)H(\epsilon,r)/H(\epsilon,R)$$

является решением задачи (5.1) и при $\alpha=1$ задает вероятность выхода процесса $r(t)$ из интервала $(\epsilon;R)$ через левый конец. Положим $\alpha=1$. Тогда $P(r,\epsilon,R,1)=(H(\epsilon,R)-H(\epsilon,r))/H(\epsilon,R)$. Так как в рассматриваемом случае $3-2\gamma<0$, то замена $s=-h(m)$ приводит функцию $H(\epsilon;r)$ к виду:

$$H(\epsilon,r)=\Big(\frac{B^2(2\gamma-3)}{2|A|}\Big)^{2/(3-2\gamma)}\frac{1}{3-2\gamma}\int\limits_{-h(r)}^{-h(\epsilon)} s^{2/(3-2\gamma)-1}e^s\,ds.$$

Тогда

$$P(r,\epsilon,R,1)=\int\limits_{-h(R)}^{-h(r)} s^{2/(3-2\gamma)-1}e^s\,ds\Big/\int\limits_{-h(R)}^{-h(\epsilon)} s^{2/(3-2\gamma)-1}e^s\,ds.$$

Предельным переходом $R\to+\infty$ получаем вероятность того, что процесс $r(t)$ когда-либо достигнет значения ϵ. Поскольку

$$\lim_{R\to+\infty}P(r,\epsilon,R,1)=1,\quad \forall\,\epsilon>0,$$

то

$$\mathbf{P}\Big\{\lim_{t\to+\infty} r(t)=0\Big\}=1.$$

Выясним, достигнет ли процесс $r(t)$ точки 0 за конечное время. Воспользуемся обозначениями, введенными в доказательстве теоремы 5.2. Поскольку $\tau_0=\lim_{\epsilon\to0}\tau_\epsilon$, то

$$\mathbf{P}\{\tau_0<\tau_R\}=\lim_{\epsilon\to0}\mathbf{P}\{\tau_\epsilon<\tau_R\}=\lim_{\epsilon\to0}P(r,\epsilon,R,1)=0=\mathbf{P}\{\tau_0<+\infty\}.$$

Теорема 5.3 доказана. □

Полученные результаты позволяют описать структуру и динамику решений задачи 2.1, построенных в теореме 2.1. Если выполнены условия теоремы 2.1, то решение задачи имеет вид: $u(t,x) = \ln[r(t)\Lambda v(xr(t)\Lambda^{\gamma+1}q)]$ при $x \in (-\frac{y_0}{r(t)q}\Lambda^{-\gamma-1}; \frac{y_0}{r(t)q}\Lambda^{-\gamma-1})$. Пространственная форма решения определяется функцией $v(y)$. Согласно лемме 3.3 функция $v(y)$ имеет конечную точку фронта y_0 и на интервале $(-y_0; y_0)$ является четной положительной выпуклой вверх функцией. Тогда, процесс $u(t,x)$ определен на интервале $(-x_0(t); x_0(t))$, где $x_0(t) = y_0/(r(t)q\Lambda^{\gamma+1})$, и

$$\lim_{x\to -x_0(t)+0} u(t,x) = \lim_{x\to x_0(t)-0} u(t,x) = -\infty$$

при каждом $t \geq 0$ с вероятностью 1. Процесс $u(t,x)$, как функция переменной x, является четной функцией и достигает максимума в точке $x = 0$. Если $0 < \gamma < 1.5$, то, согласно теореме 5.1, либо процесс $r(t)$ с вероятностью $1 - P_\infty$ устремится к нулю, либо с вероятностью P_∞ устремится к бесконечности. В первом случае: $x_0(t) \to +\infty$, $u(t,0) \to -\infty$ при $t \to +\infty$. Во втором случае: $x_0(t) \to 0$, $u(t,0) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Если $\gamma = 1.5$, то, согласно теореме 5.2, с вероятностью 1 реализуется первый сценарий, причем время жизни процесса конечно. Если $\gamma > 1.5$, то, согласно теореме 5.3, вновь с вероятностью 1 реализуется первый сценарий, но время жизни процесса в этом случае бесконечно.

Литература

[1] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.* Киев, Наук. думка, 1982, 536 с.

[2] Н. В. Крылов, Б. Л. Розовский, *Об эволюционных стохастических уравнениях* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Москва, ВИНИТИ, **14** (1979), 74–147.

[3] С. И. Похожаев, *Об одном подходе к нелинейным уравнениям* // ДАН СССР. Математика, **241.6** (1979), 1327–1331.

[4] А. А. Самарский, В. П. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострениями в задачах для квазилинейных параболических уравнений.* Москва, Наука, 1987, 475 с.

[5] H. J. Engelbert, W. Schmidt, *Strong Markov continuous local vartingals and solutions of one-dimentional stochastic differential equations (part III)* // Math. Nachr., Berlin **151** (1991), 149–197.

[6] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференцильным уравнениям.* Москва, Наука, 1971, 576 с.

[7] Х.-С. Го, *Гауссовские меры в банаховых пространствах.* Москва, Мир, 1979, 176 с.

Сведения об авторах

Сергей Анатольевич Мельник

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
Розы Люксембург 74,
Донецк, 83114,
Украина
E-Mail: `melnik@iamm.ac.donetsk.ua`