Український математичний вісник
Том 5 **(2008)**, № 3, 327 – 335

Теоремы Нётера некоторых краевых задач, порожденных оператором $\frac{\partial}{\partial \bar{t}}$, для пары полианалитических функций

Людмила В. Матвиюк, Зоя М. Лысенко,
Анатолий П. Нечаев

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. Построена теория Нётера краевых задач, содержащих дифференциальный оператор, операторы сдвига и сопряжения, для пары полианалитических функций.

2000 MSC. 58J32.

Ключевые слова и фразы. Нётеровый оператор, индекс, операторный подход, прямой и обратный сдвиги контура.

Введение

В 40-х годах прошлого века под руководством Н. И. Мусхелишвили были начаты исследования по краевым задачам со сдвигом и сопряжением. Этому способствовало то, что ряд задач математической физики и механики был сведен именно к таким задачам. Известные результаты по этой тематике были получены в работах [1–7]. Важную роль в теории краевых задач играет исследование дифференциальных краевых задач со сдвигом. Наиболее известными работами в этом направлении можно назвать, например, [8, 9]. Для исследования краевых задач со сдвигом применяется традиционный метод интегральных представлений. Известно, что этот метод дает лишь достаточные условия нётеровости краевой задачи в H_μ-постановке. При этом построение интегральных представлений является достаточно сложной задачей. Для преодоления указанных трудностей стали разрабатывать так называемый операторный подход, суть которого состоит в замене процедуры применения интегральных представлений умножением на некоторый оператор с дальнейшим использованием методов теории линейных операторов в банаховых пространствах

Статья поступила в редакцию 2.04.2008

(см. [10,14]). С помощью этого подхода удаётся найти необходимые и достаточные условия нётеровости краевых задач в L_p-постановке.

1. Постановка краевых задач, порождённых оператором $\frac{\partial}{\partial\bar{t}}$

Пусть конечная односвязная область G ограничена замкнутой, простой кривой Ляпунова Γ. Предположим, что $0 \in G$. За положительный обход границы Γ принимается тот, при котором область G остается слева. На контуре Γ задан сдвиг $\alpha(t)$, диффеоморфно переводящий Γ в себя с сохранением ориентации ($\alpha = \alpha_+(t)$) или с изменением ориентации ($\alpha = \alpha_-(t)$). Предполагаем, что $\alpha'(t) \neq 0$ ($t \in \Gamma$) и $\alpha'(t) \in H_\lambda(\Gamma)$, $0 < \lambda \leqslant 1$, где $H_\lambda(\Gamma)$ — банахово пространство функций, удовлетворяющих на Γ условию Гёльдера с показателем λ.

Введем две совокупности дифференциальных операторов:

$$D_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}(t)\frac{\partial^j}{\partial\bar{t}^j}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.1}$$

$$\widetilde{D}_i = \sum_{j=0}^{n-1} b_{ij}(t)\frac{\partial^j}{\partial\bar{t}^j}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.2}$$

где $a_{ij}(t)$ и $b_{ij}(t)$ — заданные непрерывные на контуре Γ функции, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{0,n-1}$. Через $E_p(G)$ $(1 < p < \infty)$ обозначим класс Смирнова аналитических функций в G, представимых интегралами типа Коши с плотностями из $L_p(\Gamma)$.

Рассматривается задача об отыскании полианалитических в области G и H-непрерывных в $G\bigcup\Gamma$ функций вида

$$F_1(z,\bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(z)\bar{z}^k, \tag{1.3}$$

$$F_2(z,\bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(z)\bar{z}^k, \tag{1.4}$$

где $\varphi_k, \psi_k \in E_p(G)$ $(k = \overline{0,n-1})$, угловые предельные значения которых $F_1(t,\bar{t})$ и $F_2(t,\bar{t})$ почти всюду на Γ удовлетворяют одному из следующих краевых условий:

$$D_iF_1(t,\bar{t}) = \widetilde{D}_iF_2(t,\bar{t}) + h_i(t), \quad i = \overline{1,n}; \tag{1.5}$$

$$D_iF_1[\alpha_+(t),\overline{\alpha_+(t)}] = \overline{\widetilde{D}_iF_2(t,\bar{t})} + h_i(t), \quad i = \overline{1,n}; \tag{1.6}$$

$$D_i F_1[\alpha_-(t), \overline{\alpha_-(t)}] = D_i F_2(t, \overline{t}) + h_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.7}$$

где $h_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$ — известные функции из банахова пространства $L_p(\Gamma)$, а выражения в левых и правых частях задач (1.6), (1.7) будем понимать так:

$$\begin{aligned} D_i F_j[\alpha(t), \overline{\alpha(t)}] &= D_i F_j(\tau, \overline{\tau})\big|_{\tau=\alpha(t)}, \\ \widetilde{D}_i F_j[\alpha(t), \overline{\alpha(t)}] &= \widetilde{D}_i F_j(\tau, \overline{\tau})\big|_{\tau=\alpha(t)}, \\ i = \overline{1,n}, &\quad j = \overline{1,2}. \end{aligned}$$

Напомним ([5]), что линейный ограниченный оператор U называется нётеровым, если его образ замкнут, а дефектные числа $\alpha = \dim \operatorname{Ker} U$ и $\beta = \dim \operatorname{coKer} U$ конечны, при этом целое число $\operatorname{ind} U = \alpha - \beta$ называется индексом оператора U. Под нётеровостью и индексом краевой задачи $Uf = h$ будем понимать, соответственно, нётеровость и индекс оператора U. В данной работе с помощью операторного подхода, идея которого изложена, например, в обзорной статье [15], найдены необходимые и достаточные условия нётеровости, а также формула для нахождения индекса задач (1.5)–(1.7).

Отметим, что построение теории Нётера краевых задач (1.5)–(1.7) сводится к теории Нётера операторов, принадлежащих хорошо изученной алгебре сингулярных интегральных операторов с матричными коэффициентами (обзор об этой алгебре можно найти, например, в [16]). При этом существенно используются результаты работы [12], касающиеся некоторых вспомогательных операторов, играющих ключевую роль в операторном подходе.

Отметим, что с помощью традиционного метода интегральных представлений теория Нётера задач (1.5)–(1.7) была построена в [17] для случая, когда $\alpha_{ij}(t) = b_{ij}(t) = 0$ $(i \neq j;\ i = \overline{1,n};\ j = \overline{0, n-1})$. До последнего времени, насколько известно авторам, задачи (1.5)–(1.7) в приведённой выше постановке не рассматривались.

2. Теория Нётера задач (1.5)–(1.7) как теория Нётера краевых задач для аналитических вектор–функций

Введём следующие операторы:

$$\begin{aligned} &(I_\Gamma \varphi)(t) = \varphi(t); \\ &(\mathbb{C}\varphi)(t) = \overline{\varphi(t)}; \\ &(V_{\alpha_\pm}\varphi)(t) = \varphi[\alpha_\pm(t)]; \end{aligned}$$

$$((S_\Gamma\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\,\text{v.p.}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \ (t\in\Gamma);$$

$$P_\Gamma = (I_\Gamma + S_\Gamma)/2, \quad Q_\Gamma = I_\Gamma - P_\Gamma.$$

Введём также пространства: $L_p^+(\Gamma) = \operatorname{Im} P(\Gamma)\big|_{L_p(\Gamma)}$, где "$\big|$" — сужение оператора; $\mathcal{L}(X,Y)$ — множество всех линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y; $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$; X^n — пространство n–мерных векторов с элементами из X; $X^{n\times n}$ — пространство $n\times n$ матриц с элементами из X.

Через $w(t)$ обозначим матрицу опеределителя Вронского функций $1, \bar t, \bar t^{\,2}, \ldots, \bar t^{\,n-1}$, т.е.

$$w(t) = \begin{bmatrix} 1 & \bar t & \bar t^{\,2} & \ldots & \bar t^{\,n-1} \\ 0 & 1 & 2\bar t & \ldots & (n-1)\bar t^{\,n-2} \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & (n-1)(n-2)\bar t^{\,n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (n-1)! \end{bmatrix}.$$

Заметим, что

$$\det w(t) = \det w(\bar t) = 1!2!\ldots(n-1)!. \tag{2.1}$$

Введём вектор–столбцы:

$$\Phi(z) = \{\varphi_0(z), \ldots, \varphi_{n-1}(z)\}^T \in E_p^n(G),$$
$$\Psi(z) = \{\psi_0(z), \ldots, \psi_{n-1}(z)\}^T \in E_p^n(G),$$
$$H(t) = \{h_0(t), \ldots, h_{n-1}(t)\}^T \in L_p^n(\Gamma),$$

где "T" — транспонирование.

Совокупности дифференциальных операторов (1.1) и (1.2) однозначно определяются $n\times n$ матрицами-функциями

$$A(t) = \|a_{ij}(t)\|_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{0,n-1}}}, B(t) = \|b_{ij}(t)\|_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{0,n-1}}},$$

принадлежащими пространству $C^{n\times n}(\Gamma)$.

Поскольку

$$w(t) = \operatorname{diag}\left\{I, \frac{\partial}{\partial \bar t}, \ldots, \frac{\partial^{n-1}}{\partial \bar t^{\,n-1}}\right\} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \bar t & \ldots & \bar t^{\,n-1} \\ 1 & \bar t & \ldots & \bar t^{\,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \bar t & \ldots & \bar t^{\,n-1} \end{bmatrix},$$

то действие операторов (1.1) на функцию $F_1(t,\bar{t}) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(t)\bar{t}^{\,k}$ удобно записать в матричной форме:

$$\left[D_1F_1(t,\bar{t}),\ldots,D_nF_1(t,\bar{t})\right]^T = A(t)w(t)\Phi(t).$$

Аналогично выпишем действие операторов из совокупности (1.2) на функцию $F_2(t,\bar{t}) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(t)\bar{t}^{\,k}$:

$$\left[\widetilde{D}_1F_2(t,\bar{t}),\ldots,\widetilde{D}_nF_2(t,\bar{t})\right]^T = \overline{B(t)w(t)\Psi(t)}.$$

Тогда задачи (1.5)–(1.7) можно переписать в виде:

$$A(t)w(t)\Phi(t) - \mathbb{C}B(t)w(t)\Psi(t) = H(t), \tag{2.2}$$

$$V_{\alpha_+}A(t)w(t)\Phi(t) - \mathbb{C}B(t)w(t)\Psi(t) = H(t), \tag{2.3}$$

$$V_{\alpha_-}A(t)w(t)\Phi(t) - B(t)w(t)\Psi(t) = H(t), \tag{2.4}$$

$$t\in\Gamma,\quad H\in L_p^n(\Gamma).$$

При этом, как следует из формул Сохоцкого ([5]), вектор-столбцы $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ принадлежат пространству $\left(L_p^+(\Gamma)\right)^n$.

Введем операторные матрицы $n\times 2n$:

$$T_0 = [A(t)w(t), -\mathbb{C}B(t)w(t)],$$

$$T_1 = [V_{\alpha_+}A(t)w(t), -\mathbb{C}B(t)w(t)],$$

$$T_2 = [V_{\alpha_-}A(t)w(t), -B(t)w(t)],$$

принадлежащие пространству $\mathcal{L}\left(\left(L_p^+(\Gamma)\right)^{2n}, L_p^n(\Gamma)\right)$. С помощью этих операторов краевые задачи (2.2)–(2.4) примут вид соответствующих операторных уравнений:

$$T_j\left(\Phi^T(t),\Psi^T(t)\right)^T = H(t),\quad j=\overline{0,2}.$$

Таким образом, теория Нётера задач (1.5)–(1.7) для полианалитических функций сводится к теории Нётера операторов T_0–T_2, соответственно.

3. Теория Нётера операторов T_0, T_1, T_2

Пусть запись $U\simeq V$ означает, что операторы U и V отличаются на вполне непрерывный оператор. Рассмотрим вспомогательные операторы "интегрального представления" $n\times 2n$:

$$\Pi_n = \left(\operatorname{diag}\left\{P_\Gamma,\ldots,P_\Gamma\right\},\operatorname{diag}\left\{P_\Gamma\mathbb{C},\ldots,P_\Gamma\mathbb{C}\right\}\right)^T,$$

$$\Pi_n^+ = \big(\operatorname{diag}\big\{P_\Gamma V_{\alpha_+}^{-1},\dots,P_\Gamma V_{\alpha_+}^{-1}\big\}, \operatorname{diag}\big\{P_\Gamma \mathbb{C},\dots,P_\Gamma \mathbb{C}\big\}\big)^T,$$
$$\Pi_n^- = \big(\operatorname{diag}\big\{P_\Gamma V_{\alpha_-}^{-1}\mathbb{C},\dots,P_\Gamma V_{\alpha_-}^{-1}\mathbb{C}\big\}, \operatorname{diag}\big\{P_\Gamma \mathbb{C},\dots,P_\Gamma \mathbb{C}\big\}\big)^T.$$

Отметим, что оператор Π_1 впервые использовался в [10] для случая, когда Γ — единичная окружность. Для случая произвольного гладкого ляпуновского контура Γ в работе [12] доказано, что операторы Π_1, Π_1^+, Π_1^- нётеровы и $\operatorname{ind}\Pi_1 = \operatorname{ind}\Pi_1^+ = \operatorname{ind}\Pi_1^- = -2$. Этот результат без труда переносится на операторы Π_n, Π_n^+, Π_n^- при $n > 1$. Поэтому имеет место

Предложение 3.1. *Операторы Π_n, Π_n^+, Π_n^- нётеровы в пространстве $\mathcal{L}\big(L_p^n(\Gamma), \big(L_p^+(\Gamma)\big)^{2n}\big)$ и $\operatorname{ind}\Pi_n = \operatorname{ind}\Pi_n^+ = \operatorname{ind}\Pi_n^- = -2n$.*

Введём принадлежащие $\mathcal{L}\big(\big(L_p^+(\Gamma)\big)^{2n}, L_p^n(\Gamma)\big)$ операторы:

$$G_0 = \big(\nu(t), \mathbb{C}\mu(t)\big),$$
$$G_1 = \big(V_{\alpha_+}\nu(t), \mathbb{C}\mu(t)\big),$$
$$G_2 = \big(V_{\alpha_-}\nu(t), \mu(t)\big),$$

где $\nu(t), \mu(t) \in C^{n\times n}(\Gamma)$.

Пусть

$$M_0 = \nu(t)P_\Gamma + \overline{\mu(t)}Q_\Gamma,$$
$$M_1 = \nu[\alpha_+(t)]P_\Gamma + \overline{\mu(t)}Q_\Gamma,$$
$$M_2 = \mu(t)P_\Gamma + \nu[\alpha_-(t)]Q_\Gamma,$$
$$M_3 = \overline{\nu[\alpha_-(t)]}P_\Gamma + \overline{\mu(t)}Q_\Gamma.$$

Согласно [5],

$$\mathbb{C}P_\Gamma \simeq \mathbb{Q}\mathbb{C}, \quad V_{\alpha_+}P_\Gamma \simeq P_\Gamma V_{\alpha_+}, \quad V_{\alpha_-}P_\Gamma \simeq Q_\Gamma V_{\alpha_-}. \tag{3.1}$$

Тогда

$$G_0\Pi_n = \nu(t)P_\Gamma + \overline{\mu(t)}\mathbb{C}P_\Gamma\mathbb{C} \simeq M_0, \tag{3.2}$$
$$G_1\Pi_n^+ = V_{\alpha_+}\nu(t)P_\Gamma V_{\alpha_+}^{-1} + \overline{\mu}(t)\mathbb{C}P_\Gamma\mathbb{C} \simeq M_1, \tag{3.3}$$
$$G_2\Pi_n^- = V_{\alpha_-}\nu(t)P_\Gamma V_{\alpha_-}^{-1}\mathbb{C} + \mu(t)P_\Gamma\mathbb{C} \simeq M_2\mathbb{C}. \tag{3.4}$$

Используя известное матричное равенство [5], получим, что оператор $M_2\mathbb{C}$ может быть нётеровым одновременно с оператором

$$U = \begin{bmatrix} 0 & M_2 \\ \mathbb{C}M_2\mathbb{C} & 0 \end{bmatrix}$$

и, в случае нётеровости,

$$\operatorname{ind} M_2\mathbb{C} = \frac{1}{2}\operatorname{ind} U. \tag{3.5}$$

На основании (3.1)

$$\mathbb{C}M_2\mathbb{C} = \overline{\nu[\alpha_-(t)]}\mathbb{C}\mathbb{Q}_\Gamma\mathbb{C} + \overline{\mu(t)}\mathbb{C}P_\Gamma\mathbb{C} \simeq M_3.$$

Таким образом, $U \simeq \left[\begin{smallmatrix} 0 & M_2 \\ M_3 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ и нётеровость U равносильна нётеровости операторов M_2 и M_3, причем

$$\operatorname{ind} U = \operatorname{ind} M_2 + \operatorname{ind} M_3. \tag{3.6}$$

Из предложения 3.1, свойств нётеровых операторов, а также (3.2)–(3.6) вытекает следующая

Теорема 3.1. *Операторы G_0, G_1, G_2, принадлежащие пространству $\mathcal{L}\big(\big(L_p^+(\Gamma)\big)^{2n}, L_p^n(\Gamma)\big)$, нётеровы тогда и только тогда, когда нётеровы, соответственно, операторы M_0, M_1 и пара M_2, M_3 в пространстве $\mathcal{L}(L_p^n(\Gamma))$. В случае нётеровости указанных операторов*

$$\operatorname{ind} G_j = \operatorname{ind} M_j + 2n, \quad j = \overline{0,1},$$
$$\operatorname{ind} G_2 = \frac{1}{2}\operatorname{ind} M_2 + \frac{1}{2}\operatorname{ind} M_3 + 2n.$$

Отметим, что операторы M_i $(i = \overline{0,3})$ принадлежат алгебре сингулярных интегральных операторов с матричными коэффициентами. Согласно, например, [16] оператор $K = Z_1(t)P_\Gamma + Z_2(t)Q_\Gamma$, где $Z_1, Z_2 \in C^{n\times n}(\Gamma)$, нётеров тогда и только тогда, когда

$$\det Z_1(t) \neq 0, \quad \det Z_2(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma.$$

Если эти условия выполнены, то $\operatorname{ind} K$ равен числу оборотов ориентированной кривой $V(t) = \frac{\det Z_2(t)}{\det Z_1(t)}$ $(t \in \Gamma)$ вокруг начала координат, т.е.

$$\operatorname{ind} K = \frac{1}{2\pi}\big\{\arg V(t)\big\}_{t\in\Gamma}.$$

Отсюда, а также из теоремы 3.1 и (2.1), следует

Теорема 3.2. *Операторы $T_0, T_1, T_2 \in \mathcal{L}\big(\big(L_p^+(\Gamma)\big)^{2n}, L_p^n(\Gamma)\big)$ нётеровы тогда и только тогда, когда* $\det A(t) \neq 0$, $\det B(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$. *Если эти условия выполнены, то*

$$\operatorname{ind} T_0 = \operatorname{ind} T_1 = \frac{1}{2\pi}\left\{\arg\frac{\det\overline{B(t)}}{\det A(t)}\right\}_{t\in\Gamma} + 2n,$$

$$\operatorname{ind} T_2 = \frac{1}{2\pi}\left\{\arg\frac{\det A(t)}{\det B(t)}\right\}_{t\in\Gamma} + 2n.$$

Литература

[1] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения.* М.: Наука, 1968, 511 с.

[2] Д. А. Квеселава, *Некоторые граничные задачи теории функций* // Труды матем. ин-та АН Груз. ССР, **16** (1948), 39–80.

[3] Н. Г. Векуа, *Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи.* М.: Наука, 1970, 380 с.

[4] Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи.* М.: Наука, 1977, 640 с.

[5] Г. С. Литвинчук, *Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.* М: Наука, 1977, 448 с.

[6] Э. И. Зверович, *Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровых классах на римановских поверхностях* // Успехи мат. наук, 1971, т. 26, № 1, с. 113–179.

[7] Л. Г. Михайлов, *Новый класс особых интегральных уравнений и его приложение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами.* Душанбе, 1963, 183 с.

[8] Р. С. Сакс, *Об одном классе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений* // Диф. уравн., **5** (1969), N 1, 115–131.

[9] Р. С. Исаханов, *Дифференциальная граничная задача линейного сопряжения и её применение в теории интегро-дифференциальных уравнений* // Сообщ. АН Груз. ССР, **20** (1958), N 6.

[10] С. Ф. Скороход, *О критерии нётеровости и индексе некоторых многоэлементных краевых задач с некарлемановским сдвигом.* Одесса, 1980, 10 с., Деп. в ВИНИТИ 27.03.80, N 1208-80 Деп.

[11] Ю. Д. Латушкин, Г. С. Литвинчук, И. М. Спитковский, *К теории Нётера одной граничной задачи Николая Векуа* // Труды матем. ин–та АН Груз. ССР, 1983.

[12] Н. И. Лисовец, *Исследование некоторых смешанных краевых задач теории аналитических функций.* Диссертация . . . канд. физ.–мат. наук. Одесса, ОГУ, 1984, 149 с.

[13] З. М. Лысенко, *Об одной граничной задаче Н. Г. Векуа с кусочно-гладким сдвигом на кусочно-ляпуновском контуре* // Сибирский мат. журнал, **33** (1992), N 2, 108–115.

[14] З. М. Лысенко, Л. В. Матвиюк, А. П. Нечаев, *Об одной краевой задаче теории аналитических функций со сдвигом в область* // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. Сб. наук. праць, (2006), вип. 13, 164–178.

[15] Г. С. Литвинчук *Об операторном подходе к теории краевых задач со сдвигом для функций, аналитических в области* // Научные труды юбилейного семинара, повященного 75-летию со дня рождения академика АН БССР Ф. Д. Гахова, Минск, Изд–во "Университетское", 1985, 69–76.

[16] З. Прёссдорф, *Линейные интегральные уравнения* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. ВИНИТИ, **27** (1988), 6–127.

[17] С. В. Левинский, *Теория Нётера первой краевой задачи для полианалитических функций* // Известия вузов. Математика, (1989), N 3, 35–39.

Сведения об авторах

Людмила Васильевна Матвиюк, Зоя Михайловна Лысенко

Одесский институт математики, экономики и механики
Одесского национального университета
им. И. И. Мечникова
ул. Дворянская, 2,
Одесса, 65026,
Украина
E-Mail: `ivanpribegin@rambler.ru`

Анатолий Петрович Нечаев

Одесская академия холода
ул. Дворянская, 1,
Одесса, 65026,
Украина