Український математичний вісник
Том 5 **(2008)**, № 2, 280 – 287

Про продовження функцій першого класу Бера зі значеннями в σ-метризовних просторах

Тетяна О. Золотухіна, Олена О. Карлова, Олександр В. Собчук

(*Представлена В. В. Шарко*)

Анотація. Доводиться, що кожне відображення першого класу Бера, визначене на лінделефовому G_δ-підпросторі нормального простору і набуває значень у сильно σ-метризовному просторі зі спеціальним вичерпуванням, можна продовжити до відображення першого класу Бера на весь простір.

2000 MSC. 54C20, 54H05.

Ключові слова та фрази. Функція першого класу Бера, продовження, σ-метризовний простір.

1. Вступ

Згідно з класичною теоремою Тітце–Урисона [1, с. 116], кожну неперервну функцію $f : F \to \mathbb{R}$, визначену на замкненій підмножині F нормального простору X, можна продовжити до неперервної функції на весь простір. Теорема Дуґунджі [2] твердить, що кожну неперервну функцію зі значеннями в локально опуклому просторі і визначену на замкненій підмножині метричного простору можна продовжити до неперервної функції.

Для топологічних просторів X і Y ми позначатимемо через $B_1(X, Y)$ сукупність всіх відображень $f : X \to Y$ *першого класу Бера*, тобто поточкових границь послідовностей неперервних відображень.

Добре відомо, що дійснозначну функцію першого класу Бера, визначену на G_δ-підмножині метричного простору, можна продовжити до функції першого класу Бера, визначеної на всьому просторі (див. [3, с. 445]). В. Маслюченко і О. Собчук у [4] встановили, зокрема, що якщо E — замкнений G_δ-підпростір нормального простору

Стаття надійшла в редакцію 5.06.2007

X, то кожну функцію $f \in B_1(E, \mathbb{R})$ можна продовжити до функції $g \in B_1(X, \mathbb{R})$. А. Каланча, В. Маслюченко і В. Михайлюк у [5] довели, що функцію першого класу Бера, визначену на замкненому підпросторі метризовного простору зі значеннями у локально опуклому просторі, можна продовжити до функції першого класу Бера на весь простір.

О. Календа і Дж. Спурний у своїй праці [6] довели наступний результат.

Теорема A. *Нехай X — топологічний простір, $M \subseteq X$ і*

(а) *M — функціонально відкрита підмножина простору X, або*

(б) *X — цілком регулярний, M — ліноделефовий G_δ-підпростір простору X.*

Тоді для кожної функції $f \in B_1(M, \mathbb{R})$ існує функція $g \in B_1(X, \mathbb{R})$, така, що $f(x) = g(x)$ на M.

Природно виникає питання про розширення класу просторів значень функцій першого класу Бера, які можна продовжити до функції першого класу Бера на весь простір. Тут ми встановлюємо, що відображення $f \in B_1(M, Y)$ можна продовжити до відображення $g \in B_1(X, Y)$, якщо M — лінделефовий G_δ-підпростір нормального простору X, а Y — сильно σ-метризовний простір з вичерпуванням $(Y_n)_{n=1}^\infty$, де Y_n — польські зв'язні і локально зв'язні простори.

2. Допоміжні твердження

Нагадаємо [7], що топологічний простір Y називається *рівномірно зв'язним*, якщо існує неперервне відображення $\lambda : Y \times Y \times [0, 1] \to Y$, яке для всіх $y', y'' \in Y$ і $t \in [0, 1]$ задовольняє наступні умови:

(*i*) $\lambda(y', y'', 0) = y'$,

(*ii*) $\lambda(y', y'', 1) = y''$,

(*iii*) $\lambda(y', y', t) = y'$.

Лема 2.1. *Нехай X — нормальний простір, Y — рівномірно зв'язний простір, $(F_i)_{i=1}^n$ — диз'юнктні замкнені в X множини і відображення $g_i : X \to Y$, неперервні для кожного $1 \le i \le n$. Тоді існує неперервне відображення $g : X \to Y$, таке, що $g(x) = g_i(x)$ на F_i для кожного $1 \le i \le n$.*

Доведення. Нехай $n = 2$. Оскільки множини F_1 і F_2 диз'юнктні і замкнені, то згідно з лемою Урисона [1, с. 75] існує неперервне відображення $\varphi : X \to [0,1]$, таке, що $\varphi(x) = 0$, якщо $x \in F_1$, і $\varphi(x) = 1$, якщо $x \in F_2$. Простір Y рівномірно зв'язний, тоді існує неперервне відображення $\lambda : Y \times Y \times [0,1] \to Y$, яке задовольняє умови (i)–(iii). Для кожного $x \in X$ покладемо

$$g(x) = \lambda(g_1(x), g_2(x), \varphi(x)).$$

Зрозуміло, що відображення $g : X \to Y$ неперервне. Якщо $x \in F_1$, то $\varphi(x) = 0$ і $g(x) = g_1(x)$. Якщо ж $x \in F_2$, то $\varphi(x) = 1$ і $g(x) = g_2(x)$.

Припустимо, що твердження леми виконується для всіх $1 \le k < n$, і доведемо, що воно виконується при $k = n$. Згідно з припущенням, існує неперервне відображення $\tilde{g} : X \to Y$, таке, що $\tilde{g}|_{F_i} = g_i$ для кожного $1 \le i < n$. Оскільки множини $F = \bigcup_{i=1}^{n-1} F_i$ і F_n диз'юнктні і замкнені в X, то, згідно з припущенням, існує таке неперервне відображення $g : X \to Y$, що виконуються рівності $g|_F = \tilde{g}$ і $g|_{F_n} = g_n$. Тоді $g|_{F_i} = g_i$ для кожного $1 \le i \le n$. □

Для топологічних просторів X і Y символом $H_1(X,Y)$ ми будемо позначати сукупність усіх відображень $f : X \to Y$ *першого класу Лебеґа*, тобто таких, що для довільної відкритої в Y множини G прообраз $f^{-1}(G)$ є множиною типу F_σ в X.

Підмножину A топологічного простору X ми називаємо *двосторонньою*, якщо вона одночасно є типу F_σ і G_δ в X.

Лема 2.2. *Нехай X — нормальний простір, Y — рівномірно зв'язний простір, $(E_n)_{n=1}^\infty$ — послідовність диз'юнктних двосторонніх множин в X, така, що*

$$X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n, \qquad Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n,$$

$$H_1(X, Y_n) \subseteq B_1(X, Y_n)$$

і відображення $f : X \to Y$ таке, що $f|_{E_n} \in H_1(E_n, Y_n)$. Тоді $f \in B_1(X,Y)$.

Доведення. Для кожного n виберемо довільну точку $y_n \in Y_n$ і покладемо $f_n(x) = f(x)$, якщо $x \in E_n$, і $f_n(x) = y_n$, якщо $x \notin E_n$. Оскільки $f_n|_{E_n} \in H_1(E_n, Y_n)$ і множина E_n двостороння, то $f_n \in H_1(X, Y_n)$. Тоді $f_n \in B_1(X, Y_n)$. Тому для кожного n існує послідовність $(g_{n,m})_{m=1}^\infty$

неперервних відображень $g_{n,m} : X \to Y_n$, така, що $g_{n,m}(x) \underset{m\to\infty}{\to} f_n(x)$ для кожного $x \in X$. Зокрема, $\lim_{m\to\infty} g_{n,m}(x) = f(x)$ на E_n. Оскільки множини E_n є типу F_σ, то $E_n = \bigcup_{m=1}^\infty B_{n,m}$, де $(B_{n,m})_{m=1}^\infty$ — зростаюча послідовність замкнених в X множин. Покладемо $F_{n,m} = \emptyset$, якщо $n > m$, і $F_{n,m} = B_{n,m}$, якщо $n \le m$. Тоді з леми 2.1 випливає, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ існує неперервне відображення $g_m : X \to Y$, таке, що $g_m|_{F_{n,m}} = g_{n,m}$, адже система множин $\{F_{n,m} : n \in \mathbb{N}\}$ скінченна для кожного $m \in \mathbb{N}$. Залишилось показати, що $g_m(x) \to f(x)$ на X. Нехай $x \in X$. Тоді існує $n \in \mathbb{N}$, таке, що $x \in E_n$. З того, що послідовність $(F_{n,m})_{m=1}^\infty$ зростаюча, випливає, що існує номер m_o, такий, що $x \in F_{n,m}$ для всіх $m \ge m_o$. Тоді $g_m(x) = g_{n,m}(x)$ для всіх $m \ge m_o$. Отже, $\lim_{m\to\infty} g_m(x) = \lim_{m\to\infty} g_{n,m}(x) = f(x)$. Таким чином, $f \in B_1(X, Y)$. □

Лема 2.3. *Нехай X, Y — топологічні простори, $(Y_n)_{n=1}^\infty$ — зростаюча послідовність функціонально замкнених підпросторів простору Y, така, що для кожної збіжної послідовності $(y_k)_{k=1}^\infty$ в Y існує номер n, такий, що $\{y_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq Y_n$, і $f \in B_1(X, Y)$. Тоді існує послідовність $(F_n)_{n=1}^\infty$ функціонально замкнених в X множин, така, що $X = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$, $f(F_n) \subseteq Y_n$ і $f|_{F_n} \in B_1(F_n, Y_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Відображення f належить до першого класу Бера, тому існує послідовність неперервних відображень $f_n : X \to Y$, яка поточково збігається до відображення f на X. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо $G_n = \bigcup_{k\ge1} f_k^{-1}(Y \setminus Y_n)$ і покажемо, що $\bigcap_{n=1}^\infty G_n = \emptyset$. Припустимо, що існує $x \in \bigcap_{n=1}^\infty G_n$. Тоді існує послідовність номерів $(k_n)_{n=1}^\infty$, така, що $f_{k_n}(x) \notin Y_n$ для кожного n. Оскільки послідовність $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ збіжна в Y, то існує такий номер m, що $f_n(x) \in Y_m$ для всіх n. Тоді і $f_{k_m}(x) \in Y_m$, що приводить до суперечності. Таким чином, $\bigcap_{n=1}^\infty G_n = \emptyset$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо $F_n = X \setminus G_n$. Тоді $\bigcup_{n=1}^\infty F_n = X \setminus \bigcap_{n=1}^\infty G_n = X$. Якщо $x \in F_n$, то $f_k(x) \in Y_n$ для кожного $k \ge 1$. Оскільки Y_n — замкнений підпростір Y і $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, то і $f(x) \in Y_n$. З того, що множини $Y \setminus Y_k$ функціонально відкриті у просторі Y і відображення f_k неперервні, випливає, що множини F_n функціонально замкнені в X. □

Нехай X — топологічний простір і $A \subseteq X$. Ми кажемо, що множина A є *типу* F_σ^* /G_δ^*/ *в* X, якщо існує послідовність $(A_n)_{n=1}^\infty$ функціонально замкнених /функціонально відкритих/ в X множин A_n, така, що $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ /$A = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$/. Якщо множина A є одночасно типу F_σ^* і G_δ^* у просторі X, то ми називаємо її *двосторонньою** або *функціонально двосторонньою.*

Наступне твердження є аналогом добре відомих теорем редукції і відокремності [3].

Лема 2.4. *Нехай X — топологічний простір.*

а) **[9, лема 3.2]** *Якщо $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність F_{σ}^{*}-множин в X, причому $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то існує послідовність $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ диз'юнктних двосторонніх* множин, таких, що $B_n \subseteq A_n$ і $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.*

б) **[10, лема 2.3]** *Якщо A і B — диз'юнктні G_{δ}^{*}-множини в X, то існує двостороння* множина C, така, що $A \subseteq C$ і $C \cap B = \emptyset$.*

Лема 2.5 ([6, Proposition 4]). *Нехай X — цілком регулярний простір. Тоді*

а) *кожна ліпделефова G_{δ}-множина в X є типу G_{δ}^{*};*

б) *для кожної G_{δ}^{*}-підмножини A у ліпделефовому підпросторі M простору X існує множина A^{*} типу G_{δ}^{*} в X, така, що $A = A^{*} \cap M$.*

Лема 2.6. *Нехай M — ліпделефовий G_{δ}-підпростір цілком регулярного простору X. Тоді*

а) *для кожної двосторонньої* в M множини A існує двостороння* в X множина A^{*}, така, що $A = A^{*} \cap M$;*

б) *для кожної послідовності $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ диз'юнктних двосторонніх* в M множин, такої, що $M = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, існує послідовність $(A_n^{*})_{n=1}^{\infty}$ диз'юнктних двосторонніх* в X множин, така, що $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n^{*}$ і $A_n = A_n^{*} \cap M$.*

Доведення. а) Із леми 5а) випливає, що множина M є типу G_{δ}^{*} в X. Оскільки множина A двостороння* в M, то множини A і $B = M \setminus A$ є типу G_{δ}^{*} в M. Згідно з лемою 5б), існують G_{δ}^{*} в X множини C і D, такі, що $A = C \cap M$ і $B = D \cap M$. Тоді множини A і B є типу G_{δ}^{*} в X. Із леми 4б) випливає, що існує двостороння* в X множина A^{*}, така, що $A \subseteq A^{*}$ і $A^{*} \cap B = \emptyset$. Тоді $A^{*} \cap M = A$.

б) Згідно з твердженням а) цієї леми, для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує двостороння* в X множина D_n, така, що $A_n = D_n \cap M$. Покладемо $B_n = D_n \setminus \left(\bigcup_{k<n} D_k\right)$ для $n \geq 2$ і $B_1 = D_1$. Тоді множини B_n також двосторонні* в X, $A_n = B_n \cap M$ і $B_n \cap B_m = \emptyset$ при $n \neq m$. З леми 4а) випливає, що існує послідовність $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ диз'юнктних двосторонніх* в X множин, така, що $X \setminus M = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначи-

мо $C_n = E_n \cup B_n$. Тоді множини C_n двосторонні* в X і $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = X$. Покладемо $A_1^* = C_1$ і $A_n^* = C_n \setminus \left(\bigcup_{k<n} C_k\right)$ для $n \geq 2$. Зрозуміло, що A_n^* — диз'юнктні двосторонні* в X і $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = X$.

Залишилось показати, що $A_n^* \cap M = A_n$. Нехай $x \in A_n^* \cap M$. Тоді

$$x \in (C_n \cup B_n) \cap M = (E_n \cap M) \cup (B_n \cap M) = A_n,$$

адже $E_n \cap M = \emptyset$. Якщо $x \in A_n$, то $x \in M$ і $x \in B_n \subseteq C_n$. Нехай $x \in C_k$ для деякого $k < n$. Тоді $x \in E_k$ або $x \in B_k$. Оскільки $M \cap E_k = \emptyset$, то $x \in B_k$, що проводить до суперечності, бо $B_n \cap B_k = \emptyset$. Таким чином, $x \notin \bigcup_{k<n} C_k$, тому $x \in A_n^*$. □

Лема 2.7. *Нехай X — топологічний простір, Y — досконало нормальний простір. Тоді $B_1(X,Y) \subseteq H_1(X,Y)$.*

Доведення. Розглянемо відображення $f \in B_1(X,Y)$. Тоді існує послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних відображень $f : X \to Y$, така, що $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для кожного $x \in X$. Нехай F — замкнена в Y множина. Оскільки простір Y досконало нормальний, то існує послідовність $(G_m)_{m=1}^{\infty}$ відкритих в Y множин G_m, така, що $F = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{G}_m$ і $\overline{G}_{m+1} \subseteq G_m$ для кожного m.

Покажемо, що

$$f^{-1}(F) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} f_n^{-1}(G_m).$$

Справді, нехай $x \in f^{-1}(F)$ і $m \in \mathbb{N}$. Тоді $f(x) \in G_m$. Оскільки $f_n(x) \to f(x)$, то існує номер $n \geq m$, такий, що $f_n(x) \in G_m$.

Нехай тепер точка x належить до правої частини рівності. Тоді існує зростаюча послідовність номерів $(n_m)_{m=1}^{\infty}$, така, що $f_{n_m}(x) \in G_m$ для кожного m. З того, що $f_{n_m}(x) \to f(x)$ випливає, що $f(x) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{G}_m$, тобто $f(x) \in F$.

Оскільки множини G_m є відкритими в Y, а відображення f_n неперервні, то множина $f^{-1}(F)$ є G_δ-множиною в X. Отже, $f \in H_1(X,Y)$. □

Лема 2.8 ([8, Theorem 3.7]). *Нехай X — нормальний простір, Y — метризовний лінійно зв'язний і локально лінійно зв'язний сепарабельний простір. Тоді $H_1(X,Y) = B_1(X,Y)$.*

3. Основний результат

Нагадаємо, що топологічний простір Y називається *сильно σ-метризовним*, якщо його можна подати у вигляді зліченного об'єднання зростаючої послідовності своїх замкнених метризовних підпросторів Y_n, причому для кожної збіжної в Y послідовності $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ існує номер n, такий, що $\{y_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq Y_n$. Послідовність підпросторів $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ називається *вичерпуванням* простору Y.

Теорема 3.1. *Нехай X — нормальний простір, M — ліндделефовий G_δ-підпростір простору X, Y — сильно σ-метризовний рівномірно зв'язний простір з вичерпуванням $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$, де Y_n — польський зв'язний і локально зв'язний простір для кожного n, і $f \in B_1(M, Y)$. Тоді існує $f^* \in B_1(X, Y)$, таке, що $f^*|_M = f$.*

Доведення. Згідно з лемою 3 існує послідовність $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ функціонально замкнених в M множин, така, що $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $f(F_n) \subseteq Y_n$ і $f|_{F_n} \in B_1(F_n, Y_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Із леми 2.4 а) випливає, що існує послідовність $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ диз'юнктних двосторонніх* в M множин, така, що $M = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$ і $E_n \subseteq F_n$. Згідно з лемою 2.6 б) існує послідовність $(E_n^*)_{n=1}^{\infty}$ диз'юнктних двосторонніх* в X множин, така, що $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n^*$ і $E_n = E_n^* \cap M$. Позначимо $h_n = f|_{E_n}$. Оскільки $f|_{F_n} \in B_1(F_n, Y_n)$, то, застосовуючи лему 2.7, маємо, що $f|_{F_n} \in H_1(F_n, Y_n)$. Тому $h_n \in H_1(E_n, Y_n)$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ зафіксуємо точку $y_n \in Y_n$ і покладемо $g_n(x) = h_n(x)$, якщо $x \in E_n$, і $g_n(x) = y_n$, якщо $x \notin E_n$. Легко бачити, що $g_n \in H_1(M, Y_n)$, адже множина E_n двостороння в M. Згідно з [6, Theorem 29] для кожного n існує функція $g_n^* \in H_1(X, Y_n)$, така, що $g_n^*|_M = g_n$.

Покладемо $f^*(x) = g_n^*(x)$, якщо $x \in E_n^*$. Якщо $x \in M$, то існує номер n, такий, що $x \in E_n = E_n^* \cap M$. Тоді $f^*(x) = g_n^*(x) = g_n(x) = h_n(x) = f(x)$. Із леми 2.8 випливає, що $H_1(X, Y_n) = B_1(X, Y_n)$. Залишилось застосувати лему 2.2, з якої маємо, що $f^* \in B_1(X, Y)$. $\square$

Література

[1] Р. Энгелькинг, *Общая топология.* М.: Мир, 1986, 752 с.

[2] J. Dugundji, *An extension of Tietze's theorem* // Pacif. J. Math. **1** (1951), 353–367.

[3] К. Куратовский, *Топология.* Т. 1. Москва: Мир, 1966, 596 с.

[4] В. К. Маслюченко, О. В. Собчук, *Берівська класифікація і σ-метризовні простори* // Мат. студії. **3** (1994), 95–101.

[5] А. К. Каланча, В. К. Маслюченко, В. В. Михайлюк, *Застосування теореми Дуґунджі до питань берівської класифікації векторнозначних відображень* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. **43** (2000), N 4, 12–17.

[6] O. Kalenda, J. Spurný, *Extending Baire-one functions on topological spaces* // Topol. Appl. **149** (2005), 195–216.

[7] J. Dugundji, *Locally equiconnected spaces and absolute neghborhood retracts* // Fund. Math. **57** (1965), 187–193.

[8] L. Veselý, *Characterization of Baire-one functions between topological spaces* // Acta Univ. Carol., Math. Phys. **33** (1992), N 2, 143–156.

[9] О. О. Карлова, *Перший функціональний лебеґівський клас і берівська класифікація нарізно неперервних відображень* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 191–192. Математика. Чернівці: Рута, 2004, 52–60.

[10] О. О. Карлова, *Берівська класифікація відображень, неперервних відносно першої змінної і функціонального класу α відносно другої* // Математичний вісник НТШ. **2** (2005), 98–114.

Відомості про авторів

Тетяна Олександрівна Золотухіна, Олена Олексіївна Карлова, Олександр Васильович Собчук	Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, вул. Коцюбинського, 2, м. Чернівці 58012 Україна *E-Mail:* `mathan@ukr.net`