Український математичний вісник
Том 5 **(2008)**, № 2, 159 – 184

К теории нижних Q-гомеоморфизмов

Денис А. Ковтонюк и Владимир И. Рязанов

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. В статье исследуются нижние Q-гомеоморфизмы, которые естественным образом обобщают понятие квазиконформного отображения в направлении геометрического определения по Вяйсяля–Герингу. В статье найдены условия на мажоранту $Q(x)$ для устранимости изолированных особенностей, а также для непрерывного и гомеоморфного продолжения отображений данного класса на регулярные границы.

В частности, в работе доказаны далеко идущие обобщения известной теоремы Геринга–Мартио (1985) о гомеоморфном продолжении на границу квазиконформных отображений между областями квазиэкстремальной длины. Указанный класс областей включает в себя такие широкие классы областей как равномерные, выпуклые, гладкие и т.д.

Показано, что области с так называемыми слабо плоскими границами являются локально связными в граничных точках. На этой основе получается распространение всех результатов и на этот еще более широкий класс границ. Области со слабо плоскими границами — наиболее широкие из известных классов областей, граничное соответствие между которыми при конформных и квазиконформных отображениях осуществляется поточечно, а не по простым концам. Развитая теория применима также к отображениям с конечным искажением площади и, в частности, к конечно билипшицевым отображениям, которые являются естественным обобщением хорошо известных классов изометрических и квазиизометрических отображений.

2000 MSC. 30C65, 30C75.

Ключевые слова и фразы. Модуль семейства поверхностей, нижние Q-гомеоморфизмы, устранимость изолированной особенности, граничное поведение, локальная связность на границе, сильно достижимые границы, слабо плоские границы, области квазиэкстремальной длины.

Статья поступила в редакцию 09.11.2006

ISSN 1810 – 3200.

1. Введение

Проблема граничного поведения является одной из центральных тем теории квазиконформных отображений и их обобщений, см., напр., [8, 18, 24, 31, 35, 37]. В последние годы интенсивно изучаются различные классы отображений с конечным искажением, естественным образом обобщающие конформные, квазиконформные и квазирегулярные отображения, см. подробнее, напр., в [13, 20]. Главную роль в теории таких отображений играют верхние оценки модулей, см., напр., [7, 11, 12, 16, 20, 21]. В данной работе исследование пространственных отображений проводится с помощью нижних оценок модулей, ср. [38].

Напомним, что борелевская функция $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для заданного семейства Γ кривых в $\mathbb{R}^n$, сокр. $\varrho \in adm\,\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \varrho\, ds \geqslant 1 \qquad (1.1)$$

для каждой $\gamma \in \Gamma$. *Модуль* (конформный) семейства Γ определяется равенством

$$M(\Gamma) = \inf_{\varrho \in adm\,\Gamma} \int\limits_{D} \varrho^n(x)\, dm(x). \qquad (1.2)$$

Учитывая роль модульных оценок, профессор Олли Мартио предложил в 2001 году следующую общую концепцию. Пусть D и D' — области в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, и пусть $Q : D \to [1, \infty]$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f : D \to D'$ называется *Q-гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leqslant \int\limits_{D} Q(x) \cdot \varrho^n(x)\, dm(x) \qquad (1.3)$$

для каждого семейства Γ кривых в D и каждой допустимой функции ϱ для Γ, см., напр., [21]. Отметим, что эта концепция естественным образом связана с теорией так называемых модулей с весом, см., напр., [1,26,32]. Заметим также, что неравенства вида (1.3) были впервые установлены в рамках теории квазиконформных отображений, см., напр., [2,17].

Согласно геометрическому определению Вяйсяля, см. 1.3.1 в [33], гомеоморфизм f между областями D и D' в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, является *K-квазиконформным*, если

$$M(\Gamma)/K \leqslant M(f\Gamma) \leqslant K\, M(\Gamma) \qquad (1.4)$$

для любого семейства Γ кривых γ в D. Гомеоморфизм $f : D \to D'$ называется *квазиконформным*, если f является K-квазиконформным для некоторого $K \in [1, \infty)$, т.е. если искажение модулей семейств кривых при отображении f ограничено.

По теореме 34.3 в [33], гомеоморфизм $f : D \to D'$ является квазиконформным тогда и только тогда, когда

$$M(f\Gamma) \leqslant K\, M(\Gamma) \tag{1.5}$$

для некоторого $K \in [1, \infty)$ и любых семейств Γ кривых γ в D. Другими словами, достаточно проверить, что

$$\sup \frac{M(f\Gamma)}{M(\Gamma)} < \infty, \tag{1.6}$$

где супремум берется над всеми семействами Γ кривых γ в D, для которых $M(\Gamma)$ и $M(f\Gamma)$ не равны одновременно 0 или ∞. Тогда

$$\sup \frac{M(\Gamma)}{M(f\Gamma)} < \infty. \tag{1.7}$$

Также верно, что (1.7) влечет (1.6).

Таким образом, определение Q-гомеоморфизма по Мартио является естественным обобщением геометрического определения квазиконформного отображения по Вяйсяля.

Как это было впервые замечено Герингом, супремумы в (1.6) и (1.7) остаются теми же самыми, если мы ограничимся семействами кривых, соединяющими граничные компоненты колец в D, см. [4] или теорему 36.1 в [33]. Таким образом, геометрическое определение квазиконформного отображения по Вяйсяля эквивалентно кольцевому определению по Герингу, которое само является вариантом геометрического определения.

Следующее понятие мотивировано кольцевым определением квазиконформного отображения по Герингу. Пусть даны область $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, и измеримая функция $Q : D \to (0, \infty)$. Мы говорим, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ есть *нижний Q-гомеоморфизм в точке x_0*, если

$$M(f\Sigma_\varepsilon) \geqslant \inf_{\varrho \,\in\, ext\, adm\, \Sigma_\varepsilon} \int\limits_{D \cap R_\varepsilon} \frac{\varrho^n(x)}{Q(x)}\; dm(x) \tag{1.8}$$

для каждого кольца

$$R_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |\,x - x_0| < \varepsilon_0\}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

где

$$0 < \varepsilon_0 < d_0 = \sup_{x\in D} |\, x - x_0|, \tag{1.9}$$

а через Σ_ε обозначено семейство всех пересечений сфер

$$S(r) = S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |\, x - x_0| = r\}, \quad r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$$

с D. Здесь $ext\, adm\, \Sigma_\varepsilon$ состоит из всех измеримых (по Лебегу) функций $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ с

$$\int\limits_{D(r)} \varrho^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} \geqslant 1 \tag{1.10}$$

для почти всех $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, где $\mathcal{A}$ — мера площади на

$$D(r) = D(x_0, r) = \{x \in D : |\, x - x_0| = r\} = D \cap S(x_0, r). \tag{1.11}$$

Как обычно, это понятие может быть распространено на случай $x_0 = \infty \in \overline{D}$ с помощью инверсии относительно единичной сферы в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $T(x) = x/|\, x|^2$, $T(\infty) = 0$, $T(0) = \infty$. А именно, гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — *нижний Q-гомеоморфизм в* $\infty \in \overline{D}$, если $F = f \circ T$ — нижний Q_*-гомеоморфизм с $Q_* = Q \circ T$ в 0.

Мы также говорим, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ есть *нижний Q-гомеоморфизм в D*, если f есть нижний Q-гомеоморфизм в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$.

В следующей секции будет показано, что неравенство (1.8) эквивалентно неравенству:

$$M(f\Sigma_\varepsilon) \geqslant \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|Q\|_{n-1}(r)}, \tag{1.12}$$

где

$$\|Q\|_{n-1}(r) = \left(\int\limits_{D(r)} Q^{n-1}\, d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{1.13}$$

Отметим, что инфимум в (1.8) достигается на функции

$$\varrho_0(x) = Q(x)/\|Q\|_{n-1}(|\, x|). \tag{1.14}$$

Далее мы часто предполагаем, что $Q \equiv 0$ вне D, и берем интегралы в (1.13) по целым сферам $S(r) = S(x_0, r)$.

Это делает возможным найти эффективные оценки искажения при нижних Q-гомеоморфизмах и применить их к изучению проблем устранимости изолированных особенностей, граничному поведению и другим вопросам.

Отметим, что (1.8) влечет соответствующую нижнюю оценку модуля для семейства Σ_ε^*, состоящего из всех $(n-1)-$мерных поверхностей в D, отделяющих сферы $|\,x - x_0| = \varepsilon$ и $|\,x - x_0| = \varepsilon_0$, поскольку $\Sigma_\varepsilon \subset \Sigma_\varepsilon^*$ и, следовательно, $ext\,adm\,\Sigma_\varepsilon^* \subset ext\,adm\,\Sigma_\varepsilon$. То же самое верно для семейства Σ_ε^{**}, состоящего из всех замкнутых множеств в D, отделяющих указанные сферы в D, поскольку $\Sigma_\varepsilon^* \subset \Sigma_\varepsilon^{**}$, ср. [40]. Таким образом, (1.8), ср. (1.7), является обобщением геометрического определения квазиконформного отображения.

В дальнейшем через H^k, $k = 1, \ldots, n-1$, обозначается *k-мерная хаусдорфова мера* в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Точнее, если A — множество из $\mathbb{R}^n$, то

$$H^k(A) = \sup_{\varepsilon > 0}\ H^k_\varepsilon(A), \tag{1.15}$$

$$H^k_\varepsilon(A) = \Omega_k \inf\ \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\delta_i}{2}\right)^k, \tag{1.16}$$

где инфимум берется по всем счетным наборам чисел $\delta_i \in (0, \varepsilon)$ таким, что некоторые множества $A_i \subset \mathbb{R}^n$ с диаметрами $d(A_i) = \delta_i$ покрывают множество A. Здесь Ω_k — объем единичного шара в $\mathbb{R}^k$.

Пусть ω — открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^k}$, $k = 1, \ldots, n-1$. Непрерывное отображение $S : \omega \to \mathbb{R}^n$ называется *k-мерной поверхностью* S в $\mathbb{R}^n$. Иногда образ поверхности $S(\omega) \subseteq \mathbb{R}^n$ мы также будем называть поверхностью. Число прообразов

$$N(S, y) = N(S, y, \omega) = \mathrm{card}\ S^{-1}(y) = \mathrm{card}\,\{x \in \omega :\ S(x) = y\} \tag{1.17}$$

называется *функцией кратности* поверхности S в точке $y \in \mathbb{R}^n$. Другими словами, $N(S, y)$ равна кратности покрытия точки y поверхностью S. Известно, что функция кратности полунепрерывна снизу, т.е.

$$N(S, y) \geqslant \liminf_{m \to \infty} N(S, y_m)$$

для любой последовательности $y_m \in \mathbb{R}^n$ такой, что $y_m \to y \in \mathbb{R}^n$ при $m \to \infty$, см. [27, с. 160]. Таким образом, функция $N(S, y)$ является борелевской и поэтому измерима относительно любой меры Хаусдорфа H^k, см. [29, с. 52].

k-мерная хаусдорфова площадь в $\mathbb{R}^n$, или просто *площадь*, ассоциированная с поверхностью $S : \omega \to \mathbb{R}^n$, определяется формулой

$$\mathcal{A}(B) = \mathcal{A}_S(B) = \mathcal{A}_S^k(B) := \int\limits_B N(S, y)\, dH^k y \tag{1.18}$$

для произвольного борелевского множества $B \subseteq \mathbb{R}^n$ и, более общо, для произвольного множества, измеримого относительно H^k в $\mathbb{R}^n$. Поверхность S называется *спрямляемой*, если $\mathcal{A}_S(\mathbb{R}^n) < \infty$.

Если $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ — борелевская функция, то ее *интеграл по* S определяется равенством

$$\int\limits_S \varrho\, d\mathcal{A} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varrho(y)\, N(S, y)\, dH^k y. \tag{1.19}$$

Борелевская функция $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ k-мерных поверхностей S в $\mathbb{R}^n$, пишем $\varrho \in adm\,\Gamma$, если

$$\int\limits_S \varrho^k\, d\mathcal{A} \geqslant 1 \tag{1.20}$$

для всех $S \in \Gamma$. Пусть дано $p \in (0, \infty)$, *p-модулем* семейства Γ называется следующая величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\varrho \in adm\,\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varrho^p(x)\, dm(x). \tag{1.21}$$

Мы также используем обозначение

$$M(\Gamma) = M_n(\Gamma). \tag{1.22}$$

В большинстве случаев для доказательств тех или иных утверждений более удобным является понятие p-обобщенного модуля.

Говорят, что свойство P выполнено для *p-почти всех*, сокр. p-п.в., k-мерных поверхностей S семейства Γ, если подсемейство всех поверхностей из Γ, для которых P не выполнено, имеет нулевой p-модуль. В случае $p = n$, мы пишем просто п.в.

Измеримая по Лебегу функция $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *p-обобщенно допустимой* для семейства Γ k-мерных поверхностей S в $\mathbb{R}^n$, пишем $\varrho \in ext_p\, adm\, \Gamma$, если

$$\int\limits_S \varrho^k \, d\mathcal{A} \geqslant 1 \tag{1.23}$$

для p-п.в. $S \in \Gamma$.

Для $p \in (0,\infty)$ *p-обобщенным модулем* семейства Γ k-мерных поверхностей S в $\mathbb{R}^n$ называется следующая величина

$$\overline{M}_p(\Gamma) = \inf \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varrho^p(x)\, dm(x), \tag{1.24}$$

где инфимум берется по всем $\varrho \in ext_p\, adm\, \Gamma$. В случае $p = n$ будем использовать обозначения $\overline{M}(\Gamma)$ и $\varrho \in ext\, adm\, \Gamma$, соответственно.

Понятие p-обобщенного модуля является более удобным, поскольку в нем участвуют измеримые по Лебегу функции, и, несмотря на это, p-обобщенный модуль совпадает с обычным p-модулем, т.е. выполнено равенство

$$\overline{M_p}(\Gamma) = M_p(\Gamma). \tag{1.25}$$

2. Описание нижних Q-гомеоморфизмов

Начнем со следующей леммы общего характера.

Лемма 2.1. *Пусть (X,μ) — измеримое пространство X с конечной мерой μ, $p \in (1,\infty)$, и пусть $\varphi : X \to (0,\infty)$ — измеримая функция. Положим*

$$I(\varphi,p) = \inf_{\alpha} \int\limits_X \varphi\, \alpha^p \, d\mu, \tag{2.1}$$

где инфимум берется по всем измеримым функциям $\alpha : X \to [0,\infty]$ таким, что

$$\int\limits_X \alpha \, d\mu = 1. \tag{2.2}$$

Тогда

$$I(\varphi,p) \; = \left[\; \int\limits_X \varphi^{-\lambda}\, d\mu \right]^{-\frac{1}{\lambda}}, \tag{2.3}$$

где

$$\lambda = \frac{q}{p}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{2.4}$$

т.е. $\lambda = 1/(p-1) \in (0,\infty)$. *Кроме того, инфимум в* (2.1) *достигается на функции*
$$\alpha_0 = C \cdot \varphi^{-\lambda}, \tag{2.5}$$
где
$$C = \left(\int\limits_X \varphi^{-\lambda}\, d\mu \right)^{-1}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Действительно, по неравенству Гельдера имеем
$$1 = \int\limits_X \alpha\, d\mu = \int\limits_X (\varphi^{-\frac{q}{p}})^{\frac{1}{q}}\, [\varphi\, \alpha^p]^{\frac{1}{p}}\, d\mu \leqslant \left[\, \int\limits_X \varphi^{-\frac{q}{p}}\, d\mu \right]^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\, \int\limits_X \varphi\, \alpha^p\, d\mu \right]^{\frac{1}{p}},$$
где равенство достигается тогда и только тогда, когда $c \cdot \varphi^{-\frac{q}{p}} = \varphi \cdot \alpha^p$ п.в., см. [9]. $C = c^{\frac{1}{p}}$ в (2.6), т.е.
$$C = \left(\int\limits_X \varphi^{-\frac{1}{p-1}}\, d\mu \right)^{-1},$$
$$\alpha_0(x) = \left(\int\limits_X \varphi^{-\frac{1}{p-1}}\, d\mu \right)^{-1} \cdot \varphi^{-\frac{1}{p-1}}(x).$$

Если $\int \varphi^{-\lambda}\, d\mu = \infty$, то сначала эти рассуждения проводятся с малым $\varepsilon > 0$ для функции $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x)$ при $\varphi(x) > \varepsilon$ и $\varphi_\varepsilon(x) = 1$ при $\varphi(x) \leqslant \varepsilon$. В этом случае, $I(\varphi, p) \leqslant I(\varphi_\varepsilon, p) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. $\square$

Следующая теорема полностью характеризует нижние Q-гомеоморфизмы.

Теорема 2.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in \overline{D}$, и пусть $Q : D \to (0,\infty)$ — измеримая функция. Тогда гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ является нижним Q-гомеоморфизмом в точке x_0 тогда и только тогда, когда*
$$M(f\Sigma_\varepsilon) \geqslant \int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|Q\|_{n-1}(r)} \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \tag{2.7}$$
где
$$0 < \varepsilon_0 < d_0 = \sup_{x \in D} |\, x - x_0| = \sup_{x \in \partial D} |\, x - x_0|, \tag{2.8}$$

и через Σ_ε *обозначено семейство всех пересечений* D *со сферами* $S(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |\,x - x_0| = r\}$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, *и*

$$\|Q\|_{n-1}(r) = \left(\int\limits_{D(r)} Q^{n-1}\, d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{2.9}$$

есть L_{n-1}*-норма функции* Q *по* $D(r) = \{x \in D : |\,x - x_0| = r\} = D \cap S(r)$. *Инфимум выражения из правой части в* (1.8) *достигается на функции*

$$\varrho_0(x) = Q(x)/\|Q\|_{n-1}(|\,x|).$$

Доказательство. Отметим, что для каждой $\varrho \in ext\, adm\, \Sigma_\varepsilon$, функция

$$A_\varrho(r) := \int\limits_{D(r)} \varrho^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} \;\neq\; 0 \qquad \text{п. в.}$$

является измеримой по переменной r, например, по теореме Фубини. Таким образом, мы можем требовать равенство $A_\varrho(r) \equiv 1$ п.в. вместо (1.10), и

$$\inf_{\varrho \in ext\, adm \Sigma_\varepsilon} \int\limits_{D \cap R_\varepsilon} \frac{\varrho^n(x)}{Q(x)}\, dm(x) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \left(\inf_{\alpha \in I(r)} \int\limits_{D(r)} \frac{\alpha^p(x)}{Q(x)}\, d\mathcal{A} \right) dr,$$

где $p = n/(n-1) > 1$, и через $I(r)$ обозначено множество всех измеримых функций α на поверхности $D(r) = S(r) \cap D$ таких, что

$$\int\limits_{D(r)} \alpha(x)\, d\mathcal{A} = 1.$$

Таким образом, теорема 2.1 следует из леммы 2.1, при $X = D(r)$, μ — площадь на $D(r)$, $\varphi = \frac{1}{Q}|_{D(r)}$, и $p = n/(n-1) > 1$. □

Следствие 2.1. *Пусть* D *— область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in \overline{D}$, $Q : D \to (0, \infty)$ *— измеримая функция, и* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *— нижний* Q*-гомеоморфизм в точке* x_0. *Тогда*

$$M(f\Sigma_\varepsilon) \geqslant \omega_{n-1}^{\frac{1}{1-n}} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r \cdot q_{n-1}(r)} \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \tag{2.10}$$

где через Σ_ε *обозначено семейство всех пересечений сфер* $S(r)=\{x\in\mathbb{R}^n:|\,x-x_0|=r\}$, $r\in(\varepsilon,\varepsilon_0)$, *с областью* D *и*

$$q_{n-1}(r)=\left(\ \fint\limits_{S(r)} q^{n-1}(x)\,d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{2.11}$$

где

$$q(x)=\begin{cases}Q(x), & x\in D,\\ 0, & x\in\mathbb{R}^n\setminus D.\end{cases} \tag{2.12}$$

3. Оценки искажения

В дальнейшем будем использовать *сферическую (хордальную) метрику* $h(x,y)=|\,\pi(x)-\pi(y)|$ в $\overline{\mathbb{R}^n}=\mathbb{R}^n\bigcup\{\infty\}$, где π — стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}\,e_{n+1},\frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|\,x|^2}},\quad h(x,y)=\frac{|\,x-y|}{\sqrt{1+|\,x|^2}\sqrt{1+|\,y|^2}},\quad x\neq\infty\neq y. \tag{3.1}$$

Таким образом, из определения следует, что $h(x,y)\leqslant 1$ для всех x и $y\in\overline{\mathbb{R}^n}$. *Сферический* (*хордальный*) *диаметр* множества $E\subset\overline{\mathbb{R}^n}$ определяется равенством

$$h(E)=\sup_{x,\,y\in E}h(x,y). \tag{3.2}$$

Отметим, что

$$h(x,y)\leqslant|\,x-y| \tag{3.3}$$

для всех x,$y\in\mathbb{R}^n$, и

$$h(x,y)\geqslant\frac{1}{2}\,|\,x-y| \tag{3.4}$$

для всех x и y из единичного шара $\mathbb{B}^n\subset\mathbb{R}^n$ с равенством в (3.4) на $\partial\,\mathbb{B}^n$.

Лемма 3.1. *Пусть* D *— область в* $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, *и пусть* $f:D\to\mathbb{R}^n$ *является нижним* Q*-гомеоморфизмом в точке* $x_0\in D$, *и* $0<\varepsilon<\varepsilon_0<\operatorname{dist}(x_0,\partial D)$. *Тогда*

$$h(fS_\varepsilon) \ \le \ \frac{\alpha_n}{h(fS_{\varepsilon_0})} \cdot \exp\left(-\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r\, q_{n-1}(r)} \right), \tag{3.5}$$

где $\alpha_n = 2\lambda_n^2$ *с* $\lambda_n \in [4, 2e^{n-1})$, $\lambda_2 = 4$ *и* $\lambda_n^{\frac{1}{n}} \to e$ *при* $n \to \infty$, *и*

$$q_{n-1} = \left(\ \fint\limits_{|\,x-x_0|=r} Q^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{3.6}$$

а через S_ε *и* S_{ε_0} *обозначены концентрические сферы в* $\mathbb{R}^n$ *с центром в* x_0 *радиуса* ε *и* ε_0, *соответственно.*

Доказательство. Положим $E = fS_\varepsilon$ и $F = fS_{\varepsilon_0}$. По известной лемме Геринга

$$\operatorname{cap} R(E,F) \ge \operatorname{cap} R_T\left(\frac{1}{h(E)\, h(F)}\right), \tag{3.7}$$

где $h(E)$ и $h(F)$ — сферические диаметры континуумов E и F, соответственно, и $R_T(s)$ — кольцо Тейхмюллера

$$R_T(s) = \mathbb{R}^n \setminus ([-1,0] \cup [s,\infty]), \qquad s > 1, \tag{3.8}$$

см., например, [5] или [36, 7.37]. Также известно, что

$$\operatorname{cap} R_T(s) = \frac{\omega_{n-1}}{(\log \Psi(s))^{n-1}}, \tag{3.9}$$

где функция Ψ удовлетворяет оценкам:

$$s + 1 \le \Psi(s) \le \lambda_n^2 \cdot (s+1) < 2\lambda_n^2 \cdot s, \qquad s > 1, \tag{3.10}$$

см., например, [5, с. 225–226], а также (7.19) и (7.22) в [36]. Поэтому из неравенства (3.7) следует, что

$$\operatorname{cap} R(E,F) \ge \frac{\omega_{n-1}}{\left(\log \frac{2\lambda_n^2}{h(E)\, h(F)}\right)^{n-1}}. \tag{3.11}$$

По теореме 3.13 из [40] и (2.10) имеем

$$cap\, R(E,F) \leqslant \frac{1}{M^{n-1}(f\Sigma_\varepsilon)} \leqslant \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r \cdot q_{n-1}(r)}\right)^{n-1}}, \tag{3.12}$$

поскольку $f\Sigma_\varepsilon \subset \Sigma(fS_\varepsilon, fS_{\varepsilon_0})$, где $\Sigma(fS_\varepsilon, fS_{\varepsilon_0})$ состоит из всех замкнутых множеств в D', отделяющих fS_ε и fS_{ε_0}.

Наконец, комбинируя (3.11) и (3.12), получаем (3.5). Лемма доказана. □

4. Устранимость изолированных особенностей

Используя теорему 2.1, аналогично доказательству леммы 3.1, получаем следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$, $Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая функция, и пусть $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке x_0. Если*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r \cdot q_{n-1}(r)} = \infty, \tag{4.1}$$

где $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, и

$$q_{n-1}(r) = \Bigg(\ \fint\limits_{|x - x_0| = r} Q^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} \Bigg)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{4.2}$$

то f имеет гомеоморфное продолжение в D.

Следствие 4.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$, и пусть $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке x_0. Если при $r \to 0$*

$$\fint\limits_{|x - x_0| = r} Q^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} = O\Big(\log^{n-1} \frac{1}{r} \Big), \tag{4.3}$$

то f имеет гомеоморфное продолжение в D.

Следствие 4.2. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$, и пусть $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке x_0. Если при $r \to 0$*

$$\fint\limits_{|x - x_0| = r} Q^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} = O\Big(\Big[\log \frac{1}{r} \cdot \log\log \frac{1}{r} \cdots \log \cdots \log \frac{1}{r} \Big]^{n-1} \Big), \tag{4.4}$$

то f имеет гомеоморфное продолжение в D.

5. О слабо плоских границах

Приведенные ниже определения сильной достижимости и слабой плоскости в точках границы являются локализацией соответствующих понятий в [21], ср. их со свойствами P_1 и P_2 по Вяйсяля в [33] и квазиконформной достижимостью и плоскостью по Някки в [25], см. также [15] и [28]. Приведенная ниже лемма 5.1 устанавливает связь подобных свойств, сформулированных в терминах модулей семейств кривых, с общетопологическим понятием локальной связности на границе, см. [15], ср. [28].

Напомним, что область $D \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0, для которой $V \cap D$ связно (другими словами, для любого шара $B_0 = B(x_0, r_0)$ существует компонента связности $B_0 \cap D$, которая включает в себя $B \cap D$, где $B = B(x_0, r)$, $r \in (0, r_0)$). Отметим, что любая жорданова область D в $\mathbb{R}^n$ является локально связной в каждой точке своей границы ∂D, см., напр., [39, с. 66].

Будем говорить, что точка $x_0 \in \partial D$ *сильно достижима из* D, если для любой окрестности U точки x_0 найдется континуум $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geqslant \delta \tag{5.1}$$

для всех континуумов F в D, пересекающих ∂U и ∂V. Здесь и всюду далее $\Delta(E, F; D)$ — семейство всех кривых, соединяющих E и F в D. Говорим, что ∂D *сильно достижима*, если каждая точка $x_0 \in \partial D$ сильно достижима из D.

Будем также говорить, что граница ∂D *слабо плоская в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 и любого числа $P > 0$ найдется окрестность $V \subset U$ точки x_0 такая, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geqslant P \tag{5.2}$$

для любых континуумов E и F в D, пересекающих обе границы ∂U и ∂V. Говорим, что ∂D *слабо плоская*, если она слабо плоская в каждой своей точке.

Замечание 5.1. Здесь, в определениях сильно достижимых и слабо плоских границ, в качестве окрестностей U и V точки x_0 можно брать шары (замкнутые или открытые) с центром в точке x_0.

Предложение 5.1. *Если область D в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, слабо плоская в точке $x_0 \in \partial D$, то точка x_0 сильно достижима из D.*

Доказательство. Действительно, пусть $U = B(x_0, r_0)$, где $0 < r_0 < d_0 = \sup_{x \in D} |x - x_0|$ и $P \in (0, \infty)$. Тогда по условию найдется $r \in (0, r_0)$ такое, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geqslant P \tag{5.3}$$

для любых континуумов E и F в D, пересекающих $\partial B(x_0, r_0)$ и $\partial B(x_0, r)$. В качестве континуума E выберем произвольную кривую, соединяющую $\partial B(x_0, r_0)$ и $\partial B(x_0, r)$ в D. Тогда для любого континуума F в D, пересекающего $\partial B(x_0, r_0)$ и $\partial B(x_0, r)$, имеет место (5.3). $\Box$

Следствие 5.1. *Слабо плоские границы в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, являются сильно достижимыми.*

Лемма 5.1. *Если область D в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, слабо плоская в точке $x_0 \in \partial D$, то D локально связна в x_0.*

Доказательство. Допустим, что область D не является локально связной в точке x_0. Тогда найдется положительное число $r_0 < d_0 = \sup_{x \in D} |x - x_0|$ такое, что для любой окрестности $V \subseteq U := B(x_0, r_0)$ точки x_0 выполняется хотя бы одно из двух условий:

1) $V \cap D$ имеет по крайней мере две связные компоненты K_1 и K_2 такие, что $x_0 \in \overline{K}_1 \cap \overline{K}_2$;

2) $V \cap D$ имеет бесконечное число компонент связности $K_1, K_2, \ldots, K_m, \ldots$ таких, что $x_m \to x_0$ для некоторых $x_m \in K_m$. Заметим, что $\overline{K}_m \cap \partial V \neq \varnothing$ при всех $m = 1, 2 \ldots$ ввиду связности D.

В частности, это верно для окрестности $V = U = B(x_0, r_0)$. Пусть r_* — произвольное число из интервала $(0, r_0)$. Тогда при всех $i \neq j$

$$M(\Delta(K_i^*, K_j^*; D)) \leqslant M_0 := \frac{|D \cap B(x_0, r_0)|}{[2(r_0 - r_*)]^n} < \infty \tag{5.4}$$

где $K_i^* = K_i \cap \overline{B(x_0, r_*)}$ и $K_j^* = K_j \cap \overline{B(x_0, r_*)}$. Заметим, что допустимой функцией для семейства кривых $\Gamma_{ij} = \Delta(K_i^*, K_j^*; D)$ является

$$\varrho(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(r_0 - r_*)} & \text{для } x \in B_0 \setminus \overline{B_*}, \\ 0 & \text{для } x \in \overline{B_*} \text{ и } x \in \mathbb{R}^n \setminus B_0, \end{cases}$$

где $B_0 = B(x_0, r_0)$ и $B_* = B(x_0, r_*)$, поскольку K_i и K_j, как компоненты связности $D \cap B_0$, не могут быть соединены ни одной кривой в B_0, и потому любая кривая, соединяющая K_i^* и K_j^*, обязана хотя бы дважды пройти через кольцо $B_0 \setminus \overline{B_*}$.

Однако, ввиду 1), 2), получаем противоречие (5.4) с условием слабой плоскости границы ∂D в точке x_0. Действительно, по условию слабой плоскости, найдется $r \in (0, r_*)$ такое, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geqslant 2M_0 \tag{5.5}$$

для любых двух континуумов E и F в D, которые пересекают сферы $|x - x_0| = r_*$ и $|x - x_0| = r$. По 1), 2) найдется пара компонент связности K_{i_0} и K_{j_0} пересечения $D \cap B_0$, которые пересекают обе указанные сферы. Выберем по одной точке x_0 и y_0 в $K_{i_0} \cap B$ и $K_{j_0} \cap B$, где $B = B(x_0, r)$, и соединим их непрерывной кривой C в D. Пусть C_1 и C_2 — компоненты связности $C \cap K_{i_0}^*$ и $C \cap K_{j_0}^*$, содержащие точки x_0 и y_0, соответственно. Тогда по (5.4)

$$M(\Delta(C_1, C_2; D)) \leqslant M_0,$$

а по (5.5)

$$M(\Delta(C_1, C_2; D)) \geqslant 2M_0.$$

Полученное противоречие опровергает предположение о том, что область D не является локально связной в точке x_0. $\square$

Следствие 5.2. *Любая область D в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, со слабо плоской границей локально связна в каждой своей граничной точке.*

6. Основная лемма о непрерывном продолжении на границу

Лемма 6.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in \partial D$, $Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая функция, и пусть $f : D \to D' \subset \mathbb{R}^n$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке x_0, область D локально связна в x_0, а $\partial D'$ сильно достижима из D' хотя бы в одной точке предельного множества*

$$L = C(x_0, f) = \left\{ y \in \overline{\mathbb{R}^n} : y = \lim_{k \to \infty} f(x_k), x_k \to x_0, x_k \in D \right\}. \tag{6.1}$$

Если

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|Q\|_{n-1}(r)} = \infty, \tag{6.2}$$

где

$$0 < \varepsilon_0 < d_0 = \sup_{x \in D} |x - x_0| = \sup_{x \in \partial D} |x - x_0|, \tag{6.3}$$

и

$$\|Q\|_{n-1}(r) = \left(\int\limits_{D\cap S(x_0,r)} Q^{n-1}\, d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{6.4}$$

то f продолжается по непрерывности в точку x_0.

Доказательство. Заметим, что $L \neq \varnothing$ в силу компактности расширенного пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$. По условию $\partial D'$ сильно достижима в некоторой точке $y_0 \in L$. Допустим, что найдется еще одна точка $z_0 \in L$, и пусть $U = B(y_0, r_0)$, где $0 < r_0 < |y_0 - z_0|$.

В силу локальной связности D в x_0 найдется последовательность окрестностей V_k точки x_0 со связными пересечениями $D_k = D \cap V_k$ и $\delta(V_k) \to 0$ при $k \to \infty$. В областях $D'_k = fD_k$ найдутся точки y_k и z_k с $|y_0 - y_k| < r_0$ и $|y_0 - z_k| > r_0$, $y_k \to y_0$ и $z_k \to z_0$ при $k \to \infty$. Пусть C_k — непрерывные кривые, соединяющие y_k и z_k в D'_k. Заметим, что по построению $\partial U \cap C_k \neq \varnothing$.

По условию сильной достижимости точки y_0 из D', найдется континуум $E \subset D'$ и число $\delta > 0$, для которых

$$M(\Delta(E, C_k; D')) \geqslant \delta$$

при больших k. Без ограничения общности, можно считать, что последнее условие выполнено для всех $k = 1, 2, \ldots$. Заметим, что $C = f^{-1}E$ является компактом в D, и потому $\varepsilon_0 = \mathrm{dist}(x_0, C) > 0$.

Пусть Γ_ε — семейство всех непрерывных путей в D, соединяющих сферы $S_{\varepsilon_0} = S(x_0, \varepsilon_0)$ и $S_\varepsilon = S(x_0, \varepsilon)$. Заметим, что $C_k \subset fB_\varepsilon$ для любого фиксированного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ при больших k, где $B_\varepsilon = B(x_0, \varepsilon)$. Таким образом, $M(f\Gamma_\varepsilon) \geqslant \delta$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

С другой стороны, величина $M(\Gamma_\varepsilon)$ равна емкости конденсатора в D' с обкладками $\overline{fB_\varepsilon}$ и $\overline{fD \setminus B_0}$, где $B_0 = B(x_0, \varepsilon_0)$, см., напр., [10, 26, 30]. Таким образом, по теореме 3.13 в [40]

$$M(f\Gamma_\varepsilon) \leqslant \frac{1}{M^{n-1}(f\Sigma_\varepsilon)},$$

где Σ_ε — семейство пересечений с областью D всех сфер $S(x_0, \rho)$, $\rho \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, поскольку $f\Sigma_\varepsilon \subset \Sigma(fS_\varepsilon, fS_{\varepsilon_0})$, где $\Sigma(fS_\varepsilon, fS_{\varepsilon_0})$ состоит из всех замкнутых множеств в D', отделяющих fS_ε и fS_{ε_0}. Наконец, по теореме 2.1 и условию (6.2) получаем, что $M(\Gamma_\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Полученное противоречие опровергает предположение, что предельное множество $C(x_0, f)$ состоит более чем из одной точки. $\square$

7. Об областях квазиэкстремальной длины

Область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, называется *областью квазиэкстремальной длины*, сокр. *QED областью*, если

$$M(\Delta(E, F; \overline{\mathbb{R}^n}) \leqslant K \cdot M(\Delta(E, F; D)) \tag{7.1}$$

для некоторого $K \geqslant 1$ и для всех пар непересекающихся континуумов E и F в D, см. [6].

Как хорошо известно, см., напр., [33, 10.12],

$$M(\Delta(E, F; \mathbb{R}^n)) \geqslant c_n \log \frac{R}{r}$$

для любых множеств E и F в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, пересекающих все сферы $S(x_0, \rho)$, $\rho \in (r, R)$. Поэтому непосредственно из определений, любая QED область имеет слабо плоскую границу. Таким образом, по следствию 5.1 QED области имеют сильно достижимые границы, а по следствию 5.2 они локально связны во всех своих граничных точках.

Область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, называется *равномерной областью*, если каждая пара точек x_1 и $x_2 \in D$ может быть соединена спрямляемой кривой γ в D такой, что

$$s(\gamma) \leqslant a \cdot |x_1 - x_2| \tag{7.2}$$

и

$$\min_{i=1,2} \, s(\gamma(x_i, x)) \leqslant b \cdot d(x, \partial D) \tag{7.3}$$

для всех $x \in \gamma$, где $\gamma(x_i, x)$ часть γ между x_i и x, см. [22]. Известно, что каждая равномерная область является QED областью, но существуют QED области, которые не являются равномерными, см. [6]. Ограниченные выпуклые области предоставляют простые примеры равномерных областей.

Теорема 7.1. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in \partial D$, $Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая функция, и пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке x_0. Если D и $D' = f(D)$ являются QED областями, и*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|Q\|_{n-1}(r)} = \infty, \tag{7.4}$$

где

$$0 < \varepsilon_0 < d_0 = \sup_{x \in D} |x - x_0| = \sup_{x \in \partial D} |x - x_0|, \tag{7.5}$$

$$\|Q\|_{n-1}(r) = \left(\int\limits_{D\cap S(x_0,r)} Q^{n-1}\, d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{7.6}$$

то f продолжим по непрерывности в точку x_0.

8. Сингулярные нуль-множества экстремальной длины

Замкнутое множество $X \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, называется *нуль-множеством экстремальной длины*, сокр. *NED множеством*, если

$$M(\Delta(E,F;\mathbb{R}^n)) = M(\Delta(E,F;\mathbb{R}^n\backslash X)) \tag{8.1}$$

для любых двух непересекающихся континуумов E и $F \subset \mathbb{R}^n\backslash X$.

Замечание 8.1. Известно, что если $X \subset \mathbb{R}^n$ является NED множеством, то

$$|X| = 0 \tag{8.2}$$

и X не разделяет локально $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$\dim X \leqslant n-2. \tag{8.3}$$

Обратно, если множество $X \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто и

$$H^{n-1}(X) = 0, \tag{8.4}$$

то X является NED множеством, см. [34].

Здесь через $H^{n-1}(X)$ обозначена $(n-1)$-мерная хаусдорфова мера множества X в $\mathbb{R}^n$. Также обозначим через $C(X,f)$ *предельное множество* отображения $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ для множества $X \subset \overline{D}$,

$$C(X,f) : = \left\{ y \in \overline{\mathbb{R}^n} : y = \lim_{k\to\infty} f(x_k),\ x_k \to x_0 \in X,\ x_k \in D \right\}. \tag{8.5}$$

Отметим, что дополнение NED множеств в $\mathbb{R}^n$ есть весьма частный случай QED областей, рассматривавшихся в предыдущей секции. Таким образом, рассуждая локально, получаем по теореме 7.1 следующее утверждение.

Теорема 8.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $X \subset D$, и пусть $f : D\backslash X \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке $x_0 \in X$. Если X и $C(X,f)$ являются NED множествами, и*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|Q\|_{n-1}(r)} = \infty, \tag{8.6}$$

где $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$,

$$\|Q\|_{n-1}(r) = \left(\int\limits_{|\,x-x_0|=r} Q^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{8.7}$$

то f *продолжим по непрерывности в точку* x_0.

9. О продолжении на границу обратных отображений

Лемма 9.1. *Пусть* D *и* D' *— области в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, z_1 *и* z_2 *различные точки на* ∂D *в* $\overline{\mathbb{R}^n}$, $z_1 \neq \infty$, *и* f *— нижний* Q*-гомеоморфизм области* D *на область* D', *и пусть функция* Q *интегрируема в степени* $n-1$ *по поверхностям*

$$D(r) = \{x \in D : |\,x - z_1| = r\} = D \cap S(z_1, r)$$

для некоторого множества E *чисел* $r \in (0, d)$, $d = |\,z_1 - z_2|$, *положительной линейной меры. Если* D *локально связна в точках* z_1 *и* z_2, *а* $\partial D'$ *слабо плоская, то в* $\overline{\mathbb{R}^n}$

$$C(z_1, f) \cap C(z_2, f) = \varnothing. \tag{9.1}$$

Здесь подразумевается, что $|z_1 - z_2| = \infty$, если $z_2 = \infty$.

Доказательство. Выберем $\varepsilon_0 \in (0, d)$ такое, что

$$E_0 = \{r \in E : r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)\}$$

имеет положительную линейную меру. Такой выбор возможен в силу счетной полуаддитивности линейной меры и исчерпания

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m,$$

где при $d < \infty$

$$E_m = \{r \in E : r \in (1/m, d - 1/m)\}.$$

Если $d = \infty$, то в последнем случае берем интервал $(1/m, m)$. Заметим, что каждая сфера $S(z_1, r)$, $r \in E_0$, отделяет точки z_1 и z_2 в $\mathbb{R}^n$, и $D(r)$, $r \in E_0$, отделяет их в D. Таким образом, по теореме 2.1 имеем, что

$$M(f\Sigma_\varepsilon) \ > \ 0, \tag{9.2}$$

где Σ_ε — семейство всех пересечений сфер $S(z_1, r)$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, с областью D.

Для $i = 1, 2$, пусть C_i — предельное множество $C(z_i, f)$ и предположим, что $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$. Поскольку D локально связна в z_1 и z_2, то существуют окрестности U_i точек z_i такие, что $W_i = D \cap U_i$ связны и $U_1 \subset B^n(z_1, \varepsilon)$ и $U_2 \subset \mathbb{R}^n \setminus B^n(z_1, \varepsilon_0)$.

Положим $\Gamma = \Gamma(\overline{W_1}, \overline{W_2}; D)$. Согласно (9.2)

$$M(f\Gamma) \leqslant \frac{1}{M^{n-1}(f\Sigma_\varepsilon)} < \infty, \tag{9.3}$$

см. теорему 3.13 в [40], ср. также [10] и [30].

Пусть $y_0 \in C_1 \cap C_2$. Без ограничения общности, считаем, что $y_0 \neq \infty$, ибо в противном случае можно всегда применить дополнительное преобразование Мёбиуса. Выберем $r_0 > 0$ такое, что $S(y_0, r_0) \cap fW_1 \neq \varnothing$ и $S(y_0, r_0) \cap fW_2 \neq \varnothing$.

По условию $\partial D'$ слабо плоская, и потому найдется $r_* \in (0, r_0)$ такое, что

$$M(\Delta(E, F; D')) \geqslant M_0,$$

где $M_0 > M(f\Gamma)$ — некоторое конечное число для всех континуумов E и F в D', пересекающих сферы $S(y_0, r_0)$ и $S(y_0, r_*)$. Однако, эти сферы можно соединить кривыми C_1 и C_2 в областях fW_1 и fW_2 и для этих кривых

$$M_0 \leqslant M(\Delta(C_1, C_2; D')) \leqslant M(f\Gamma). \tag{9.4}$$

Полученное противоречие опровергает предположение, что $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$. Лемма доказана. □

Теорема 9.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, D локально связна на ∂D, а $\partial D'$ слабо плоская. Если f является нижним Q-гомеоморфизмом D на D' с $Q \in L^{n-1}(D)$, то f^{-1} имеет непрерывное продолжение на $\overline{D'}$.*

Доказательство. По теореме Фубини множество

$$E = \{r \in (0, d) : Q|_{D(r)} \in L^{n-1}(D(r))\}$$

имеет положительную линейную меру, поскольку $Q \in L^{n-1}(D)$, и заключение теоремы является непосредственным следствием леммы 9.1. □

Замечание 9.1. Как видно из доказательства, в действительности достаточно потребовать в теореме 9.1, чтобы функция Q была интегрируема со степенью $n-1$ только в некоторой окрестности ∂D.

Лемма 9.2. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке $x_0 \in \overline{D}$. Тогда*

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|Q\|_{n-1}(r)} < \infty, \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad \varepsilon_0 \in (0, d_0), \tag{9.5}$$

где

$$d_0 = \sup_{x \in D} |\, x - x_0|, \tag{9.6}$$

и

$$\|Q\|_{n-1}(r) = \left(\int\limits_{D(r)} Q^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{9.7}$$

L_{n-1}-норма функции Q по $D(r) = D(x_0, r) = \{x \in D : |\, x - x_0| = r\} = D \cap S(x_0, r)$.

Доказательство. Пусть $x_1 \in D(\varepsilon)$ и $x_2 \in D(\varepsilon_0)$. Обозначим через C_1 и C_2 компакты $f(D(\varepsilon) \cap \overline{B(x_1, r_1)})$ и $f(D(\varepsilon_0) \cap \overline{B(x_2, r_2)})$, где $r_1 < \operatorname{dist}(x_1, \partial D)$ и $r_2 < dist(x_2, \partial D)$. Тогда по Хессе и Циммеру

$$M(\Gamma(C_1, C_2; fD)) \leqslant \frac{1}{M^{n-1}(f\Sigma_\varepsilon)},$$

где $\Sigma_\varepsilon = \{D(r)\}_{r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)}$, а по лемме 1.15 в [25, с. 16], $M(\Gamma(C_1, C_2; fD))$ > 0, поскольку C_1 и C_2 невырожденные непересекающиеся континуумы в области $D' = fD$. Следовательно, $M^{n-1}(f\Sigma_\varepsilon) < \infty$, и, таким образом, заключение леммы следует из теоремы 2.1. □

Следствие 9.1. *Если $f : D \to \mathbb{R}^n$ нижний Q-гомеоморфизм в точке $x_0 \in \overline{D}$ с*

$$\int\limits_{0}^{\delta_0} \frac{dr}{\|Q\|_{n-1}(r)} = \infty$$

для некоторого $\delta_0 \in (0, d_0)$, то

$$\int\limits_{0}^{\delta} \frac{dr}{\|Q\|_{n-1}(r)} = \infty$$

для всех $\delta \in (0, d_0)$.

Лемма 9.2 и следствие 9.1 показывают, в частности, что не для любой измеримой функции $Q : D \to (0,\infty)$ существуют нижние Q-гомеоморфизмы. Неравенство (9.5) является одним из необходимых условий этого.

Комбинируя леммы 9.1 и 9.2, немедленно получаем следующее утверждение.

Теорема 9.2. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, D локально связна на ∂D, а $D' = f(D)$ имеет слабо плоскую границу, и пусть $Q : D \to (0,\infty)$ — измеримая функция такая, что условие*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\|Q\|_{n-1}(x_0,r)} = \infty$$

выполнено для всех $x_0 \in \partial D$ при некотором $\delta(x_0) \in (0, d(x_0))$, где

$$d(x_0) = \sup_{x\in D} |\,x - x_0|,$$

и

$$\|Q\|_{n-1}(x_0,r) = \left(\int\limits_{D(r)} Q^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

L_{n-1}-норма функции Q на поверхности $D(r) = D(x_0,r) = \{x \in D : |\,x - x_0| = r\}$. Тогда для любого нижнего Q-гомеоморфизма $f : D \to D'$ обратное отображение f^{-1} имеет непрерывное продолжение на замыкание $\overline{D'}$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$.

10. Гомеоморфное продолжение на границу

Комбинируя результаты секций 6–9, получаем следующие утверждения.

Теорема 10.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $Q : D \to (0,\infty)$ — измеримая функция, и пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — нижний Q-гомеоморфизм в D. Предположим, что область D локально связна на ∂D, а область $D' = f(D)$ имеет слабо плоскую границу. Если в каждой точке $x_0 \in \partial D$*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\|Q\|_{n-1}(x_0,r)} = \infty \tag{10.1}$$

для некоторого $\delta(x_0) \in (0, d(x_0))$, где

$$d(x_0) = \sup_{x\in D} |\,x - x_0|, \tag{10.2}$$

$$\|Q\|_{n-1}(x_0,r)=\Bigg(\int\limits_{D\cap S(x_0,r)} Q^{n-1}(x)\,d\mathcal{A}\Bigg)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{10.3}$$

то f имеет гомеоморфное продолжение на замыкание $\overline{D}$ на $\overline{D}\,'$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Отсюда мы, в частности, получаем следующее обобщение известной теоремы Геринга–Мартио о гомеоморфном продолжении на границу квазиконформных отображений между QED областями, см. [6, с. 196], ср. также [19, с. 36].

Теорема 10.2. *Пусть D и D' — области со слабо плоскими границами в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, а $Q:D\to(0,\infty)$ — измеримая функция, удовлетворяющая условию (10.1) в каждой точке $x_0\in\partial D$. Тогда любой нижний Q-гомеоморфизм f между областями D и D' допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f}:\overline{D}\to\overline{D'}$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$.*

Теорема 10.3. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $Q:D\to(0,\infty)$ — измеримая функция, и пусть $f:D\backslash X\to\overline{\mathbb{R}^n}$, $X\subset D$, — нижний Q-гомеоморфизм. Если X и $C(X,f)$ являются NED множествами, и условие* (10.1) *имеет место в каждой точке $x_0\in X$ для $\delta(x_0)<$ $\operatorname{dist}(x_0,\partial D)$, где*

$$\|Q\|_{n-1}(x_0,r)=\Bigg(\int\limits_{|x-x_0|=r} Q^{n-1}(x)\,d\mathcal{A}\Bigg)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{10.4}$$

то f имеет гомеоморфное продолжение в D в смысле $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Замечание 10.1. В частности, заключение теоремы 10.3 имеет место, если X — замкнутое множество в D с

$$H^{n-1}(X)=0=H^{n-1}(C(X,f)), \tag{10.5}$$

а условие (10.1) имеет место, если

$$Q(x)=O\Big(\log\frac{1}{|x-x_0|}\Big) \tag{10.6}$$

при $x\to x_0$, или более общо, в терминах интегральных средних по сферам, если

$$\fint\limits_{S(x_0,r)} Q^{n-1}(x)\,d\mathcal{A}=O\Big(\log^{n-1}\frac{1}{r}\Big) \tag{10.7}$$

при $r\to 0$, где Q подразумевается продолженной нулем вне D.

Таким образом, результаты статьи распространяют хорошо известные теоремы Дж. Вяйсяля, М. Вуоринена, Ф. Геринга, О. Мартио, Р. Някки и др. для квазиконформных отображений на нижние Q-гомеоморфизмы, которые являются их естественным обобщением, см., напр., [6, 19, 25, 33, 37, 38], ср. также [11, 12, 20, 21, 28].

Ввиду ограничений на объем, приложения полученных результатов к теории отображений класса Соболева, с конечным искажением площади и конечно билипшицевым отображениям будут предметом отдельной статьи, см. [16].

Литература

[1] C. Andreian Cazacu, *Some formulae on the extremal length in n-dimensional case*, Proc. Rom.-Finn. Sem. on Teichmüller Spaces and Quasiconformal Mappings (Brazov, 1969), pp. 87–102, Publ. House of Acad. Soc. Rep. Romania, Bucharest, 1971.

[2] Ch. Bishop, V. Ya. Gutlyanski, O. Martio, M. Vuorinen, *On conformal dilatation in space* // Int. J. Math. Sci., **22** (2003), 1397–1420.

[3] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer, Berlin etc., 1969.

[4] F. W. Gehring, *Rings and quasiconformal mappings in space* // Trans. Amer. Math. Soc., **103** (1962), N 3, 353–393.

[5] F. W. Gehring, *Quasiconformal mappings, in Complex Analysis and its Applications*, V. 2, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1976.

[6] F. W. Gehring and O. Martio, *Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings* // J. d'Anal. Math., **24** (1985), 181–206.

[7] A. Golberg, *Homeomorphisms with finite mean dilatations* // Contemporary Math. **382** (2005), 177–186.

[8] V. Gutlyanski, V. Ryazanov, *On the boundary correspondence under quasiconformal mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. A1. Math., **21** (1996), N 1, 167–178.

[9] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.

[10] J. Hesse, *A p-extremal length and p-capacity equality* // Ark. Mat., **13** (1975), 131–144.

[11] A. Ignat'ev, V. Ryazanov, *Finite mean oscillation in the mapping theory* // Ukrainian Math. Bull., **2** (2005), N 3, 403–424.

[12] A. Ignat'ev, V. Ryazanov, *To the theory of the boundary behavior of space mappings* // Ukrainian Math. Bull., **3** (2006), N 2, 199–211.

[13] T. Iwaniec, G. Martin, *Geometrical Function Theory and Non-linear Analysis*, Clarendon Press, Oxford, 2001.

[14] T. Iwaniec, V. Šverák, *On mappings with integrable dilatation* // Proc. Amer. Math. Soc., **118**, (1993), 181–188.

[15] Д. А. Ковтонюк, В. Рязанов, *О границах пространственных областей* // Труды ИПММ НАН Украины, **13** (2006), 110–120.

[16] D. Kovtonyuk, V. Ryazanov, *On the theory of mappings with finite area distortion* // J. Anal. Math., **104** (2008), 291–306.

[17] O. Lehto, K. I. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*, New York–Heidelberg, Springer, 1973.

[18] A. J. Lohwater, *The boundary behavior of a quasiconformal mapping* // Rational Mech. Anal., **5** (1956), 335–342.

[19] O. Martio, M. Vuorinen, *Whitney cubes, p-capacity and Minkowski coutent* // Expo. Math., **5** (1987), 17–40.

[20] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Mappings with finite length distortion* // J. Anal. Math., **93** (2004), 215–236.

[21] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On Q-omeomorphisms* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., **30** (2005), 49–69.

[22] O. Martio, J. Sarvas, *Injectivity theorems in plane and space* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., **4**, (1978/1979), 383–401.

[23] В. М. Миклюков, *Об устранимых особенностях квазиконформных отображений в пространстве* // Докл. АН СССР, **188** (1969), N 3, 525–527.

[24] В. М. Миклюков, *О некоторых граничных задачах теории конформных отображений* // Сиб. матем. ж., **18** (1977), N 5, 1111–1124.

[25] R. Näkki, *Boundary behavior of quasiconformal mappings in n-space distances* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., **484** (1970), 1–50.

[26] M. Ohtsuka, *Extremal length and precise functions*, Gakuto International Series, Math. Sci. & Appl., **19**, 2003, 343 pp.

[27] T. Rado, P. V. Reichelderfer, *Continuous transformations in analysis*, Berlin etc., Springer, 1955.

[28] V. Ryazanov and R. Salimov, *Weakly flat spaces and boundaries in the mapping theory* // Ukrainian Math. Bull., **4** (2007), N 2, 199–234.

[29] S. Saks, *Theory of the Integral*, New York, Dover Publ. Inc., 1964.

[30] V. A. Shlyk, *On the equality between p-capacity and p-modulus* // Sibirsk. Mat. Zh., **34** (1993), N 6, 216–221; transl. in Siberian Math. J., **34** (1993), N 6, 1196–1200.

[31] U. Srebro, E. Yakubov, *Boundary behavior of conformal and quasiconformal mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., **8** (1983), N 1, 139–148.

[32] П. М. Тамразов, *Модули и экстремальные метрики в неориентированных и скрученных римановых многообразиях* // Укр. матем. ж., **50** (1998), N 10, 1388–1398.

[33] J. Väisälä, *Lectures on $n-$Dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes in Math. **229**, Berlin etc., Springer–Verlag, 1971.

[34] J. Väisälä, *On the null-sets for extremal distances* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., **322** (1962), 1–12.

[35] С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн, *О граничном соответствии при квазиконформных отображениях пространственных областей* // Сиб. матем. ж., **16** (1975), N 3, 630–633.

[36] M. Vuorinen, *Conformal Geometry and Quasiregular Mappings*, Lecture Notes in Math. **1319**, Berlin etc., Springer–Verlag, 1988.

[37] M. Vuorinen, *Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n-space* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., Dissertattiones, no. **11**, 1976, 44 pp.

[38] M. Vuorinen, *Lower bounds for the moduli of path families with applications to nontangential limits of quasiconformal mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., **2** (1979), 279–291.

[39] R. L. Wilder, *Topology of Manifolds*, AMS, New York, 1949.

[40] W. P. Ziemer, *Extremal length and conformal capacity* // Trans. Amer. Math. Soc., **126** (1967), N 3, 460–473.

Сведения об авторах

Денис Александрович Ковтонюк, Владимир Ильич Рязанов	Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Розы Люксембург 74, Донецк, 83114, Украина, *E-Mail:* denis_kovtonyuk@bk.ru, vlryazanov1@rambler.ru