Український математичний вісник
Том 5 **(2008)**, № 1, 116 – 145

Регулярность решений вырождающихся параболических уравнений с неоднородной плотностью

Александр В. Мартыненко, Анатолий Ф. Тедеев

(*Представлена С. Д. Ивасишеним*)

Аннотация. В работе изучается свойство регулярности решений вырождающегося параболического уравнения с двойной нелинейностью и с неоднородной плотностью. При оптимальных условиях на функцию плотности установлена локальная гельдеровость решений.

2000 MSC. 35K65, 35K55, 35B45, 35B65.

Ключевые слова и фразы. Параболическое уравнение, двойная нелинейность, неоднородная плотность, гельдеровость.

1. Введение

Основной целью данной работы является доказательство гельдеровости обобщенных решений некоторого класса нелинейных параболических уравнений, модельным представителем которого является уравнение

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}, \tag{1.1}$$

где $\rho(x) = |x|^{-l}$, $l \geq 0$, $Du \equiv (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$.

Уравнение (1.1) принято также называть параболическим уравнением с неоднородной плотностью. При $\lambda = 1$ (1.1) изучалось в [1,2]. В этих работах изучались свойства решений задачи Коши при больших значениях времени. В работах [3] и [4] изучался вопрос исчезновения носителя за конечное время при определенном поведении $\rho(x)$ на бесконечности. Дальнейшие ссылки, касающиеся качественного поведения решения, можно найти в работе [5], где результаты работ [3, 4] были значительно обобщены на уравнение вида (1.1) при $\lambda \neq 1$. В

Статья поступила в редакцию 25.10.2007

статье [6] было исследовано поведение решения вблизи времени обострения задачи Коши для

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) + u^p. \tag{1.2}$$

Отметим, что в вопросах асимптотического поведения решения в равномерной метрике существенную роль играет свойство гельдеровости решения (см. [7, 8]). Регулярность решений уравнения (1.1) в случае $l = 0$ была исследована в работах [9–11], где было доказано, что обобщенное решение такого уравнения является функцией Гельдера из пространства $C^{\alpha,\frac{\alpha}{\lambda+1}}$, $\alpha \in (0, 1)$. Кроме того отметим классическую монографию [19], где гельдеровость решений была впервые установлена для широкого класса квазилинейных параболических уравнений с линейным ростом по $|Du|$.

Настоящая работа близка по духу к [12–14], где вопрос о регулярности решений изучался для уравнений типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(|x|^l u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du). \tag{1.3}$$

Наконец, отметим, что изучению гельдеровости решений уравнения (1.3) при $\lambda = m = 1$ были посвящены работы [15] и [16].

При изучении уравнений типа (1.1) и (1.3) особый интерес представляет вопрос о качественной зависимости различных свойств решения от величины l. В частности, в [15] для уравнения (1.3) при $m = \lambda = 1$, $l = 2$ указано частное решение

$$O(x,t) = |x|^{-1}\sum_{i=1}^{N} x_i e^{-(N-1)t}, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1},$$

которое будучи ограниченным, терпит разрыв при $x = 0$. Отсюда следует, что, вообще говоря, ограниченное обобщенное решение уравнения (1.3) не обязано быть непрерывным при $l \geq \lambda + 1$. Это утверждение справедливо и для уравнения (1.1), так как легко проверить, что функция $O(x,t)$ является также решением (1.1) при $m = \lambda = 1$, $l = 2$.

Перейдем к постановке задачи и формулировке основных результатов. Рассмотрим класс нелинейных параболических уравнений

$$\begin{gathered}\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x,t,u,Du) = a_0(x,t,u,Du),\\ (x,t) \in \Omega_T \equiv \Omega \times (0,T), \quad 0 < T < \infty,\end{gathered} \tag{1.4}$$

где Ω — произвольная область в $\mathbb{R}^N$, $\rho(x)$ — неотрицательная локально интегрируемая в $\mathbb{R}^N$, функции $a_i(x,t,u,\zeta) : \Omega_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $i = 0,1,\ldots,n$ удовлетворяют условию Каратеодори. Кроме того, от коэффициентов (1.4) потребуем выполнения следующих условий:

A_1) $\rho(x) \in A_p$ для некоторого $p \in (1,\infty)$, т.е. для произвольного шара $B_R(x_0)$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{1}{|B_R(x_0)|}\int\limits_{B_R(x_0)} \rho(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B_R(x_0)|}\int\limits_{B_R(x_0)} \rho(x)^{\frac{1}{1-p}}dx\right)^{p-1} \le C,$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от R и x_0,

A_2) найдется $\nu \in (\lambda+1,\infty)$ такое, что для произвольных $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $0 < s \le h$ справедливо

$$\frac{\rho(B_s(x_0))}{\rho(B_h(x_0))} \le A\Big(\frac{s}{h}\Big)^{\frac{(N-\lambda-1)\nu}{\lambda+1}},$$

где $\rho(\Omega) = \int_\Omega \rho(x)dx$, постоянная $A > 0$ не зависит от s, h и x_0,

A_3) $\sum_{i=1}^N a_i(x,t,u,\zeta)\zeta_i \ge C_0|u|^{m-1}|\zeta|^{\lambda+1} - \varphi_0(x,t)$,

A_4) $|a_i(x,t,u,\zeta)| \le C_1|u|^{m-1}|\zeta|^{\lambda} + |u|^{\frac{m-1}{\lambda+1}}\varphi_1(x,t),\ i = 1,\ldots,n$,

A_5) $|a_0(x,t,u,\zeta)| \le C_2|u|^{m-1}|\zeta|^{\lambda+1} + \varphi_2(x,t)$.

В условиях A_2)–A_5) C_0, C_1, C_2 — положительные постоянные, $m > 1$, $N-1 > \lambda > 1$. Для функций $\varphi_i(x,t) > 0, i = 0,1,2$, определенных в Ω_T, потребуем выполнения следующего условия

$$\Upsilon(x,t) \equiv \rho(x)^{\frac{-\overline{q}}{\overline{q}-1}}[\varphi_0(x,t) + \varphi_1(x,t)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} + \varphi_2(x,t)] \in L_{\overline{q},\overline{r}}(\Omega_T),$$

где

$$\overline{q} = \frac{q}{q-(\lambda+1)(1+\kappa)}, \qquad \overline{r} = \frac{r}{r-(\lambda+1)(1+\kappa)},$$

$$\frac{r\nu}{q(\lambda+1)} = \frac{\lambda+1-\nu}{\lambda+1-q}, \quad q \in [\lambda+1,\nu], \quad r \in [\lambda+1,\infty], \quad \kappa > 0. \quad (1.5)$$

Всюду далее величины λ, m, ν, p, C, A, C_0, C_1, C_2, r, κ, $\|\Upsilon\|_{\overline{q},\overline{r},\Omega_T}$ будем называть параметрами уравнения (1.4).

Замечание 1.1. Из условия A_1) следует условие удвоения [18]

A_6) $\forall\, x_0 \in R^N\ \forall\, h > 0 \quad \rho(B_{2h}(x_0)) \le C\rho(B_h(x_0))$.

Условия A_1) и A_2) задают достаточно широкий класс функций. В частности, если функция $\rho(s) : [0, \infty) \to [0, \infty)$ удовлетворяет хорошо известному условию

$$0 < -\frac{\rho'(s)s}{\rho(s)} \le \mu, \qquad \mu = \text{const} > 0, \tag{1.6}$$

то непосредственно можно проверить, что

$$\forall\, \mu \in (0, N) \quad \forall\, p > 1 \qquad \rho(|x|) \in A_p, \quad \text{т.е. выполнено условие } A_1)\ ,$$

$$\forall\, \mu \in (0, \lambda+1) \quad \forall\, \nu \in \Big(\lambda+1, \frac{(N-\mu)(\lambda+1)}{N-\lambda-1}\Big) \text{ выполнено условие } A_2).$$

В свою очередь легко видеть, что условию (1.6) удовлетворяет, например, функция $\rho(s) = s^{-\alpha} ln^{-q}(1+s)$ при

$$\alpha > 0, \quad q > -\alpha, \quad \mu = \begin{cases} \alpha & \text{если } -\alpha < q \le 0, \\ \alpha + q & \text{если } q > 0. \end{cases}$$

Более подробные сведения о свойствах функций, удовлетворяющих условиям A_1), A_2), можно найти, например, в монографии [18].

Определение 1.1. *Будем говорить, что $u(x,t)$ есть обобщенное решение (или просто решение) уравнения (1.4) в Ω_T, если*

$$\rho^{\frac{1}{2}} u \in C_{loc}(0, T; L^2_{loc}(\Omega)), \qquad |u|^{\frac{m-1}{\lambda}} |Du| \in L^{\lambda+1}_{loc}(\Omega_T)$$

и для любой компактной области $D \subset \Omega$ и произвольных $t_1, t_2 \in (0, T]$ выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_D \rho(x) u(x, t_2) \varphi(x, t_2)\, dx - \int\limits_D \rho(x) u(x, t_1) \varphi(x, t_1)\, dx$$
$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_D \Big\{ -\rho(x) u \varphi_t + \sum_{i=1}^N a_i(x, t, u, Du) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Big\}\, dx\, dt$$
$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_D a_0(x, t, u, Du) \varphi\, dx\, dt,$$

для любой пробной функции $\varphi(x,t)$ такой, что

$$\rho^{\frac{1}{2}} \varphi \in W^{1,2}_{loc}(0, T; L^2(D)), \qquad \varphi \in L^{\lambda+1}_{loc}(0, T; W^{1,\lambda+1}_0(D)).$$

Обозначим через Γ параболическую границу цилиндра Ω_T, т.е.

$$\Gamma \equiv (\partial\Omega \times (0,T]) \cup (\Omega \times \{0\}).$$

Основной результат данной работы заключает в себе следующая

Теорема 1.1. *Пусть $u(x,t)$ — локально ограниченное слабое решение уравнения (1.4) и выполнены условия $A_1)$–$A_5)$. Тогда найдутся постоянные $K > 1$ и $\alpha \in (0,1)$ такие, что для произвольной компактной области $D \subset \Omega_T$ и любой пары точек $(x_1,t_1),(x_2,t_2) \in D$ справедливо*

$$|u(x_1,t_1) - u(x_2,t_2)| \le K(|x_1 - x_2|^\alpha + |t_1 - t_2|^{\frac{\alpha}{\lambda+1+N(p-1)}}).$$

Здесь постоянная Гельдера K зависит от параметров уравнения, расстояния до границы $\operatorname{dist}(D,\Gamma)$, нормы $\|u\|_{\infty,D}$ и $\inf_{x_0\in D}\rho(B_1(x_0))$, а показатель α зависит лишь от параметров уравнения, нормы $\|u\|_{\infty,D}$ и $\sup_{x_0\in D}\rho(B_1(x_0))$.

Если $\varphi_0(x,t) = \varphi_1(x,t) = \varphi_2(x,t) = 0$, то α не зависит от $\sup_{x_0\in D}\rho(B_1(x_0))$.

2. Вспомогательные утверждения

Введем обозначения

$$B \equiv \{(x,t) \in R^N : |x_0 - x| \le R\}, \quad Q \equiv B \times \{t_0 - d, t_0\}, \quad d > 0,$$

$\zeta(x,t) : Q \to R$, $\xi(x) : B \to R$ — гладкие срезающие функции такие, что

$$0 \le \zeta(x,t), \xi(x) \le 1, \quad \xi(x), \zeta(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial B,$$

$$(u-k)^\pm \equiv \max\{\pm(u-k), 0\}, \quad H_k^\pm \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{(x,t)\in Q} |(u-k)^\pm|,$$

$$\Psi(H_k^\pm, (u-k)^\pm, \sigma) \equiv \ln^+\Big\{\frac{H_k^\pm}{H_k^\pm - (u-k)^\pm + \sigma}\Big\}, \qquad \sigma > 0,$$

$$A_{k,R}^\pm(t) \equiv \{x \in B : (u(x,t) - k)^\pm > 0\}.$$

Пусть E — множество в $R^N \times R$, тогда обозначим

$$|E|_\rho \equiv \iint\limits_E \rho(x)\, dx\, d\tau,$$

Проводя рассуждения аналогично работе [9], можно получить следующее

Предложение 2.1. *Пусть u — локально ограниченное слабое решение уравнения* (1.4). *Тогда существуют положительные постоянные γ и δ такие, что для любого цилиндра $Q \subset \Omega_T$ уровня k, удовлетворяющего $H_k^{\pm} \le \delta$, и чисел r, q, κ, определенных в* (1.5), *справедливы неравенства*

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{ess\,sup}_{t_0-d\le t\le t_0} \int_B \rho(x)[(u-k)^{\pm}]^2\zeta^{\lambda+1}\,dx
&+ \iint_Q |u|^{m-1}|D(u-k)^{\pm}|^{\lambda+1}\,dx\,dt \\
&\le \int_B \rho(x)[(u-k)^{\pm}]^2\zeta^{\lambda+1}(x,t_0-d)\,dx \\
&+ \gamma \iint_Q |u|^{m-1}|(u-k)^{\pm}|^{\lambda+1}|D\zeta|^{\lambda+1}\,dx\,dt \\
&+ \gamma \iint_Q \rho(x)[(u-k)^{\pm}]^2\zeta^{\lambda}\zeta_t\,dx\,dt \\
&+ \gamma \left\{ \int_{t_0-d}^{t_0} \rho(A_{k,R}^{\pm}(t))^{\frac{r}{q}}\,dt \right\}^{\frac{\lambda+1}{r}(1+\kappa)},
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{ess\,sup}_{t_0-d\le t\le t_0} \int_B \rho(x)\Psi^2(H_k^{\pm},(u-k)^{\pm},\sigma)\xi^{\lambda+1}\,dx
&\le \int_B \rho(x)\Psi^2(H_k^{\pm},(u-k)^{\pm},\sigma)(x,t_0-d)\xi^{\lambda+1}\,dx \\
&+ \gamma \iint_Q |u|^{m-1}[\Psi']^{1-\lambda}\Psi(H_k^{\pm},(u-k)^{\pm},\sigma)|D\xi|^{\lambda+1}\,dx\,dt \\
&+ \gamma \frac{1}{\sigma^2}\Big(1+ln\frac{H_k^{\pm}}{\sigma}\Big) \left\{ \int_{t_0-d}^{t_0} \rho(A_{k,R}^{\pm}(t))^{\frac{r}{q}}\,dt \right\}^{\frac{\lambda+1}{r}(1+\kappa)}.
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Для дальнейшего нам понадобится весовое неравенство Соболева–Пуанкаре [17].

Предложение 2.2. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица в шаре B и $\operatorname{supp} f(x) \subset B$. Если для $\rho(x)$ выполнены усло-*

вия A_2) и A_6), то справедливо неравенство

$$\left(\frac{1}{\rho(B)}\int\limits_B \rho(x)|f|^\nu\,dx\right)^{\frac{1}{\nu}} \le C\left(\frac{1}{R^{N-\lambda-1}}\int\limits_B |Df|^{\lambda+1}\,dx\right)^{\frac{1}{\lambda+1}}, \qquad (2.9)$$

где постоянная C не зависит от f, R и x_0.

Пользуясь неравенством (2.9), легко получить следующее

Предложение 2.3. *Пусть выполнены условия предложения* (2.2), *тогда для q и r, удовлетворяющих* (1.5), *справедливы неравенства*

$$\left[\frac{R^{\frac{N-\lambda-1}{\lambda+1}}}{\rho(B)^{\frac{1}{\nu}}}\right]^{\frac{\nu(\lambda+1-q)}{q(\lambda+1-\nu)}} \|\rho^{\frac{1}{q}} f\|_{q,r,Q} \le C \sup_{t_0-d<t<t_0} \|\rho^{\frac{1}{\lambda+1}} f\|_{\lambda+1,B} + C\|Df\|_{\lambda+1,Q}, \qquad (2.10)$$

$$\left[\frac{R^{\frac{N-\lambda-1}{\lambda+1}}}{\rho(B)^{\frac{1}{\nu}}}\right]^{\frac{\nu(\lambda+1)}{2\nu-\lambda-1}} |F_+|_\rho^{\frac{\nu}{2\nu-\lambda-1}-1} \|\rho^{\frac{1}{\lambda+1}} f\|^{\lambda+1}_{\lambda+1,Q} \le C \sup_{t_0-d<t<t_0} \|\rho^{\frac{1}{\lambda+1}} f\|^{\lambda+1}_{\lambda+1,B} + C\|Df\|^{\lambda+1}_{\lambda+1,Q}, \qquad (2.11)$$

где $F_+ = \{(x,t)\in Q : f(x,t) > 0\}$, постоянная C не зависит от x_0, t_0, R, d и f.

Очевидно, что найдутся числа p и ν_1 такие, что

$$1 < p < \lambda+1, \quad p < \nu_1 < \infty, \quad \frac{(N-\lambda-1)\nu}{\lambda+1} = \frac{(N-p)\nu_1}{p}, \qquad (2.12)$$

следовательно, в условии A2) можно заменить $\lambda+1$, ν на p, ν_1, соответственно. Таким образом, для липшицевой функции $w(x)$ справедливо [17] неравенство

$$\left(\frac{1}{\rho(B)}\int\limits_B \rho(x)|w-\overline{w}|^{\nu_1}\,dx\right)^{\frac{1}{\nu_1}} \le CR\left(\frac{1}{R^N}\int\limits_B |Dw|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (2.13)$$

где $\overline{w} \equiv \frac{1}{\rho(B)}\int_B \rho w dx$, постоянная C не зависит от x_0, R и w.

Следствием (2.13) является следующий весовой аналог неравенства Де Джорджи.

Предложение 2.4. *Пусть $\rho(x)$ удовлетворяет условиям A_2), A_6), f — липшицева функция, $k < l$. Тогда найдется достаточно близкое к $\lambda + 1$ число $p < \lambda + 1$, для которого справедливо неравенство*

$$(l-k)^p \rho(A_l) \leq \frac{C}{R^{N-p}} \frac{\rho(B)^{p+1}}{\rho(B \setminus A_k)^p} \int\limits_{A_k \setminus A_l} |Df|^p \, dx, \tag{2.14}$$

где $A_s \equiv \{x \in B : f(x) > s\}$, постоянная C не зависит от x_0, R и f.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \in B \setminus A_k, \\ f(x) - k & \text{при} \quad x \in A_k \setminus A_l \ , \\ l - k & \text{при} \quad x \in A_l. \end{cases}$$

Непосредственное вычисление дает

$$\begin{aligned} \overline{w} = \frac{1}{\rho(B)} \int\limits_{A_l} \rho(x)(l-k) \, dx + \frac{1}{\rho(B)} \int\limits_{A_k \setminus A_l} \rho(x)(f(x) - k) \, dx \\ \leq \frac{l-k}{\rho(B)} [\rho(A_l) + \rho(A_k \setminus A_l)] = (l-k) \frac{\rho(A_k)}{\rho(B)} \leq l - k = w(x) \end{aligned}$$

при $x \in A_l$, поэтому из (2.13) получаем

$$\left(\frac{1}{\rho(B)} \int\limits_{A_l} \rho(x) \Big[l - k - (l-k) \frac{\rho(A_k)}{\rho(B)} \Big]^{\nu_1} dx \right)^{\frac{1}{\nu_1}} \leq C R^{\frac{p-N}{p}} \left(\int\limits_{V} |Df|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.15}$$

Так как $\nu_1 > p$, то левую часть (2.15) можно оценить снизу величиной

$$(l-k) \frac{\rho(B \setminus A_k)}{\rho(B)} \Big(\frac{\rho(A_l)}{\rho(B)} \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Предложение доказано. □

Отметим также следующие важные свойства функции $\rho(x)$ [18].

Предложение 2.5. *Пусть $\rho(x)$ удовлетворяет условию A_1), E — произвольное измеримое подмножество шара B. Тогда найдутся $g \in (0, 1]$ и постоянные C_1, C_2, не зависящие от x_0, R, E такие, что*

$$\frac{\rho(E)}{\rho(B)} \leq C_1 \Big(\frac{|E|}{|B|} \Big)^g, \tag{2.16}$$

$$\Big(\frac{|E|}{|B|} \Big)^p \leq C_2 \frac{\rho(E)}{\rho(B)}. \tag{2.17}$$

3. Первая альтернатива

Пусть (x_0, t_0) — произвольная точка области Ω_T, $R_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)$, $0 < R < \min\{1, R_0\}$, $B_r = \{x \in R^N : |x - x_0| < r\}$. Введем в рассмотрение следующий цилиндр

$$\pi = \frac{\kappa\nu(N-\lambda-1)}{\lambda+1}\Big[(1+\kappa)\frac{\lambda+1}{r} + \frac{2}{m+\lambda-2}\Big]^{-1},$$

$$Q_R^\pi \equiv B_R \times \Big\{t_0 - R^{\lambda+1-\pi}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}, t_0\Big\}.$$

Обозначим

$$\mu_+ = \operatorname*{ess\,sup}_{(x,t)\in Q_R^\pi} u(x,t), \qquad \mu_- = \operatorname*{ess\,inf}_{(x,t)\in Q_R^\pi} u(x,t).$$

Пусть ω — произвольное число, удовлетворяющее

$$\omega > \operatorname*{ess\,osc}_{(x,t)\in Q_R^\pi} u(x,t) = \mu_+ - \mu_-,$$

тогда введем обозначения $M = \max\{\|u\|_{\infty, Q_R^\pi}; \omega\}$,

$$\theta = \Big(\frac{2^{s^*}}{\omega}\Big)^{\lambda-1}\frac{1}{M^{m-1}}, \qquad \eta = \Big(\frac{2^{s_0}}{\omega}\Big)^{\lambda-1}\frac{1}{M^{m-1}}.$$

Здесь s_0 — наименьшее положительное число, для которого

$$\|u\|_{\infty, Q_R^\pi} \le 2^{s_0-1}\delta,$$

$s^* > s_0$ — достаточно большое число, которое будет выбрано позже.

В дальнейшем нам также понадобятся цилиндры

$$Q_r^\theta \equiv B_r \times \Big\{t_0 - \theta r^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}, t_0\Big\},$$

$$\overline{Q}_r^\eta \equiv B_r \times \Big\{\bar t - \eta r^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}, \bar t\Big\}.$$

Будем предполагать $\overline{Q}_R^\eta \subset Q_R^\theta$, для чего необходимо

$$\bar t \le t_0, \qquad \bar t - \eta R^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|} \ge t_0 - \theta R^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}.$$

Заметим, что $Q_R^\theta \subset Q_R^\pi$, если выполнено условие $\theta^{-1} \ge R^\pi$, которое в силу определения M является следствием неравенства

$$\Big(\frac{\omega}{2^{s^*}}\Big)^{m+\lambda-2} \ge R^\pi.$$

Замечание 3.1. Не нарушая общности будем считать, что $\mu_+ \geq |\mu_-|$, тогда $M = \max\{\mu_+; \omega\}$.

Замечание 3.2. Ради простоты изложения будем предполагать выполнение следующего условия

$$\forall\, x \in B_R \qquad \rho(B_R) \leq C|B_R|\rho(x), \tag{3.18}$$

которое является аналогом условия (3) в [14]. Если (3.18) не выполнено, то данное ниже доказательство теоремы 1 можно модифицировать так, как это сделано в [14].

Лемма 3.1. *Существует число $\beta_0 \in (0,1)$ не зависящее от ω, R, s^*, такое, что если для некоторого цилиндра $\overline{Q}^\eta_R$ выполнено*

$$\left|(x,t) \in \overline{Q}^\eta_R : u(x,t) < \mu_- + \frac{\omega}{2^{s_0}}\right|_\rho \leq \beta_0 |\overline{Q}^\eta_R|_\rho, \tag{3.19}$$

то справедливо, по крайней мере, одно из двух утверждений

$$\left(\frac{\omega}{2^{s_0}}\right)^{m+\lambda-2} \leq R^\pi \tag{3.20}$$

или

$$u(x,t) \geq \mu_- + \frac{\omega}{2^{s_0+4}} \qquad \textit{при} \quad (x,t) \in \overline{Q}^\eta_{R/2}. \tag{3.21}$$

Замечание 3.3. Первая альтернатива заключается в том, что (3.19) выполнено хотя бы для одного цилиндра вида $\overline{Q}^\eta_R$.

Доказательство. Пусть (3.20) не выполнено, тогда $Q^\theta_R \subset Q^\pi_R$. Для доказательства (3.21) нам понадобятся последовательности

$$r_n = \frac{R}{2} + \frac{R}{2^{n+1}}, \quad \overline{r}_n = \frac{R}{2} + \frac{3}{2^{n+3}}R, \quad B_n = B_{r_n}, \quad n = \overline{0,\infty},$$

цилиндры

$$Q_{r_n} = \overline{Q}^\eta_{r_n} = B_{r_n} \times \left\{\overline{t} - \eta r_n^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}, \overline{t}\right\},$$

$$Q_{\overline{r}_n} = \overline{Q}^\eta_{\overline{r}_n} = B_{\overline{r}_n} \times \left\{\overline{t} - \eta \overline{r}_n^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}, \overline{t}\right\},$$

гладкие срезающие функции $\xi_n(x,t)$, $n = \overline{0,\infty}$ такие, что

$$\xi_n(x,t) = 1 \quad \text{при} \quad (x,t) \in Q_{\overline{r}_n},$$

$$\xi_n(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad t = \overline{t} - \eta r_n^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}, \quad x \in \partial B_{r_n},$$

$$|D\xi_n| \le C\frac{2^n}{R}, \qquad |(\xi_n)_t| \le C\frac{2^n R^{N-\lambda-1}}{\eta\rho(B_R)}$$

и уровни

$$k_n = \mu_- + \frac{\omega}{2^{s_0+1}} + \frac{\omega}{2^{s_0+1+n}} \quad \text{при} \quad \mu_- + \frac{\omega}{2^{s_0+1}} \ge \frac{\omega}{2^{s_0+2}},$$

$$k_n = \mu_- + \frac{\omega}{2^{s_0+4}} + \frac{\omega}{2^{s_0+4+n}} \quad \text{при} \quad \mu_- + \frac{\omega}{2^{s_0+1}} < \frac{\omega}{2^{s_0+2}}.$$

Запишем неравенство (2.7) для цилиндра Q_{r_n} и срезки ξ_n

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 = \operatorname*{ess\,sup}_{\bar t - \eta \bar r_n^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|} \le t \le \bar t} \int\limits_{B_{\bar r_n}} \rho(x)[(u-k_n)^-]^2\,dx \\ + \iint\limits_{Q_{\bar r_n}} |u|^{m-1}|D(u-k_n)^-|^{\lambda+1}\,dx\,dt \\ \le \gamma \iint\limits_{Q_{\bar r_n}} |u|^{m-1}|(u-k_n)^-|^{\lambda+1}|D\xi_n|^{\lambda+1}\,dx\,dt \\ + \gamma \iint\limits_{Q_{\bar r_n}} \rho(x)[(u-k_n)^-]^2(\xi_n)_t\,dx\,dt \\ + \gamma\Bigg\{ \int\limits_{\bar t - \eta r_n^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}}^{\bar t} \rho(A^-_{k_n,r_n}(t))^{\frac{r}{q}}\,dt \Bigg\}^{\frac{\lambda+1}{r}(1+\kappa)} \\ = P_1 + P_2 + P_3. \end{aligned} \tag{3.22}$$

1) Рассмотрим случай $\mu_- + \frac{\omega}{2^{s_0+1}} \ge \frac{\omega}{2^{s_0+2}}$. Тогда $k_n \ge \frac{\omega}{2^{s_0+4}}$ и для функции

$$w(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{если} \quad u(x,t) > \frac{\omega}{2^{s_0+4}}, \\ \frac{\omega}{2^{s_0+4}} & \text{если} \quad u(x,t) \le \frac{\omega}{2^{s_0+4}}, \end{cases}$$

справедливы соотношения

$$(u-k_n)^- \ge (w-k_n)^-, \qquad |D(u-k_n)^-| \ge |D(w-k_n)^-|,$$

$$\chi\{(u-k_n)^- > 0\} = \chi\{(w-k_n)^- > 0\},$$

где χE — характеристическая функция множества E.

Покажем, что

$$\max\{\frac{\omega}{2^{s_0+4}}; \mu^-\} \ge cM, \qquad c = \frac{1}{2^{s_0+5}}. \tag{3.23}$$

Действительно, пусть $\mu_- \geq \frac{1}{2}\mu_+$, тогда $\max\{\frac{\omega}{2^{s_0+4}}; \mu^-\} \geq \frac{1}{2}\mu_+$. Если $\mu_- < \frac{1}{2}\mu_+$, то $\omega = \mu_+ - \mu_- \geq \mu_+ - \frac{1}{2}\mu_+ = \frac{1}{2}\mu_+$, следовательно, $\max\{\frac{\omega}{2^{s_0+4}}; \mu^-\} \geq \frac{1}{2^{s_0+5}}\mu_+$.

Пусть $\overline{\xi}_n(x)$, $n = \overline{0, \infty}$ гладкие функции такие, что

$$\overline{\xi}_n(x) = 1 \quad \text{в} \quad B_{r_{n+1}}, \quad \overline{\xi}_n(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial B_{\overline{r}_n}, \quad |D\xi_n| \leq C\frac{2^n}{R}.$$

Также нетрудно видеть, что в силу выбора k_n

$$|(u - k_n)^-| \leq \frac{\omega}{2^{s_0}}, \qquad |(u - k_n)^-|^2 \geq \Big(\frac{2^{s_0}}{\omega}\Big)^{\lambda-1} |(u - k_n)^-|^{\lambda+1}. \quad (3.24)$$

Используя (3.23), (3.24) и (3.18), для членов левой части неравенства (3.22) получаем

$$L_1 \geq \Big(\frac{2^{s_0}}{\omega}\Big)^{\lambda-1} \operatorname*{ess\,sup}_{\overline{t} - \eta \overline{r}_n^{\lambda+1} \frac{\rho(B_R)}{|B_R|} \leq t \leq \overline{t}} \int\limits_{B_{\overline{r}_n}} \rho(x)[(w - k_n)^- \overline{\xi}_n]^{\lambda+1}\, dx,$$

$$\begin{aligned}
L_2 &\geq \iint\limits_{Q_{\overline{r}_n}} |u|^{m-1} |D(w - k_n)^-|^{\lambda+1} \chi\Big\{\frac{\omega}{2^{s_0+4}} \leq u(x,t) < k_n\Big\}\, dx\, dt \\
&\geq \Big|\max\Big\{\frac{\omega}{2^{s_0+4}}; \mu^-\Big\}\Big|^{m-1} \iint\limits_{Q_{\overline{r}_n}} |D(w - k_n)^-|^{\lambda+1}\, dx\, dt \\
&\geq c_1 M^{m-1} \iint\limits_{Q_{\overline{r}_n}} |D[(w - k_n)^- \overline{\xi}_n]|^{\lambda+1}\, dx\, dt \\
&- \frac{c_2^n M^{m-1} |B_R|}{R^{\lambda+1} \rho(B_R)} \Big(\frac{\omega}{2^{s_0}}\Big)^{\lambda+1} \iint\limits_{Q_{\overline{r}_n}} \rho(x) \chi\{(w - k_n)^- > 0\}\, dx\, dt. \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Для правой части получаем

$$\begin{aligned}
P_1 + P_2 &\leq c^n M^{m-1} \frac{R^N}{R^{\lambda+1} \rho(B_R)} \iint\limits_{Q_{r_n}} \rho(x) |(u - k_n)^-|^{\lambda+1}\, dx\, dt \\
&+ c^n \Big(\frac{\omega}{2^{s_0}}\Big)^{\lambda-1} M^{m-1} \frac{R^N}{R^{\lambda+1} \rho(B_R)} \iint\limits_{Q_{r_n}} \rho(x) [(u - k_n)^-]^2\, dx\, dt \\
&\leq c^n \Big(\frac{\omega}{2^{s_0}}\Big)^{\lambda+1} M^{m-1} \frac{R^{N-\lambda-1}}{\rho(B_R)} \iint\limits_{Q_{r_n}} \rho(x) \chi\{(w - k_n)^- > 0\}\, dx\, dt.
\end{aligned}$$

Используя полученные выше оценки из неравенства (3.22), получаем для $b = \text{const} > 1$

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{ess\,sup}_{\bar t - \eta \bar r_n^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|} \le t \le \bar t} \int\limits_{B_{\bar r_n}} \rho[(w-k_n)^- \overline{\xi}_n]^{\lambda+1}\,dx \\
&\qquad + \frac{1}{\eta} \iint\limits_{Q_{\bar r_n}} |D[(w-k_n)^- \overline{\xi}_n]|^{\lambda+1}\,dx\,dt \\
&\qquad \le b^n \frac{1}{\eta}\Big(\frac{\omega}{2^{s_0}}\Big)^{\lambda+1} \frac{R^{N-\lambda-1}}{\rho(B_R)} \iint\limits_{Q_{\bar r_n}} \rho\chi\{(u-k_n)^- > 0\}\,dx\,dt \\
&+ b^n \eta^{\frac{\lambda+1}{r}(1+\kappa)} \Big(\frac{\omega}{2^{s_0}}\Big)^{\lambda-1} \Bigg\{ \frac{1}{\eta} \int\limits_{\bar t - \eta r_n^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}}^{\bar t} \rho(A^-_{k_n, r_n}(t))^{\frac{r}{q}}\,dt \Bigg\}^{\frac{\lambda+1}{r}(1+\kappa)}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Выполним замену переменных $z = \frac{t-\bar t}{\eta}$, и обозначим

$$Q_n = B_{r_n} \times \Big\{ -r_n^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}, 0\Big\}, \qquad \overline{Q}_n = B_{\bar r_n} \times \Big\{ -\bar r_n^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}, 0\Big\},$$

$$A_n(z) = \{x \in B_{r_n} : u(x,z) < k_n\}, \qquad |A_n(z)|_\rho = \int\limits_{-r_n^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}}^{0} \rho(A_n(z))dz,$$

тогда неравенство (3.26) примет вид

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{ess\,sup}_{-\bar r_n^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|} \le z \le 0} \int\limits_{B_{\bar r_n}} \rho[(w-k_n)^- \overline{\xi}_n]^{\lambda+1}\,dx \\
&\quad + \iint\limits_{\overline{Q}_n} |D[(w-k_n)^- \overline{\xi}_n]|^{\lambda+1}\,dx\,dz \le b^n \Big(\frac{\omega}{2^{s_0}}\Big)^{\lambda+1} \frac{R^{N-\lambda-1}}{\rho(B_R)} |A_n|_\rho \\
&+ b^n \eta^{\frac{\lambda+1}{r}(1+\kappa)} \Big(\frac{\omega}{2^{s_0}}\Big)^{\lambda-1} \Bigg\{ \int\limits_{-r_n^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}}^{0} \rho(A_n(z))^{\frac{r}{q}}\,dz \Bigg\}^{\frac{\lambda+1}{r}(1+\kappa)}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Оценивая снизу левую часть (3.27) с помощью (2.11) и (2.10), получаем следующие неравенства

$$\left[\frac{R^{\frac{N-\lambda-1}{\lambda+1}}}{\rho(B_R)^{\frac{1}{\nu}}}\right]^{\frac{\nu(\lambda+1)}{2\nu-\lambda-1}} |A_{n+1}|_\rho \le b^n \frac{R^{N-\lambda-1}}{\rho(B_R)} |A_n|_\rho^{1+\frac{\nu-\lambda-1}{2\nu-\lambda-1}}$$
$$+ b^n \eta^{\frac{\lambda+1}{r}(1+\kappa)} \Big(\frac{2^{s_0}}{\omega}\Big)^2 |A_n|_\rho^{\frac{\nu-\lambda-1}{2\nu-\lambda-1}} \left\{ \int\limits_{-r_n^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}}^{0} \rho(A_n(z))^{\frac{r}{q}}\, dz \right\}^{\frac{\lambda+1}{r}(1+\kappa)}, \tag{3.28}$$

$$\left[\frac{R^{\frac{N-\lambda-1}{\lambda+1}}}{\rho(B_R)^{\frac{1}{\nu}}}\right]^{\frac{\nu(\lambda+1)(\lambda+1-q)}{q(\lambda+1-\nu)}} \left\{ \int\limits_{-r_{n+1}^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}}^{0} \rho(A_{n+1}(z))^{\frac{r}{q}}\, dz \right\}^{\frac{\lambda+1}{r}}$$
$$\le b^n \frac{R^{N-\lambda-1}}{\rho(B_R)} |A_n|_\rho + b^n \eta^{\frac{\lambda+1}{r}(1+\kappa)} \Big(\frac{2^{s_0}}{\omega}\Big)^2$$
$$\times \left\{ \int\limits_{-r_n^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}}^{0} \rho(A_n(z))^{\frac{r}{q}}\, dz \right\}^{\frac{\lambda+1}{r}(1+\kappa)}. \tag{3.29}$$

Введем последовательности

$$Y_n \equiv \frac{|B_R|}{R^{\lambda+1}\rho(B_R)^2} |A_n|_\rho,$$

$$Z_n \equiv \frac{1}{\rho(B_R)} \left[\frac{R^{\frac{N-\lambda-1}{\lambda+1}}}{\rho(B_R)^{\frac{1}{\nu}}}\right]^{\frac{\nu(\lambda+1)(\lambda+1-q)}{q(\lambda+1-\nu)}} \left\{ \int\limits_{-r_{n+1}^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}}^{0} \rho(A_n(z))^{\frac{r}{q}}\, dz \right\}^{\frac{\lambda+1}{r}},$$

тогда неравенства (3.28) и (3.29) можно записать в виде

$$\begin{cases} Y_{n+1} \le b^n \big(Y_n^{1+\frac{\nu-\lambda-1}{2\nu-\lambda-1}} + S(\omega,R) Y_n^{\frac{\nu-\lambda-1}{2\nu-\lambda-1}} Z_n^{1+\kappa}\big), \\ Z_{n+1} \le b^n \big(Y_n + S(\omega,R) Z_n^{1+\kappa}\big), \end{cases} \tag{3.30}$$

$$S(\omega,R) = \eta^{\frac{\lambda+1}{r}(1+\kappa)} \Big(\frac{2^{s_0}}{\omega}\Big)^2 \rho(B_R)^\kappa \left[\frac{\rho(B_R)^{\frac{1}{\nu}}}{R^{\frac{N-\lambda-1}{\lambda+1}}}\right]^{\frac{\nu(\lambda+1)(\lambda+1-q)}{q(\lambda+1-\nu)}(1+\kappa)}.$$

Из условия A_2) следует, что при $R < 1$ справедливо неравенство

$$\rho(B_R(x_0)) \le C\rho(B_1(x_0)) R^{\frac{N-\lambda-1}{\lambda+1}\nu},$$

поэтому, учитывая, что (3.20) не выполнено, получаем

$$S(\omega, R) \le C\left[\left(\frac{2^{s_0}}{\omega}\right)^{m+\lambda-2} R^{\pi}\right]^{(1+\kappa)\frac{\lambda+1}{r}+\frac{2}{m+\lambda-2}} \le C.$$

Теперь, используя лемму 5.7 [19], из итеративных неравенств (3.30) получаем справедливость утверждения (3.21) при условии, что для достаточно малого μ выполнено

$$Y_0 \le \mu, \qquad Z_0^{1+\kappa} \le \mu. \tag{3.31}$$

Первое из этих неравенств следует из (3.19), если выбрать $\beta \le \mu$.

Докажем второе из неравенств (3.31). Пусть $r < q$, тогда по неравенству Гельдера получаем

$$\int\limits_{-R^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}}^{0} \rho(A_0(z))^{\frac{r}{q}}\, dz \le |A_0|_\rho^{\frac{r}{q}} \left(\frac{R^{\lambda+1}}{|B_R|}\rho(B_R)\right)^{\frac{q-r}{q}},$$

следовательно,

$$Z_0^{1+\kappa} \le C\left(\frac{|B_R|}{R^{\lambda+1}\rho(B_R)^2}|A_0|_\rho\right)^{\frac{(\lambda+1)(1+\kappa)}{q}} \le C\beta_0^{\frac{(\lambda+1)(1+\kappa)}{q}}.$$

В случае $r \ge q$ получаем

$$\int\limits_{-R^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}}^{0} \rho(A_0(z))^{\frac{r}{q}} \le |A_0|_\rho |B_R|^{\frac{r}{q}-1},$$

тогда

$$Z_0^{1+\kappa} \le C\left(\frac{|B_R|}{R^{\lambda+1}\rho(B_R)^2}|A_0|_\rho\right)^{\frac{(\lambda+1)(1+\kappa)}{r}} \le C\beta_0^{\frac{(\lambda+1)(1+\kappa)}{r}}.$$

Выбирая β достаточно малым, получаем (3.31).

2) Рассмотрим случай $\mu_- + \frac{\omega}{2^{s_0+1}} \le \frac{\omega}{2^{s_0+2}}$. Тогда получаем $\mu_-, k_n \le 0$, следовательно, на множестве $\{(u-k_n) > 0\}$ справедливо $|u(x,t)| > M$. Далее проделываем все рассуждения как в случае 1), при этом не возникает необходимость в использовании функции $w(x,t)$. Лемма доказана. $\square$

Далее будем считать, что для некоторого цилиндра $\overline{Q}_R^\eta$ выполнено предположение леммы (3.1). Рассмотрим цилиндр

$$\widehat{Q} \equiv \widehat{Q}^\eta_{\frac{R}{2}} \equiv B_{\frac{R}{2}} \times \Big\{\overline{t} - \eta\Big(\frac{R}{2}\Big)^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}, t_0\Big\}.$$

Очевидно, что высота h цилиндра $\widehat{Q}$ удовлетворяет условию

$$\eta\Big(\frac{R}{2}\Big)^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|} \le h \le \theta R^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}. \tag{3.32}$$

Лемма 3.2. *Предположим, что для некоторого цилиндра* $\overline{Q}_R^\eta$ *выполнено предположение леммы* (3.1) *и*

$$H^- \equiv \|(u-(\mu_- + \frac{\omega}{2^{s_0+4}}))^-\|_{\infty,\widehat{Q}} \ge \frac{\omega}{2^{s_0+5}}. \tag{3.33}$$

Тогда для произвольного $\beta_1 \in (0,1)$ *найдется* $s_1 = s_1(s_0, s^*, \beta_1, \gamma, \kappa, r, \delta) > s^*$, *не зависящее от* ω *и* R, *такое, что справедливо, по крайней мере, одно из двух утверждений*

$$\Big(\frac{\omega}{2^{s_1}}\Big)^{m+\lambda-2} \le R^\pi \tag{3.34}$$

или

$$\rho\Big(\Big\{x \in B_{\frac{R}{4}} : u(x,t) < \mu_- + \frac{\omega}{2^{s_1+4}}\Big\}\Big) \le \beta_1\rho(B_R), \tag{3.35}$$

$$\text{\textit{при}} \qquad t \in \Big[\overline{t} - \eta\Big(\frac{R}{2}\Big)^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}, t_0\Big].$$

Доказательство. Пусть (3.34) не выполнено, тогда из леммы (3.1) следует

$$u(x,t) \ge \mu_- + \frac{\omega}{2^{s_0+4}} \quad \text{при} \quad t = \overline{t} - \eta\Big(\frac{R}{2}\Big)^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|},$$

значит, при $t = \overline{t} - \eta(\frac{R}{2})^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}$

$$\Psi\Big(H^-, \Big(u - \mu_- - \frac{\omega}{2^{s_0+4}}\Big)^-, \frac{\omega}{2^{s_0+4+n}}\Big) = 0. \tag{3.36}$$

Рассмотрим гладкие функции $\xi(x) = 1$ при $x \in B_{\frac{R}{4}}$, $\xi(x) = 0$ при $x \in \partial B_{\frac{R}{2}}$, $|D\xi| \le \frac{C}{R}$ и введем обозначения

$$k = \mu_- + \frac{\omega}{2^{s_0+4}} \quad \text{и} \quad \sigma_n = \frac{\omega}{2^{s_0+4+n}}.$$

Используя (3.36), запишем неравенство (2.8) для цилиндра $\widehat{Q}$, срезки $\xi(x)$, уровня k и $\sigma = \sigma_n$:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\bar t-\eta(\frac{R}{2})^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}\le t\le t_0} \int\limits_{B_{\frac{R}{2}}} \rho(x)\Psi^2\Big(H^-,(u-k)^-,\frac{\omega}{2^{s_0+4+n}}\Big)\xi^{\lambda+1}\,dx$$
$$\le \gamma \iint\limits_{\widehat{Q}} |u|^{m-1}[\Psi']^{1-\lambda}\Psi\Big(H^-,(u-k)^-,\frac{\omega}{2^{s_0+4+n}}\Big)|D\xi|^{\lambda+1}\,dx\,dt$$
$$+\gamma(\sigma_n)^{-2}\Big(1+\ln\frac{2^{s_0+4+n}H^-}{\omega}\Big)\Bigg\{\int\limits_{\bar t-\eta(\frac{R}{2})^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}}^{t_0} \rho(A^-_{k_n,\frac{R}{2}}(t))^{\frac{r}{q}}\,dt\Bigg\}^{\frac{\lambda+1}{r}(1+\kappa)}. \tag{3.37}$$

Легко видеть, что

$$H^- - (u-\mu_- - \frac{\omega}{2^{s_0+4}})^- \ge 0, \qquad H^- \le \frac{\omega}{2^{s_0+4}},$$

поэтому

$$\Psi\Big(H^-,(u-\mu_- - \frac{\omega}{2^{s_0+4}})^-,\frac{\omega}{2^{s_0+4+n}}\Big)$$
$$= \ln^+\Big\{\frac{H^-}{H^- - (u-\mu_- - \frac{\omega}{2^{s_0+4}})^- + \frac{\omega}{2^{s_0+4+n}}}\Big\}$$
$$\le \ln^+ \frac{\frac{\omega}{2^{s_0+4}}}{\frac{\omega}{2^{s_0+4+n}}} = n\ln 2, \tag{3.38}$$

$$\Psi'\Big(H^-,(u-\mu_- - \frac{\omega}{2^{s_0+4}})^-,\frac{\omega}{2^{s_0+4+n}}\Big)$$
$$= \frac{1}{H^- - (u-\mu_- - \frac{\omega}{2^{s_0+4}})^- + \frac{\omega}{2^{s_0+4+n}}}$$
$$\ge \frac{1}{\frac{\omega}{2^{s_0+4}} + \frac{\omega}{2^{s_0+4+n}}} \ge \frac{2^{s_0}}{\omega}. \tag{3.39}$$

Таким образом, используя (3.32), первый член правой части неравенства (3.37) можно оценить величиной

$$Cn\frac{M^{m-1}}{R^{\lambda+1}}\Big(\frac{\omega}{2^{s_0}}\Big)^{\lambda-1}\iint\limits_{\widehat{Q}} dx\,dt \le Cn2^{(s^*-s_0)(\lambda-1)}\rho(B_R).$$

Так как (3.34) не выполняется, то используя (3.32) и выбирая n так, чтобы $s_0+n > s^*$, второй член правой части неравенства (3.37) можно оценить величиной

$$\gamma(1+n\ln 2)\Big(\frac{2^{s_0+4+n}}{\omega}\Big)^2 \rho(B_{\frac{R}{2}})^{\frac{\lambda+1}{q}(1+\kappa)} h^{\frac{\lambda+1}{r}(1+\kappa)} \leq Cn\rho(B_R).$$

Для того, чтобы оценить левую часть (3.37), перейдем к меньшей области интегрирования

$$A^-_{\sigma_n,\frac{R}{4}} = \Big\{x \in B_{\frac{R}{4}} : u(x,t) < \mu_- + \frac{\omega}{2^{s_0+4+n}}\Big\},$$

тогда из предположения (3.33) получаем при $x \in A^-_{\sigma_n,\frac{R}{4}}$

$$\Psi\Big(H^-, (u-\mu_- - \frac{\omega}{2^{s_0+4}})^-, \frac{\omega}{2^{s_0+4+n}}\Big) \geq \ln \frac{\frac{\omega}{2^{s_0+5}}}{\frac{\omega}{2^{s_0+3+n}}} \geq (n-2)\ln 2.$$

Таким образом, из неравенства (3.37) получаем

$$\rho(A^-_{\sigma_n,\frac{R}{4}}) \leq C(s^*)\frac{n}{(n-2)^2}\rho(B_R).$$

Теперь выберем n так, чтобы

$$C(s^*)\frac{n}{(n-2)^2} \leq \beta_1$$

и обозначим $s_1 = s_0 + n$. Лемма доказана. □

Введем обозначение

$$Q^\eta_{\frac{R}{8}} \equiv B_{\frac{R}{8}} \times \Big\{t_0 - \eta\Big(\frac{R}{8}\Big)^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}, t_0\Big\}.$$

Лемма 3.3. *Предположим, что для некоторого цилиндра* $\overline{Q}^\eta_R$ *выполнено предположение леммы* (3.1).

Тогда существует число $s > s^*$*, не зависящее от* ω*, и* R *такое, что справедливо, по крайней мере, одно из двух утверждений*

$$\Big(\frac{\omega}{2^s}\Big)^{m+\lambda-2} \leq R^\pi \tag{3.40}$$

или

$$u(x,t) \geq \mu_- + \frac{\omega}{2^s} \qquad \textit{при} \qquad (x,t) \in Q^\eta_{\frac{R}{8}}. \tag{3.41}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательности

$$r_n = \frac{R}{8} + \frac{R}{2^{n+3}}, \quad \overline{r}_n = \frac{R}{8} + \frac{3}{2^{n+5}}R, \quad n = \overline{0,\infty}$$

и цилиндры

$$D_n = B_{r_n} \times \Big\{\overline{t} - \eta\Big(\frac{R}{2}\Big)^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}, t_0\Big\},$$

$$\overline{D}_n = B_{\overline{r}_n} \times \Big\{\overline{t} - \eta\Big(\frac{R}{2}\Big)^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}, t_0\Big\}.$$

Также рассмотрим последовательность уровней и срезок

$$k_n = \mu_- + \frac{\omega}{2^{s_1+1}} + \frac{\omega}{2^{s_1+1+n}} \quad \text{при} \quad \mu_- + \frac{\omega}{2^{s_1+1}} \ge \frac{\omega}{2^{s_1+2}},$$

$$k_n = \mu_- + \frac{\omega}{2^{s_1+4}} + \frac{\omega}{2^{s_1+4+n}} \quad \text{при} \quad \mu_- + \frac{\omega}{2^{s_1+1}} < \frac{\omega}{2^{s_1+2}},$$

$$\xi_n(x) = 1 \quad \text{в} \quad B_{\overline{r}_n}, \quad \xi_n(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial B_{r_n}, \quad |D\xi_n| \le \frac{C^n}{R}.$$

Из леммы (3.1) следует, что

$$u(x,t) \ge \mu_- + \frac{\omega}{2^{s_0+4}} \ge k_n \quad \text{при} \quad t = \overline{t} - \eta\Big(\frac{R}{2}\Big)^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|},$$

поэтому из неравенства (2.7) получаем

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{ess\,sup}_{\overline{t}-\eta(\frac{R}{2})^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}\le t\le t_0} \int\limits_{B_{\overline{r}_n}} \rho(x)[(u-k_n)^-]^2\,dx \\
&\qquad + \iint\limits_{\overline{D}_n} |u|^{m-1}|D(u-k_n)^-|^{\lambda+1}\,dx\,dt \\
&\le \gamma \iint\limits_{D_n} |u|^{m-1}|(u-k_n)^-|^{\lambda+1}|D\xi_n|^{\lambda+1}\,dx\,dt \\
&\qquad + \gamma\Bigg\{\int\limits_{\overline{t}-\eta(\frac{R}{2})^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}}^{t_0} \rho(A^-_{k_n,r_n}(t))^{\frac{r}{q}}\,dt\Bigg\}^{\frac{\lambda+1}{r}(1+\kappa)}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Все дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству леммы 3.1. Лемма доказана. $\square$

Из леммы 3.3 легко получаем

Лемма 3.4. *Существуют такие числа $\beta_0 \in (0,1)$ и $s > s^*$, не зависящие от ω и R, что из неравенства*

$$\Big|(x,t) \in \overline{Q}_R^\eta : u(x,t) < \mu_- + \frac{\omega}{2^{s_0}}\Big|_\rho \le \beta_0 |\overline{Q}_R^\eta|_\rho$$

следует, по крайней мере, одно из утверждений

$$\Big(\frac{\omega}{2^s}\Big)^{m+\lambda-2} \le R^\pi \tag{3.43}$$

или

$$\operatorname*{ess\,osc}_{(x,t)\in Q^\eta_{\frac{R}{8}}} u(x,t) \le \Big(1 - \frac{1}{2^s}\Big)\omega. \tag{3.44}$$

4. Вторая альтернатива

Теперь предположим, что условие (3.19) не выполнено для любого из цилиндров вида $\overline{Q}_R^\eta$, тогда для каждого такого цилиндра справедливо

$$\Big|(x,t) \in \overline{Q}_R^\eta : u(x,t) > \mu_+ - \frac{\omega}{2^{s_0}}\Big|_\rho < (1-\beta_0)|\overline{Q}_R^\eta|_\rho. \tag{4.45}$$

Лемма 4.1. *Пусть для цилиндра $\overline{Q}_R^\eta \subset Q_R^\theta$ выполнено* (4.45)*, тогда существует*

$$t^* \in \Big[\bar t - \eta R^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}, \bar t - \frac{\beta_0}{2}\eta R^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}\Big], \tag{4.46}$$

такое что

$$\rho(A^+_{\mu^+ - \frac{\omega}{2^{s_0}},R}(t^*)) < \Big(\frac{1-\beta_0}{1-\frac{\beta_0}{2}}\Big)\rho(B_R). \tag{4.47}$$

Доказательство. Пусть утверждение леммы не верно, т.е.

$$\forall\, t \in \Big[\bar t - \eta R^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}, \bar t - \frac{\beta_0}{2}\eta R^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}\Big],$$

$$\rho(A^+_{\mu^+ - \frac{\omega}{2^{s_0}},R}(t)) \ge \Big(\frac{1-\beta_0}{1-\frac{\beta_0}{2}}\Big)\rho(B_R).$$

Интегрируя полученное неравенство по t и используя (4.45), имеем

$$(1-\beta_0)|\overline{Q}_R^\eta|_\rho > \int\limits_{\bar t-\eta R^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}}^{\bar t-\frac{\beta_0}{2}\eta R^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}} \rho(A^+_{\mu^+-\frac{\omega}{2^{s_0}},R}(t))\,dt$$

$$\geq \Big(\frac{1-\beta_0}{1-\frac{\beta_0}{2}}\Big)\rho(B_R)\int\limits_{\bar t-\eta R^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}}^{\bar t-\frac{\beta_0}{2}\eta R^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}} dt = (1-\beta_0)|\overline{Q}_R^\eta|_\rho.$$

Получили противоречие $(1-\beta_0)|\overline{Q}_R^\eta|_\rho > (1-\beta_0)|\overline{Q}_R^\eta|_\rho$. Лемма доказана. □

Лемма 4.2. *Пусть для цилиндра $\overline{Q}_R^\eta \subset Q_R^\theta$ выполнено* (4.45) *и*

$$H^+ \equiv \|(u-(\mu_+ - \frac{\omega}{2^{s_0}}))^+\|_{\infty,Q_R^\theta} \geq \frac{\omega}{2^{s_0+1}}.$$

Тогда существует такое положительное число e, не зависящее от ω и R, что справедливо, по крайней мере, одно из утверждений

$$\Big(\frac{\omega}{2^{s_0+e}}\Big)^{m+\lambda-2} \leq R^\pi$$

или при $t \in [\bar t - \frac{\beta_0}{2}\eta R^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}, \bar t\,]$

$$\rho(A^+_{\mu^+-\frac{\omega}{2^{s_0+e}},R}(t)) < \Big[1-\Big(\frac{\beta_0}{2}\Big)^2\Big]\rho(B_R). \tag{4.48}$$

Доказательство. Пусть t^* — число, определенное в предыдущей лемме, $t \in (t^*, \bar t)$, $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, $e > 0$ — достаточно большое число, ε и e будут выбраны ниже. Рассмотрим цилиндры

$$Q_R^* \equiv B_R \times [t^*, \bar t\,], \qquad Q_{R-\varepsilon R}^* \equiv B_R \times [t^*, t]$$

и гладкие срезающие функции $\xi(x): \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

$$\xi(x) = 1 \quad \text{в} \quad B_{R-\varepsilon R}, \qquad \xi(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial B_R, \qquad |D\xi| \leq \frac{C}{\varepsilon R}.$$

Для дальнейшего также понадобятся

$$k = \mu_+ - \frac{\omega}{2^{s_0}}, \qquad \sigma = \frac{\omega}{2^{s_0+e}}.$$

Запишем неравенство (2.8) для цилиндра Q_R^*, срезки $\xi(x)$, уровня k, H^+ и σ, при этом слева перейдем к меньшему цилиндру $Q_{R-\varepsilon R}^*$:

$$L_1 = \int\limits_{B_{R-\varepsilon R}} \rho(x)\Psi^2\Big(H^+,(u-\mu_+ + \frac{\omega}{2^{s_0}})^+, \frac{\omega}{2^{s_0+e}}\Big)(x,t)\,dx$$

$$\le \int\limits_{B_R} \rho(x)\Psi^2\Big(H^+,(u-\mu_+ + \frac{\omega}{2^{s_0}})^+, \frac{\omega}{2^{s_0+e}}\Big)(x,t^*)\,dx$$

$$+\gamma\Big(\frac{C}{\varepsilon R}\Big)^{\lambda+1}\iint\limits_{Q_R^*}|u|^{m-1}[\Psi']^{1-\lambda}\Psi\Big(H^+,(u-\mu_+ + \frac{\omega}{2^{s_0}})^+, \frac{\omega}{2^{s_0+e}}\Big)\,dx\,dt$$

$$+\gamma\Big(\frac{2^{s_0+e}}{\omega}\Big)^2\Big(1+\ln\frac{2^{s_0+e}H^+}{\omega}\Big)\Bigg\{\int\limits_{t^*}^{\bar t}\rho(A_{k,R}^+(t))^{\frac{r}{q}}\,dt\Bigg\}^{\frac{\lambda+1}{r}(1+\kappa)}$$

$$= P_1+P_2+P_3. \quad (4.49)$$

Рассуждая как в лемме (3.2), получаем

$$\Psi\Big(H^+,(u-\mu_+ + \frac{\omega}{2^{s_0}})^+, \frac{\omega}{2^{s_0+e}}\Big) \le e\ln 2, \quad (4.50)$$

$$\Psi'\Big(H^+,(u-\mu_+ + \frac{\omega}{2^{s_0}})^+, \frac{\omega}{2^{s_0+e}}\Big) \ge \frac{2^{s_0}}{\omega}. \quad (4.51)$$

С помощью (4.50) и леммы (4.1) получаем

$$P_1 \le e^2\ln^2 2\rho(A^+_{\mu^+-\frac{\omega}{2^{s_0}},R}(t^*)) \le e^2\ln^2 2\Big(\frac{1-\beta_0}{1-\frac{\beta_0}{2}}\Big)\rho(B_R).$$

Для оценки P_2 воспользуемся (4.50), (4.51) и (4.46)

$$P_2 \le Ce|\bar t - t^*|\Big(\frac{1}{\varepsilon R}\Big)^{\lambda+1}M^{m-1}\Big(\frac{\omega}{2^{s_0}}\Big)^{\lambda-1}|B_R| \le Ce\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big)^{\lambda+1}\rho(B_R).$$

Член P_3 оценивается как в лемме (3.2)

$$P_3 \le Ce\rho(B_R) \le Ce\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big)^{\lambda+1}\rho(B_R) \quad \text{при} \quad \varepsilon<1.$$

Чтобы оценить L_1 снизу, перейдем к меньшей области интегрирования

$$\Big\{x\in B_{R-\varepsilon R} : u(x,t) > \mu_+ - \frac{\omega}{2^{s_0+e}}\Big\}.$$

В этой области

$$\Psi\Big(H^+,\Big(u-\mu_+ + \frac{\omega}{2^{s_0}}\Big)^+, \frac{\omega}{2^{s_0+e}}\Big) \ge (e-2)\ln 2,$$

следовательно,

$$L_1 \geq C(e-2)^2 \rho\big(A^{+}_{\mu^+ - \frac{\omega}{2^{s_0+e}}, R-\varepsilon R}(t)\big).$$

Из проделанных выше оценок получаем

$$\rho(A^{+}_{\mu^+ - \frac{\omega}{2^{s_0+e}}, R-\varepsilon R}(t)) \leq \Big(\frac{e}{e-2}\Big)^2 \Big(\frac{1-\beta_0}{1-\frac{\beta_0}{2}}\Big)\rho(B_R) + \frac{C}{\varepsilon^{\lambda+1}}\frac{e}{(e-2)^2}\rho(B_R). \tag{4.52}$$

Из свойства (2.16) следует

$$\rho(B_R \setminus B_{R-\varepsilon R}) \leq C\alpha(\varepsilon)\rho(B_R), \qquad \alpha(\varepsilon) = (1-(1-\varepsilon)^N)^g,$$

поэтому

$$\begin{aligned}\rho(A^{+}_{\mu^+ - \frac{\omega}{2^{s_0+e}}, R}(t)) &\leq \rho(A^{+}_{\mu^+ - \frac{\omega}{2^{s_0+e}}, R-\varepsilon R}(t)) + \rho(B_R \setminus B_{R-\varepsilon R}) \\ &\leq \rho(A^{+}_{\mu^+ - \frac{\omega}{2^{s_0+e}}, R-\varepsilon R}(t)) + C\alpha(\varepsilon)\rho(B_R). \end{aligned} \tag{4.53}$$

Таким образом, (4.52) и (4.53) дают

$$\begin{aligned}\rho(A^{+}_{\mu^+ - \frac{\omega}{2^{s_0+e}}, R-\varepsilon R}(t)) &\leq \Big(\frac{e}{e-2}\Big)^2 \Big(\frac{1-\beta_0}{1-\frac{\beta_0}{2}}\Big)\rho(B_R) \\ &+ \frac{C}{\varepsilon^{\lambda+1}}\frac{e}{(e-2)^2}\rho(B_R) + C\alpha(\varepsilon)\rho(B_R). \end{aligned} \tag{4.54}$$

Выберем теперь ε настолько малым, чтобы $C\alpha(\varepsilon) < \frac{3}{8}\beta_0^2$, а e настолько большим, что

$$\Big(\frac{e}{e-2}\Big)^2 < (1-\frac{\beta_0}{2})(1+\beta_0), \qquad \frac{C}{\varepsilon^{\lambda+1}}\frac{e}{(e-2)^2} < \frac{3}{8}\beta_0^2,$$

тогда из (4.54) получаем (4.48). Лемма доказана. □

Простым следствием леммы 4.2 является следующая

Лемма 4.3. *Пусть выполнено* (4.45) *и* $H^+ \geq \frac{\omega}{2^{s_0+1}}$. *Тогда существует такое положительное число* s_2, *не зависящее от* ω *и* R, *что справедливо, по крайней мере, одно из утверждений*

$$\Big(\frac{\omega}{2^{s_2}}\Big)^{m+\lambda-2} \leq R^{\pi}$$

или при $t \in [t_0 - \frac{\beta_0}{3}\theta R^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}, t_0]$

$$\rho(A^{+}_{\mu^+ - \frac{\omega}{2^{s_2}}, R}(t)) < \Big[1 - \Big(\frac{\beta_0}{2}\Big)^2\Big]\rho(B_R). \tag{4.55}$$

Введем обозначение

$$Q_r^\theta(\beta_0) \equiv B_r \times \{t_0 - d_r^\theta(\beta_0), t_0\}, \qquad d_r^\theta(\beta_0) = \frac{\beta_0}{3}\theta r^{\lambda+1}\frac{\rho(B_R)}{|B_R|}.$$

Заметим, что число s^* пока еще не выбрано, поэтому можем предполагать $s^* > s_2$.

Лемма 4.4. *Пусть выполнено* (4.45) *и* $H^+ \geq \frac{\omega}{2^{s_0+1}}$. *Тогда для произвольного* $\tau_0 \in (0,1)$ *найдется такое число* s^*, *не зависящее от* ω *и* R, *что справедливо, по крайней мере, одно из утверждений*

$$\left(\frac{\omega}{2^{s^*}}\right)^{m+\lambda-2} \leq R^\pi \tag{4.56}$$

или

$$\left|(x,t) \in Q_R^\theta(\beta_0) : u(x,t) > \mu^+ - \frac{\omega}{2^{s^*}}\right|_\rho \leq \tau_0 |Q_R^\theta(\beta_0)|_\rho. \tag{4.57}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение уровни

$$k = \mu_+ - \frac{\omega}{2^{n-1}}, \qquad l = \mu_+ - \frac{\omega}{2^n}, \quad s^* \geq n > s_2.$$

Пусть (4.56) не выполнено, тогда рассуждая как в [9], из неравенства (2.7) получаем

$$\iint\limits_{Q_R^\theta(\beta_0)} |D(u-k)^+|^{\lambda+1}\, dx\, dt \leq C\Big(\frac{\omega}{2^n}\Big)^{\lambda+1}\frac{R^{N-\lambda-1}}{\rho(B_R)}|Q_R^\theta(\beta_0)|_\rho. \tag{4.58}$$

Использование леммы (4.3) и весового неравенства Де Джорджи (2.14) дает

$$\begin{aligned}(l-k)^p &\int\limits_{t_0-d_r^\theta(\beta_0)}^{t_0} \rho(A_{l,R}^+(t))\, dt \\ &\leq \frac{C}{R^{N-p}}\frac{\rho(B_R)^{p+1}}{[(\frac{\beta_0}{2})^2\rho(B_R)]^p}\Bigg(\int\limits_{t_0-d_r^\theta(\beta_0)}^{t_0}\int\limits_{A_k\setminus A_l}|D(u-k)^+|^{\lambda+1}\, dx\, dt\Bigg)^{\frac{p}{\lambda+1}} \\ &\qquad\qquad \times\Bigg(\int\limits_{t_0-d_r^\theta(\beta_0)}^{t_0}|A_k\setminus A_l|\, dt\Bigg)^{\frac{\lambda+1-p}{\lambda+1}}. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Пусть

$$A_n \equiv \int\limits_{t_0-d_r^\theta(\beta_0)}^{t_0} \rho(A^+_{\mu_+-\frac{\omega}{2^n},R}(t))\,dt, \qquad \overline{A}_n \equiv \int\limits_{t_0-d_r^\theta(\beta_0)}^{t_0} |A^+_{\mu_+-\frac{\omega}{2^n},R}(t)|\,dt,$$

тогда из неравенств (4.58) и (4.59) следует

$$\Big(\frac{\omega}{2^n}\Big)^p A_n \le C\frac{\rho(B_R)}{R^{N-p}}\bigg[\Big(\frac{\omega}{2^n}\Big)^{\lambda+1}\frac{R^{N-\lambda-1}}{\rho(B_R)}|Q_r^\theta(\beta_0)|_\rho\bigg]^{\frac{p}{\lambda+1}}(\overline{A}_{n-1}-\overline{A}_n)^{\frac{\lambda+1-p}{\lambda+1}}. \tag{4.60}$$

Производя элементарные преобразования, из (4.60) получаем

$$A_n^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-p}} \le C\bigg[\frac{\rho(B_R)}{R^{N-p}}\bigg]^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-p}}(\theta\rho(B_R))^{\frac{p}{\lambda+1-p}}(\overline{A}_{n-1}-\overline{A}_n). \tag{4.61}$$

Очевидно, что $A_n \ge A_{s^*}$ при $n \le s^*$, поэтому суммируя неравенства (4.61) по n от s_2+1 до s^*, получаем

$$\begin{aligned}(s^*-s_2-1)A_{s^*}^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-p}} &\le C\bigg[\frac{\rho(B_R)}{R^{N-p}}\bigg]^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-p}}(\theta\rho(B_R))^{\frac{p}{\lambda+1-p}}(\overline{A}_{s_2}-\overline{A}_{s^*})\\ &\le C\bigg[\frac{\rho(B_R)}{R^{N-p}}\bigg]^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-p}}(\theta\rho(B_R))^{\frac{p}{\lambda+1-p}}|Q_r^\theta(\beta_0)| = C|Q_r^\theta(\beta_0)|_\rho^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-p}}.\end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость (4.60), если выбрать s^* достаточно большим. Лемма доказана. □

Далее, рассуждая как в [9], легко получаем следующую лемму.

Лемма 4.5. *Пусть для любого цилиндра* $\overline{Q}_R^\eta \subset Q_R^\theta$ *выполнено* (4.45), *тогда существует такое положительное число* s^*, *не зависящее от* ω *и* R, *что справедливо, по крайней мере, одно из утверждений*

$$\Big(\frac{\omega}{2^{s^*}}\Big)^{m+\lambda-2} \le R^\pi \tag{4.62}$$

или

$$\operatorname*{ess\,osc}_{(x,t)\in Q^\theta_{\frac{R}{2}}(\beta_0)} u(x,t) \le \Big(1-\frac{1}{2^{s^*+1}}\Big)\omega. \tag{4.63}$$

5. Доказательство теоремы 1.1

Пусть $\overline{s} = \max\{s, s^* + 1\}$, где s определено в лемме (3.4), тогда обозначим

$$\eta_0 = 1 - \frac{1}{2^{\overline{s}}}, \qquad \alpha_0 = \frac{\pi}{m+\lambda-2}, \qquad C_0 = 2^{\overline{s}},$$

$$2^{\sigma_0(\lambda-1)} = \min\Big\{2^{s_0(\lambda-1)}, \frac{\beta_0}{3} 2^{s^*(\lambda-1)}\Big\}, \qquad \overline{\theta} = \Big(\frac{2^{\sigma_0}}{\omega}\Big)^{\lambda-1} \frac{1}{M^{m-1}}.$$

Из лемм (3.4) и (4.5) следует справедливость одного из двух утверждений

$$\omega \le C_0 R^{\alpha_0} \tag{5.64}$$

или

$$\operatorname*{ess\,osc}_{(x,t)\in Q^{\overline{\theta}}_{\frac{R}{8}}} u(x,t) \le \eta_0 \omega. \tag{5.65}$$

Лемма 5.1. *Пусть выполнены предположения теоремы 1.1, тогда для произвольного* $R \in [0; \min\{1, R_0\}]$ *справедливы*

$$\forall\, n = 0,1,2,\ldots \qquad Q_{n+1} \subset Q_n, \tag{5.66}$$

$$\forall\, n = 0,1,2,\ldots \qquad \operatorname*{ess\,osc}_{(x,t)\in Q_n} u(x,t) \le \omega_n. \tag{5.67}$$

Здесь использованы последовательности $\omega_0 = \omega$, $R_0 = R$, $M_0 = M$,

$$R_n = \frac{R}{G^n}, \quad \omega_n = \max\{\eta_0\omega_{n-1}, C_0 R_{n-1}^{\alpha_0}\}, \quad M_n = \max\{\|u\|_{\infty, Q_{n-1}}; \omega_n\},$$

$$\theta_n = \Big(\frac{2^{s^*}}{\omega_n}\Big)^{\lambda-1} \frac{1}{M_n^{m-1}}, \quad n = 1,2,\ldots$$

$$Q_0 = Q_R^{\pi}, \quad \text{если (5.64) выполнено },$$
$$Q_0 = Q_R^{\theta}, \quad \text{если (5.64) не выполнено },$$

$$Q_n = B_{R_n} \times \Big\{t_0 - \theta_n R_n^{\lambda+1} \frac{\rho(B_{R_n})}{|B_{R_n}|}, t_0\Big\}, \quad n = 1,2,\ldots$$

$$G = \max\Big\{\Big[A 8^{\lambda+m} 2^{(s^*-\sigma_0)(\lambda-1)} \Big(\frac{1}{\eta_0^2}\Big)^{m+\lambda-2}\Big]^{\frac{\lambda+1}{(N-\lambda-1)(\nu-\lambda-1)}}, 8\Big\},$$

A — *постоянная из условия* A_2).

Доказательство. Используя условие A_2) для $n = 1, 2, \dots$ легко получаем

$$R_n^{\lambda+1}\frac{\rho(B_{R_n})}{|B_{R_n}|} \le A\Big(\frac{1}{G}\Big)^{\frac{(N-\lambda-1)(\nu-\lambda-1)}{\lambda+1}} R_{n-1}^{\lambda+1}\frac{\rho(B_{R_{n-1}})}{|B_{R_{n-1}}|}. \tag{5.68}$$

Заметим также, что для измеримых множеств E_1, E_2 и ограниченной функции f, определенной на $E_1 \cup E_2$, справедливо

$$\operatorname{meas}(E_1 \cap E_2) > 0 \quad \Rightarrow \quad \|f\|_{\infty,E_1} \le 2\max\big\{\operatorname*{ess\,osc}_{E_1} f; \|f\|_{\infty,E_2}\big\},$$

поэтому

$$\forall\, n = 1, 2, \dots \qquad M_n \le 2\max\big\{\|u\|_{\infty,Q_n}; \operatorname*{ess\,osc}_{(x,t)\in Q_{n-1}} u(x,t); \omega_n\ \big\}, \tag{5.69}$$

$$M_0 \le 2\max\big\{\|u\|_{\infty,Q_0}; \operatorname*{ess\,osc}_{(x,t)\in Q_R^{\pi}} u(x,t); \omega\ \big\}$$
$$\le \frac{2}{\eta_0}\max\big\{\|u\|_{\infty,Q_0}; \omega_1\ \big\} = \frac{2}{\eta_0}M_1. \tag{5.70}$$

В случае $n = 0$ утверждение (5.67) тривиально, а включение $Q_1 \subset Q_0$ можно проверить непосредственно, используя (5.68) при $n = 1$ и (5.70).

Если (5.64) выполнено, то включение $Q_1 \subset Q_0$ дает

$$\operatorname*{ess\,osc}_{(x,t)\in Q_1} u(x,t) \le C_0 R^{\alpha_0}.$$

Если (5.64) не выполнено, то используя (5.68) при $n = 1$ и (5.70), получаем $Q_1 \subset Q^{\overline{\theta}}_{\frac{R}{8}}$, значит,

$$\operatorname*{ess\,osc}_{(x,t)\in Q_1} u(x,t) \le \eta_0\omega.$$

Таким образом, (5.67) доказано при $n = 1$.

Справедливость (5.66) при $n = 1$ следует из (5.68) и неравенства (5.69), которое дает

$$M_1 \le 2\max\big\{\|u\|_{\infty,Q_1}; \omega; \omega_1\ \big\} \le \frac{2}{\eta_0^2}\max\big\{\|u\|_{\infty,Q_1}; \omega_2\ \big\} = \frac{2}{\eta_0^2}M_2.$$

Пусть теперь при $n = k \ge 1$ выполнены утверждения леммы (5.66), (5.67) и свойство

$$M_k \le \frac{2}{\eta_0^2}M_{k+1}. \tag{5.71}$$

Это означает, что осцилляция функции $u(x,t)$ по цилиндру Q_k ограничена сверху тем самым числом ω_k, которое входит в определение цилиндра Q_k. Следовательно, все рассуждения теоремы теперь можно провести, заменив R, ω, Q_R^θ на R_k, ω_k, Q_k, соответственно, при этом в силу вышесказанного не возникает необходимость вводить цилиндр Q_R^π. Тогда получим справедливость, по крайней мере, одного из неравенств

$$\omega_k \le C_0 R_k^{\alpha_0} = C_0\Big(\frac{R}{G^k}\Big)^{\alpha_0} \tag{5.72}$$

или

$$\operatorname*{ess\,osc}_{(x,t)\in Q^{\overline{\theta}_k}_{\frac{R_k}{8}}} u(x,t) \le \eta_0\omega_k, \tag{5.73}$$

$$\overline{\theta}_k = \Big(\frac{2^{\sigma_0}}{\omega_k}\Big)^{\lambda-1}\frac{1}{M_k^{m-1}}, \qquad Q^{\overline{\theta}_k}_{\frac{R_k}{8}} = B_{R_n}\times\Big\{t_0-\overline{\theta}_k\Big(\frac{R_k}{8}\Big)^{\lambda+1}\frac{\rho(B_{R_k})}{|B_{R_k}|}, t_0\Big\}.$$

По определению $\omega_k \ge C_0R_{k-1}^{\alpha_0} = C_0(\frac{R}{G^{k-1}})^{\alpha_0}$, поэтому из двух предыдущих утверждений справедливо только (5.73). Постоянная G подобрана таким образом, что из (5.68) и (5.71) следует

$$Q_{k+1}\subseteq Q^{\overline{\theta}_k}_{\frac{R_k}{8}},$$

значит, (5.67) верно при $n=k+1$. Тогда, используя индукционное допущение, из (5.69) при $n=k+1$ получаем

$$\begin{aligned} M_{k+1} &\le 2\max\big\{\|u\|_{\infty,Q_{k+1}};\omega_k;\omega_{k+1}\big\} \\ &\le \frac{2}{\eta_0^2}\max\big\{\|u\|_{\infty,Q_{k+1}};\omega_{k+2}\big\} = \frac{2}{\eta_0^2}M_{k+2}, \end{aligned}$$

отсюда вытекает $Q_{k+2}\subset Q_{k+1}$, значит, (5.66) выполнено при $n=k+1$. Лемма доказана. □

Пусть

$$\alpha = \min\{-\log_G\eta_0;\alpha_0\}, \qquad b = G^{2\alpha}\max\{\omega; C_0R^{\alpha_0}\},$$

$$\Delta = \frac{1}{A}\Big(\frac{2^{s^*}}{C_0}\Big)^{\lambda-1}\frac{1}{\max\{M,\omega,R^{\alpha_0}\}^{m+\lambda-2}},$$

$$Q_r^\Delta = B_r\times\{t_0-\Delta r^{\lambda+1}\frac{\rho(B_r)}{|B_r|}, t_0\},$$

тогда проводя рассуждения аналогично доказательству леммы 5.8 [19], получаем

$$\forall\, r<R \qquad \operatorname*{ess\,osc}_{(x,t)\in Q_r^\Delta} u(x,t) \le b\Big(\frac{r}{R}\Big)^{\alpha}.$$

Пользуясь свойством (2.17), легко получаем

$$r^{\lambda+1}\frac{\rho(B_r)}{|B_r|} \geq C\rho(B_1)r^{\lambda+1+N(p-1)},$$

следовательно, для цилиндра

$$Q_r = B_r \times \{t_0 - C\Delta\rho(B_1)r^{\lambda+1+N(p-1)}, t_0\}$$

справедливо утверждение

$$\forall\, r < R \qquad \operatorname*{ess\,osc}_{(x,t)\in Q_r} u(x,t) \leq b\Big(\frac{r}{R}\Big)^{\alpha},$$

из которого следует справедливость теоремы. Теорема доказана.

Благодарности. Авторы выражают благодарность И. И. Скрыпнику за полезные обсуждения, способствовавшие написанию данной работы.

Литература

[1] S. Kamin, P. Rosenau, *Propagation of thermal waves in an inhomogenous medium* // Comunications on Pure and Applied Mathematics. **34** (1981), 831–852.

[2] S. Kamin, P. Rosenau, *Nonlinear diffusion in finite mass medium* // Communications on Pure and Applied Mathematics. **35** (1982), 113–127.

[3] S. Kamin, R. Kersner, *Disappearance of interfaces in finite time* // Mechanica. **28** (1993), 117–120.

[4] M. Guedda, D. Hilhorst, M. A. Peletier, *Disappearing interfaces in nonlinear diffusion* // Advances in Mathematical Sciences and Applications. **7** (1997), 695–710.

[5] A. F. Tedeev, *The interface blow-up phenomenon and local estimates for doubly degenerate parabolic equations* // Applicable Analysis. **86** (2007), N 6, 755–782.

[6] А. В. Мартыненко, А. Ф. Тедеев, *Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с источником и неоднородной плотностью* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **47** (2007), N 2, 242–252.

[7] S. Kamin, J. Vazquez, *Fundamental solutions and asymptotic behaviour for the p-Laplacian equation* // Revista Matematica Iberoamericana. **4** (1988), N 2, 339–354.

[8] S. Kamin, L. Peletier, *Large time behaviour of solutions of the porous media equation with absortion* // Israel J. Math. **55** (1986), N 2, 129–146.

[9] E. Di Benedetto, *On the local behavior of solutions of degenerate parabolic equations with measurable coefficients* // Ann. sci. norm. super. **13** (1986), N 3, 485–535.

[10] M. M. Porzio, V. Vespri, *Holder estimates for local solutions of some doubly nonlinear degenerate parabolic equations* // J. Diff. Eqs. **103** (1993), 146–178.

[11] A. V. Ivanov, *Uniform Holder estimates for weak solutions of quasilinear degenerate parabolic equations* // LOMI preprints E-10-1989, (1989), 1–22.

[12] B. Abdellaoui, Peral Alonso, *Holder regularity and Harnack inequality for degenerate parabolic equations related to Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequalities* // Nonlinear analysis. **57** (2004), 971–1003.

[13] И. И. Скрыпник, *Регулярность решений вырождающихся квазилинейных параболических уравнений (весовой случай)* // Укр. Мат. Ж. **48** (1996), N 7, 1099–1118.

[14] S. Bonafede, I. I. Skrypnik, *On holder continuity of solutions of doubly nonlinear parabolic equations with weight* // Ukr. Math. J. **51** (1999), N 7, 890–903.

[15] F. Chiarenca, R. Serapioni, *A Harnack inequality for degenerate parabolic equations* // Comm. Partial Different. Equat. **9** (1984), 719–749.

[16] I. M. Kolodii, I. I. Verba, *An a apriori estimate for the modulus of continuity of a generalized solution of a parabolic equation of divergent form with degeneracy* // Ukr. Math. J. **53** (2001), N 2, 214–228.

[17] S. Chanillo, R. L. Wheeden, *Weighted Poincare and Sobolev inequalities and estimates for weighted Peano maximal functions* // Amer. J. Math. **107** (1985), 1191–1226.

[18] J. Heynonen, T. Kilpelainen , O. Martio, *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*. Oxford: Clarendon Press, 1993, 363 p.

[19] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*. М.: Наука, 1967.

Сведения об авторах

Александр Валериевич Мартыненко, Анатолий Федорович Тедеев

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины,
ул. Розы Люксембург 74,
340114 Донецк,
Украина
E-Mail: `amartynenko@rambler.ru`,
`tedeev@iamm.ac.donetsk.ua`