Український математичний вісник
Том 5 **(2008)**, № 1, 59 – 82

О разрешимости первой начально-краевой задачи для вырождающихся параболических уравнений в областях с нерегулярной границей

Сергей П. Дегтярев

(*Представлена С. Д. Ивасишеним*)

Аннотация. В работе используется один известный подход к изучению разрешимости и получению коэрцитивных оценок решений начально-краевых задач для параболических и вырождающихся параболических уравнений второго порядка в области с особыми точками на границе. В весовых классах гладких функций изучаются краевые задачи в области с конической (или угловой) точкой для параболического уравнения, для уравнения с вырождением в конической точке, а также для уравнения, вырождающегося на всей нерегулярной границе. Доказана разрешимость упомянутых задач и получены коэрцитивные оценки решений.

2001 MSC. 35K20, 35K65.

Ключевые слова и фразы. Нерегулярная граница, коническая область, гладкое решение.

Введение

К настоящему времени имеется значительный прогресс в изучении эллиптических задач в областях с нерегулярной границей, в том числе в весовых классах гладких функций. Не претендуя на полноту обзора в этом направлении, отсылаем читателя к работам [1–15] и имеющимся там ссылкам.

Исследования параболических задач в областях с особенностями при этом насчитывают заметно меньшую библиографию. Среди работ в этом направлении, содержащих точные оценки решения в весовых классах гладких функций (которые и будут основным предметом нашего интереса в данной статье), опять же не претендуя на полноту, отметим работы [16–23].

Статья поступила в редакцию 15.01.2008

ISSN 1810 – 3200.

Если же в постановке задачи дополнительно к особенности границы области добавляется еще и особенность или вырождение самого эллиптического или параболического уравнения в особых точках границы, то такие задачи изучены в основном в эллиптическом случае, причем отметим большой вклад, внесенный в изучение таких задач работами [13–15]. Отметим также работу [24], где получены точные коэрцитивные оценки решения в весовых классах Гельдера. В параболическом же случае работы с коэрцитивными оценками решения в случае наличия обеих сингулярностей (границы области и уравнения) автору вообще неизвестны. Отметим, тем не менее, работу [26].

Что касается методов исследования, то в подавляющем большинстве случаев в перечисленных выше работах ключевым моментом в изучении задачи являлось рассмотрение так называемых модельных задач в сингулярной точке, то есть простейших задач, составляющих суть проблемы и рассматриваемых в характерной простейшей области с угловой или иной особенностью (например, в бесконечном конусе или угле). При этом обычно для таких задач, либо методом интегральных преобразований либо иным методом строится более или менее явное решение. В случае же задачи, соединяющей в себе вырождение или особенность уравнения и нерегулярность области, даже простейшая модельная задача (например, в плоском угле) становится чрезвычайно сложной для исследования. Тем более, если целью является получение точных коэрцитивных оценок решения.

В то же время имеется и иной подход к задачам с особенностью на границе, содержащийся еще в работе [1] (метод колец В. А. Кондратьева), а также в работах [2–4] при изучении эллиптических уравнений. А именно, как, по существу, подсказывает сам факт использования весовых классов в такой ситуации, необходимо проконтролировать поведение решения не в самой именно особой точке, а в любой сколь угодно малой ее окрестности. При этом в указанных работах [2–4] применялось сглаживание границы вблизи особой точки, которое и мы используем ниже в данной работе. Далее, в работе [27], в другой ситуации, где нет особенности границы области, но уравнение вырождается на границе, использовались нормы решения, сконструированные по как угодно малым шарам, касающимся границы, с центрами близкими к поверхности вырождения, а не лежащими на ней (впрочем, эти нормы были видоизменены в [28]). В работе [29] также был успешно применен этот подход — автор этой работы исследует задачу Коши во всем пространстве для неравномерно параболического уравнения, рассматривая решение как угодно близко к точке, где нарушается параболичность. При этом, безусловно, во всех четырех перечисленных случаях естественным образом возникают весовые классы функций. Но именно весовые классы, как это хорошо известно, отражают существо вопроса в случае особой точки на границе области.

Целью данной работы является продемонстрировать применение указанного выше подхода к параболическим уравнениям в области с особенностью и показать, что в случае наличия особых точек у границы и особенностей уравнения, указанный выше подход при определенных ограничениях на параметры задачи позволяет без рассмотрения соответствующих модельных задач в самой особой точке получать результаты о разрешимости параболических краевых задач в весовых классах гладких функций, а также получать точные коэрцитивные оценки решения. Подчеркнем при этом еще раз, что попытка избежать рассмотрения точной модельной задачи приводит к определенным ограничениям на данные задачи.

1. Параболическое уравнение в области с угловой или конической точкой на границе

Пусть $T > 0$, $t \in [0,T]$ и пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{R}^N$, причем начало координат точка $O \equiv \{0\} \in \partial\Omega$, $\Omega_T \equiv \Omega \times [0,T]$. Пусть вне точки O граница $\partial\Omega$ представляет собой гладкую поверхность класса $H^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$. Определение стандартных классов Гельдера H^l и $H^{l,l/2}$ см., например, в [30]. В окрестности самой же точки O область Ω представляет собой коническую область следующего вида. Пусть d — односвязная область в пространстве переменных $x' = (x_2,\ldots,x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$ с границей класса $H^{2+\alpha}$. Пусть, далее, для $r_0 > 0$, $e(x_1)$ — строго монотонная (только лишь для простоты) функция класса $H^{2+\alpha}([0,r_0])$, такая, что $e(0) = 0$, $e(x_1)/x_1 \to k > 0$ при $x_1 \to 0$, $e'(x_1) \geq \nu > 0$. Для $x_1 \in [0,r_0]$ обозначим $d(x_1) = e(x_1)d = \{e(x_1)x' : x' \in d\}$ — сжатие области d в $1/e(x_1)$ раз. Обозначим, наконец,

$$\Omega_0 = \{x = (x_1,x') : x_1 \in (0,r_0),\ x' \in d(x_1)\} — \tag{1.1}$$

область конического вида с вершиной в точке O (отметим, что при $e(x_1) \equiv kx_1$, $k > 0$, область Ω_0 представляет собой обычный прямой конус с телесным углом, определяемым областью d). Обозначим также $\Omega^1 = \Omega \setminus \Omega_0$. Таким образом, мы предполагаем, что $\Omega \cap \{|x| < r_0\} = \Omega_0$.

Определим, далее, те весовые пространства Гельдера, в которых мы будем рассматривать данные задачи и ее решение. Пусть $\gamma \in \mathbb{R}^1$, $r = r(x) = |x|$. Через $H_\gamma^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{\Omega_T})$ мы будем обозначать пространство функций $u(x,t)$, определенных в $\overline{\Omega_T}$ при $\gamma \le 0$ и в $\overline{\Omega_T} \setminus O$ при $\gamma > 0$ с конечной нормой

$$|u|^{(2+\alpha)}_{\gamma,\Omega_T} \equiv |r^\gamma u|^{(0)}_{\Omega_T} + |r^{\gamma+1} Du|^{(0)}_{\Omega_T} + |r^{\gamma+2} D^2 u|^{(0)}_{\Omega_T} + |r^{\gamma+2} u_t|^{(0)}_{\Omega_T}$$
$$+ \left\langle r^{\gamma+2+\alpha} Du \right\rangle^{((1+\alpha)/2)}_{t,\Omega_T} + \left\langle r^{\gamma+2+\alpha} D^2 u \right\rangle^{(\alpha)}_{x,\Omega_T} + \left\langle r^{\gamma+2+\alpha} D^2 u \right\rangle^{(\alpha/2)}_{t,\Omega_T}$$
$$+ \left\langle r^{\gamma+2+\alpha} u_t \right\rangle^{(\alpha)}_{x,\Omega_T} + \left\langle r^{\gamma+2+\alpha} u_t \right\rangle^{(\alpha/2)}_{t,\Omega_T}, \quad (1.2)$$

где $|v|^{(0)}_{\Omega_T} = \max_{\overline{\Omega_T}} |v(x,t)|$, а угловые скобки означают соответствующие весовые константы Гельдера, то есть, например, для $a \in \mathbb{R}^1$ весовая константа Гельдера по x равна

$$\left\langle r^a v \right\rangle^{(\alpha)}_{x,\Omega_T} = \sup_{(x,t),(\overline{x},t) \in \overline{\Omega_T}} (\min\{r(x)^a, r(\overline{x})^a\}) \frac{|v(x,t) - v(\overline{x},t)|}{|x-\overline{x}|^\alpha},$$

и аналогично для весовой константы Гельдера по t.

Аналогично определяется пространство $H^{2+\alpha}_\gamma(\overline{\Omega})$ функций, зависящих только от x с нормой

$$|u|^{(2+\alpha)}_{\gamma,\Omega} \equiv |r^\gamma u|^{(0)}_{\Omega} + |r^{\gamma+1} Du|^{(0)}_{\Omega} + |r^{\gamma+2} D^2 u|^{(0)}_{\Omega} + \left\langle r^{\gamma+2+\alpha} D^2 u \right\rangle^{(\alpha)}_{x,\Omega}. \quad (1.3)$$

Определим также пространство $H^{\alpha,\alpha/2}_\gamma(\overline{\Omega_T})$ функций $f(x,t)$ с конечной нормой

$$|f|^{(\alpha)}_{\gamma,\Omega_T} \equiv |r^\gamma f|^{(0)}_{\Omega_T} + \left\langle r^{\gamma+\alpha} f \right\rangle^{(\alpha)}_{x,\Omega_T} + \left\langle r^{\gamma+\alpha} f \right\rangle^{(\alpha/2)}_{t,\Omega_T}. \quad (1.4)$$

Отметим, что для введенных пространств функций, аналогично обычным невесовым пространствам, справедливы следующие интерполяционные неравенства ($0 < l' < l \le 2+\alpha$ в нашем случае)

$$|u|^{(l')}_{\gamma,\Omega_T} \le \varepsilon |u|^{(l)}_{\gamma,\Omega_T} + C_\varepsilon |r^\gamma u|^{(0)}_{\Omega_T}, \quad (1.5)$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно, а C_ε — некоторая константа, зависящая от ε. Доказательство неравенств (1.5) см., например, в [29].

Договоримся также обозначать одним символом C или ν все абсолютные константы либо константы, зависящие только от раз и навсегда зафиксированных параметров задачи.

Рассмотрим в области Ω_T следующую первую начально-краевую задачу для неизвестной функции $u(x,t)$, причем только лишь ради простоты краевое условие Дирихле на $\Gamma_T = \partial\Omega \times [0,T]$ будем предполагать нулевым

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1.6}$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma_T, \tag{1.7}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.8}$$

где $a_{ij} \in H_0^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega_T})$, $b_i \in H_1^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega_T})$, $c \in H_2^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega_T})$, f и u_0 — заданные функции, причем для $\xi \in \mathbb{R}^N$ выполнено $\nu\xi^2 \le \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j \le \nu^{-1}\xi^2$.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены указанные выше условия на область Ω и коэффициенты уравнения* (1.6) *и пусть при заданном $\gamma \in \mathbb{R}^1$ размер области d из определения конической области Ω_0 достаточно мал в каком-либо одном из направлений (эта малость определяется только нормами коэффициентов уравнения* (1.6)*, константой эллиптичности ν и параметром γ). Тогда для любой правой части $f(x,t) \in H_{\gamma+2}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega_T})$ и любых начальных данных $u_0(x) \in H_\gamma^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ задача* (1.6)–(1.8) *имеет единственное решение из пространства $H_\gamma^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{\Omega_T})$, причем справедлива оценка*

$$|u|_{\gamma,\Omega_T}^{(2+\alpha)} \le C\bigl(|f|_{\gamma+2,\Omega_T}^{(\alpha)} + |u_0|_{\gamma,\Omega}^{(2+\alpha)}\bigr), \tag{1.9}$$

где константа C зависит только от γ, α, области Ω, коэффициентов уравнения и величины T.

Доказательство. Отметим сразу же, что, не ограничивая общности, мы можем считать $u_0(x) \equiv 0$, так как общий случай сводится к указанному простой заменой неизвестной функции $v = u - u_0$, причем для получающейся в уравнении для v правой части $\widetilde{f}$, в силу свойств коэффициентов уравнения (1.6) и функции u_0, справедлива, как легко видеть, оценка

$$|\widetilde{f}|_{\gamma+2,\Omega_T}^{(\alpha)} \le C\bigl(|f|_{\gamma+2,\Omega_T}^{(\alpha)} + |u_0|_{\gamma,\Omega}^{(2+\alpha)}\bigr).$$

Мы определим сейчас некоторую последовательность начально-краевых задач в гладких областях, приближающих задачу (1.6)–(1.8).

Пусть для $n \ge 1$ $D_n = \Omega \setminus (\Omega_0 \cap \{x_1 \le r_n = 4^{-n} r_0\})$ — область Ω с отрезанным маленьким конусом. Продолжим получившийся гладкий кусок границы $\partial\Omega$, то есть поверхность $\partial D_n \setminus \{x_1 = r_n\}$ до некоторой поверхности класса $H^{2+\alpha}$, ограничивающей односвязную область Ω_n. Нетрудно видеть, что такое продолжение может быть выполнено таким образом, чтобы продолженный кусок поверхности, который мы обозначим σ_n, лежал в области $r_{n+1} \le x_1 \le r_n$ и чтобы вся сглаженная поверхность конуса $\partial\Omega_n \setminus \partial(\Omega \setminus \Omega_0)$ задавалась бы уравнением $x_1 = g_n(x')$, $x' \in d(r_0)$ с выпуклой функцией $g_n(x')$, $|Dg| \le C$, $|D^2 g| \le C/r_n$. Возможность такого продолжения следует из строгой монотонности функции $e(x_1)$ и, по существу, может быть сведена к продолжению функции одной переменной $e(x_1)$ с множества $[r_n, r_0]$ на множество $[r_{n+1}, r_n]$ до функции, равной нулю при $x_1 = r_{n+1}$ и имеющей в этой точке бесконечную производную (вертикальную касательную) достаточного порядка. Мы не останавливаемся на этом подробно (по существу, как убедится читатель ниже, способ сглаживания конической поверхности не имеет большого значения и указанное выше представление сглаженной поверхности будет использовано только лишь в четвертом параграфе статьи для продолжения вырождающихся там коэффициентов уравнения и только лишь для простоты.)

Продолжим еще функцию $f(x,t)$ с $D_{n,T} = D_n \times [0,T]$ на всю $\Omega_{n,T} = \Omega_n \times [0,T]$ до функции $f_n(x,t)$, положив ее нулем на $\sigma_n \times [0,T]$ и полагая ее, например, линейной по x_1 в области $\Omega_n \setminus D_n$. Нетрудно проверить, что для такой функции $f_n(x,t)$ справедлива оценка

$$|r^{\gamma+2} f_n|^{(0)}_{\Omega_{n,T}} \le C\big(|f|^{(\alpha)}_{\gamma+2,\Omega_T}\big).$$

Обозначая $\Omega_{n,T} = \Omega_n \times [0,T]$, видим, что в силу наших построений, для следующей задачи выполнены условия согласования до первого порядка включительно

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i} + c(x,t) u_n = f_n(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_{n,T},$$
$$u_n(x,t) = 0,\ (x,t) \in \partial\Omega_n \times [0,T]; \qquad u_n(x,0) = 0. \tag{1.10}$$

Как хорошо известно (см., например, [30]), задача (1.10) имеет единственное решение из класса $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{\Omega_{n,T}})$. Мы покажем, что справедлива следующая оценка.

Лемма 1.1. *Пусть* $D_{n,T} = D_n \times [0,T]$. *Для решения задачи* (1.10) *справедливо неравенство*

$$|u_n|^{(2+\alpha)}_{\gamma,D_{n-1,T}} \le C\big(|f|^{(\alpha)}_{\gamma+2,\Omega_T} + |r^\gamma u_n|^{(0)}_{\Omega_{n,T}}\big), \tag{1.11}$$

где константа C не зависит от n.

Доказательство. Во-первых, в силу известных локальных оценок,

$$|u_n|^{(2+\alpha)}_{\Omega^1_T} \le C\big(|f|^{(\alpha)}_{D_{1,T}} + |u_n|^{(0)}_{D_{1,T}}\big),$$

или, так как на $D_1 \supset \Omega^1$ $r_0/4 \le r \le C$,

$$|u_n|^{(2+\alpha)}_{\gamma,\Omega^1_T} \le C(|f|^{(\alpha)}_{\gamma+2,\Omega_T} + |r^\gamma u_n|^{(0)}_{\Omega_{n,T}}). \tag{1.12}$$

Поэтому для доказательства (1.11) достаточно рассмотреть только область $G_{n,T} = \overline{\Omega_{0,T}} \cap \overline{D_{n-1,T}}$, где $G_n = \Omega_0 \cap D_{n-1}$, $\Omega_{0,T} = \Omega_0 \times [0,T]$, учитывая при этом, что в этой области величины x_1 и r эквивалентны, то есть

$$1 \le x_1/r \le C. \tag{1.13}$$

Пусть λ достаточно мало и фиксировано и пусть $(x_0,t_0) \in G_{n,T}$. Обозначим сейчас $r = |x_0|$ и рассмотрим цилиндр

$$\widetilde{q}_\lambda(x_0,t_0) = \big\{(x,t) : |x-x_0| < \lambda r, t_0 - \lambda^2 r^2 < t < t_0 + \lambda^2 r^2\big\}. \tag{1.14}$$

В зависимости от расположения точки (x_0,t_0) мы имеем различное расположение цилиндра $\widetilde{q}_\lambda(x_0,t_0)$ относительно $\partial G_{n,T}$. Если шар $|x-x_0| < \lambda r$ в определении $\widetilde{q}_\lambda(x_0,t_0)$ находится от $\partial\Omega$ на расстоянии, не меньше, чем λr, то положим

$$q_\lambda(x_0,t_0) = \widetilde{q}_\lambda(x_0,t_0) \cap \{t \ge 0\}.$$

В противном случае положим

$$q_\lambda(x_0,t_0) = \widetilde{q}_{4\lambda}(\overline{x_0},t_0) \cap \Omega_T \cap \{t \ge 0\},$$

где $\overline{x_0}$ — точка на $\partial\Omega$, ближайшая к x_0. Мы предполагаем (хотя это и не является принципиально важным, и делается для простоты), что $\lambda < 1/8$ выбрано настолько малым, что в этом втором случае $q_\lambda(x_0,t_0)$ содержит только одну связную компоненту поверхности $\partial\Omega$, которая задается функцией соответствующей гладкости в локальных координатах с центром в точке $\overline{x_0}$. Такой выбор λ возможен равномерно по n, так как поверхности $\partial\Omega \cap \{r/2 < |x| < 2r\}$ при замене $x = ry$ в переменных y имеют, как нетрудно проверить исходя из определения Ω_0, ограниченную равномерно по r кривизну и вообще ограниченную равномерно по r $H^{2+\alpha}$-норму. Кроме того, при достаточно малом фиксированном λ и в первом, и во втором случае области $q_\lambda(x_0,t_0)$ лежат в $D_{n,T}$.

Рассмотрим сужение задачи (1.10) и ее решения u_n на множество $q_\lambda(x_0, t_0)$. Перейдем в задаче (1.10) на этом множестве от переменных (x, t) к переменным (y, τ) в соответствии с соотношениями

$$x = x_0 + ry \ (x = \overline{x_0} + ry), \qquad t = t_0 + r^2\tau, \tag{1.15}$$

обозначая все функции после замены переменных теми же символами. Уравнение примет вид

$$\frac{\partial u_n}{\partial \tau} - \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u_n}{\partial y_i \partial y_j} - \sum_{i=1}^{N} r b_i \frac{\partial u_n}{\partial y_i} + r^2 c(y,\tau)u_n = r^2 f(y,\tau), \tag{1.16}$$

а область $q_\lambda(x_0, t_0)$ перейдет в область Q_λ, которая либо является цилиндром $Q_\lambda = \{|y| < \lambda, -\tau_0 < \tau < \lambda^2\}$ (где $0 \le \tau_0 \le \lambda^2$ в зависимости от t_0), либо является частью указанного цилиндра, ограниченной с одной из сторон поверхностью, являющейся образом при указанном преобразовании поверхности $\partial\Omega \times [0, T]$ и имеющей равномерно ограниченную по r $H^{2+\alpha}$-норму (как отмечено выше), причем на этой поверхности выполнено граничное условие $u_n = 0$.

Кроме того, нетрудно проверить, что в силу наших предположений о коэффициентах уравнения (1.6), коэффициенты уравнения (1.16) имеют $H^{\alpha,\alpha/2}$-нормы, равномерно ограниченные по r.

Ввиду хорошо известных локальных оценок решения (см. [30]), справедлива оценка (напомним, что мы считаем начальное условие в задаче (1.10) нулевым)

$$|u_n(y,\tau)|^{(2+\alpha)}_{Q_{\lambda/2}} \le C|f(y,\tau)|^{(\alpha)}_{Q_\lambda} + C|u(y,\tau)|^{(0)}_{Q_\lambda}. \tag{1.17}$$

Выполняя в этом неравенстве обратную замену переменных $(y, \tau) \to (x, t)$ и умножая обе части получающегося соотношения на r^γ, видим, что, так как при $\lambda < 1/8$ величины $|x|$ и $|x_0|$ эквивалентны на $q_\lambda(x_0, t_0)$,

$$|u_n(x,t)|^{(2+\alpha)}_{\gamma,q_{\lambda/2}(x_0,t_0)} \le C|f(x,t)|^{(\alpha)}_{\gamma+2,q_\lambda(x_0,t_0)} + C||x|^\gamma u(x,t)|^{(0)}_{q_\lambda(x_0,t_0)}, \tag{1.18}$$

где константа C не зависит ни от n, ни от (x_0, t_0).

Поскольку (x_0, t_0) — произвольная точка из $\overline{D_{n-1}} \times [0, T]$, то, таким образом, беря sup по всем рассматриваемым точкам (x_0, t_0), мы получаем оценку (1.11), но только с тем ограничением, что в определении норм в (1.2)–(1.4) выполнено $|x - \overline{x}| \le \frac{\lambda}{2} r(x)$ и $|t - \overline{t}| \le (\frac{\lambda}{2})^2 r^2(x)$ (мы, не ограничивая общности, считаем $r(\overline{x}) \le r(x)$). Чтобы снять это ограничение, заметим, что если, например, $|x-\overline{x}| > \frac{\lambda}{2}r(x)$, то, например, для константы Гельдера производной u_{nx_i},

$$r(\overline{x})^{\gamma+1+\alpha}\frac{|u_{nx_i}(x,t)-u_{n\overline{x}_i}(\overline{x},t)|}{|x-\overline{x}|^{\alpha}} \\ \leq Cr(x)^{\gamma+1}|u_{nx_i}(x,t)|+Cr(\overline{x})^{\gamma+1}|u_{n\overline{x}_i}(\overline{x},t)|.$$

Воспользовавшись теперь интерполяционным неравенством (1.5), получаем, что с произвольно малым $\varepsilon>0$

$$\sup_{D_{n-1,T}} r(x)^{\gamma+1}|u_{nx_i}(x,t)| \leq \varepsilon|u|^{(2+\alpha)}_{\gamma,D_{n-1,T}}+C_\varepsilon|r^\gamma u|^{(0)}_{D_{n-1,T}}.$$

То есть, отсюда и из (1.18) вытекает (1.11) со слагаемым $\varepsilon|u|^{(2+\alpha)}_{\gamma,D_{n-1,T}}$ в правой части. Выбирая $\varepsilon<1/2$ достаточно малым и перенося это слагаемое в левую часть, получаем неравенство (1.11). Лемма 1.1 доказана. $\square$

Пока что мы не использовали ограничения теоремы 1.1 на размеры области d, мы используем их ниже при оценке величины $|r^\gamma u|^{(0)}_{D_{n,T}}$.

Лемма 1.2. *Пусть $0<\rho<r_0$ фиксировано и пусть $\Omega_{1,\rho,T}\equiv\Omega_T\cap\{|x|>\rho\}$. Если размер области d достаточно мал в каком-либо из направлений, то*

$$|r^\gamma u|^{(0)}_{\Omega_{n,T}} \leq C|r^{\gamma+2}f|^{(0)}_{\Omega_{n,T}}+CT|u|^{(2+\alpha)}_{\gamma,\Omega_{1,\rho,T}}. \tag{1.19}$$

Доказательство. Во-первых, отметим, что на множестве $(x,t)\in\Omega_{1,\rho,T}\equiv\Omega_T\cap\{|x|>\rho\}$, где $\rho\leq r(x)\leq C$, эта оценка очевидна, так как $|u(x,t)|\leq T|u_t(x,t)|^{(0)}_{\Omega_{1,\rho,T}}$ ввиду нулевых начальных условий. Поэтому рассмотрим только множество $(x,t)\in\Omega_{n,\rho,T}=\Omega_{n,T}\setminus\Omega_{1,\rho,T}$.

Для того, чтобы получить оценку на этом множестве, перейдем в этой области, как это сделано в [1], к полярным координатам ($r=|x|,\ \omega_1,\dots,\omega_{N-1}$) с центром в точке O и, кроме того, как и в [1], выполним замену переменной r на ω_0 в соответствии с равенством $r=e^{-\omega_0}$. При этом, как хорошо известно (см. [1]), уравнение в (1.10), после деления обеих его частей на $e^{2\omega_0}$, примет вид

$$e^{-2\omega_0}\frac{\partial u_n}{\partial t}-\sum_{i,j=0}^{N-1}\widetilde{a}_{ij}\frac{\partial^2 u_n}{\partial\omega_i\partial\omega_j}-\sum_{i=0}^{N-1}\widetilde{b}_i\frac{\partial u_n}{\partial\omega_i}+\widetilde{c}u_n=fe^{-2\omega_0}, \tag{1.20}$$

причем, в силу наших предположений о коэффициентах исходного уравнения, коэффициенты $\widetilde{a}_{ij}$, $\widetilde{b}_i$ и $\widetilde{c}$ ограничены, причем

$$\sum_{i,j=0}^{N-1}\widetilde{a}_{ij}\xi_i\xi_j\geq\nu\xi^2,\quad \xi\in\mathbb{R}^N. \tag{1.21}$$

При этом область $\Omega_{n,\rho} = \Omega_n \cap \{|x| < \rho\}$ перейдет в трубчатую область T_n (в цилиндр при $e(x_1) \equiv x_1$) с осью $O\omega_0$, ограниченную слева поверхностью $\omega_0 = -\ln\rho$, а справа — некоторой другой поверхностью. Поскольку мы оцениваем функцию $v = r^\gamma u_n$, или, в новых переменных $v = e^{-\gamma\omega_0}u_n$, то произведем в уравнении (1.19) замену неизвестной функции $u_n = ve^{\gamma\omega_0}$, после чего оно примет вид

$$e^{-2\omega_0}\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i,j=0}^{N-1}\widetilde{\widetilde{a}}_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial\omega_i\partial\omega_j} - \sum_{i=0}^{N-1}\widetilde{\widetilde{b}}_i(\gamma)\frac{\partial v}{\partial\omega_i} + \widetilde{\widetilde{c}}(\gamma)v = fe^{-(2+\gamma)\omega_0} \quad (1.22)$$

с нулевым начальным условием и нулевым граничным условием, кроме поверхности $\omega_0 = -\ln\rho$.

Отметим, что толщина трубчатой области T_n определяется размерами области d в различных направлениях. Пусть толщина области T_n достаточно мала в направлении (не ограничивая общности) оси $O\omega_1$ и не превосходит величины d_1. Оценка $\max|v|$ производится для тонкой области стандартной заменой неизвестной функции $v = (2 - e^{-\omega_1/d_1})w$ (см., например, [31, 32]). При этой замене, ввиду того, что $\widetilde{\widetilde{a}}_{11} \geq \nu$, коэффициент при самой функции w в уравнении (1.22) для w, как легко подсчитать, становится положительным, если d_1 достаточно мало. Поэтому из классического принципа максимума следует, что

$$|w| \leq C\Big(\max_{T_n\times[0,T]}|fe^{-(2+\gamma)\omega_0}| + \max_{\{\omega_0=-\ln\rho\}\times[0,T]}|u|\Big), \quad (1.23)$$

откуда, ввиду определения функций w и v следует, как и выше, что

$$|r^\gamma u|^{(0)}_{\Omega_{n,\rho,T}} \leq C|r^{\gamma+2}f|^{(0)}_{\Omega_{n,T}} + CT|u|^{(2+\alpha)}_{\gamma,\Omega_{1,\rho,T}}. \quad (1.24)$$

Последнее неравенство, ввиду вышесказанного, доказывает лемму 1.2. □

Продолжим доказательство теоремы 1.1. Из двух доказанных выше лемм вытекает, что справедлива оценка

$$|u_n|^{(2+\alpha)}_{\gamma,D_{n-1,T}} \leq C|f|^{(\alpha)}_{\gamma+2,\Omega_T} + CT|u|^{(2+\alpha)}_{\gamma,D_{n-1,T}}, \quad (1.25)$$

откуда при достаточно малом $T \leq T_0$ легко вытекает, что

$$|u_n|^{(2+\alpha)}_{\gamma,D_{n-1,T}} \leq C|f|^{(\alpha)}_{\gamma+2,\Omega_T}, \quad (1.26)$$

причем величина T_0 не зависит, очевидно, от нормы функции f. Двигаясь вверх по оси Ot по шагам величины $T_0/2$, как это сделано в [30], получаем оценку (1.26) для любого $T > 0$ с константой, зависящей, вообще говоря, от T.

Таким образом, из оценки (1.26) следует, что на любом компакте $D_{k,T}$ последовательность $\{u_n\}$, $n \geq k+1$, ограничена в пространстве $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{D_{k,T}})$ и, следовательно, компактна в пространстве $H^{2+\alpha',\frac{2+\alpha'}{2}}(\overline{D_{k,T}})$ с любым $\alpha' < \alpha$. Используя диагональный процесс, мы можем из последовательности $\{u_n\}$ выделить подпоследовательность, сходящуюся в пространстве $H^{2+\alpha',\frac{2+\alpha'}{2}}$ на любом компакте $\overline{D_{k,T}}$, причем предельная функция, как легко видеть, определена на всей области Ω_T, принадлежит пространству $H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}$ на каждом $\overline{D_{k,T}}$, удовлетворяет уравнению (1.6), начальным и граничным условиям. Таким образом, построенная предельная функция дает решение задачи (1.6)–(1.8) и удовлетворяет, как легко видеть в силу (1.26), оценке (1.9).

Что же касается самой точки O, то при $\gamma > 0$ начальные данные и правая часть уравнения в задаче (1.6)–(1.8), а, соответственно, и решение этой задачи, могут иметь особенность в этой точке. С другой стороны при $\gamma < 0$ решение равно нулю в точке O, и, следовательно, граничные условия выполняются и в этой точке. (См. работы [17, 18] по поводу возможной асимптотики решения в конической точке.)

Мы не останавливаемся подробно на доказательстве единственности полученного решения из указанного класса, так как она легко следует из принципа максимума путем оценок, полностью аналогичных оценкам леммы 1.2 с применением на бесконечности барьера вида $W = \varepsilon\omega_0^2$, как это сделано, например, в [24]. Теорема 1.1 доказана. $\square$

Отметим, что если коэффициенты и правая часть уравнения (1.6) обладают большей регулярностью, чем требуется в теореме 1.1, то при некоторых условиях ограничение на размер области d можно снять. Например, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Пусть область d имеет произвольные размеры. Если $\gamma = 0$, коэффициент $c(x,t)$ уравнения (1.6) и его правая часть f ограничены, то задача (1.6)–(1.8) имеет единственное решение, которое удовлетворяет оценке*

$$|u|_{0,\Omega_T}^{(2+\alpha)} \leq C\big(|f|_{2,\Omega_T}^{(\alpha)} + |u_0|_{0,\Omega}^{(2+\alpha)} + |f|_{\Omega_T}^{(0)}\big), \tag{1.27}$$

где константа C зависит только от γ, α, области Ω, коэффициентов уравнения и величины T.

(Отметим, что оценка (1.27) не является, к сожалению, коэрцитивной.)

Мы не приводим подробного доказательства этой теоремы, так как оно полностью аналогично доказательству теоремы 1.1. Единственное небольшое отличие заключается в доказательстве леммы 1.2 при оценке $|r^\gamma u_n|^{(0)}_{\Omega_{n,\rho,T}}$. В отличие от доказательства леммы 1.2 после перехода к координатам $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{N-1})$ не следует делить обе части уравнения на величину $e^{2\omega_0}$. При этом, как и в лемме 1.2, мы получаем параболическое уравнение вида (1.20), но без коэффициента $e^{-2\omega_0}$ при $\partial u_n/\partial t$ и с ограниченным коэффициентом $\widetilde{c}$. Следовательно, стандартной заменой неизвестной функции $u_n = we^{\mu t}$ с выбором параметра μ достаточно большим мы можем сделать коэффициент при w в соответствующем уравнении положительным и воспользоваться принципом максимума.

2. Параболическое уравнение, вырождающееся в конической точке O

Сохраним в этом параграфе статьи все те же обозначения, что и в предыдущем параграфе.

В области Ω_T рассмотрим задачу вида (1.6)–(1.8), где уравнение (1.6) заменено вырождающимся уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} - r^2 \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u = f(x,t),$$

$$(x,t) \in \Omega_T, \quad (2.1)$$

где коэффициенты a_{ij} — такие же, как в теореме 1.1, а коэффициенты b_i и c имеют конечные нормы $|b_i|^{(\alpha)}_{-1,\Omega_T}$ и $|c|^{(\alpha)}_{0,\Omega_T}$.

Частный случай такой задачи, когда Ω есть угол на плоскости и уравнение является простейшим, то есть $a_{ij} = \delta_{ij}$, $b_i = 0$, $c = 0$, был рассмотрен в [26] в некоторых классах суммируемых функций с применением операторных методов.

Определим нормы решений, адекватные рассматриваемой задаче (2.1), (1.7), (1.8). Положим

$$|u|^{(2+\alpha)}_{2,\gamma,\Omega_T} \equiv |r^\gamma u|^{(0)}_{\Omega_T} + |r^{\gamma+1} Du|^{(0)}_{\Omega_T} + |r^{\gamma+2} D^2 u|^{(0)}_{\Omega_T} + |r^\gamma u_t|^{(0)}_{\Omega_T}$$
$$+ \left\langle r^{\gamma+1} Du \right\rangle^{((1+\alpha)/2)}_{t,\Omega_T} + \left\langle r^{\gamma+2+\alpha} D^2 u \right\rangle^{(\alpha)}_{x,\Omega_T} + \left\langle r^{\gamma+2} D^2 u \right\rangle^{(\alpha/2)}_{t,\Omega_T}$$
$$+ + \left\langle r^{\gamma+\alpha} u_t \right\rangle^{(\alpha)}_{x,\Omega_T} + \left\langle r^\gamma u_t \right\rangle^{(\alpha/2)}_{t,\Omega_T},$$

и аналогично определим норму для функций, не зависящих от t $|u|^{(2+\alpha)}_{2,\gamma,\Omega}$ — без соответствующих слагаемых, зависящих от t, — она, как легко видеть, совпадает с нормой $|u|^{(2+\alpha)}_{\gamma,\Omega}$. Пусть, кроме того, $|f|^{(\alpha)}_{\gamma,\Omega_T}$ — такая же, как и выше.

Теорема 2.1. *Пусть $\gamma \in \mathbb{R}^1$ произвольно и пусть конечны нормы $|u_0|^{(2+\alpha)}_{\gamma,\Omega}$ и $|f|^{(\alpha)}_{\gamma,\Omega_T}$. Тогда (независимо от размеров области d в определении Ω) задача* (2.1), (1.7), (1.8) *имеет единственное решение, для которого справедлива оценка*

$$|u|^{(2+\alpha)}_{2,\gamma,\Omega_T} \leq C(|f|^{(\alpha)}_{\gamma,\Omega_T} + |u_0|^{(2+\alpha)}_{\gamma,\Omega}), \tag{2.2}$$

где константа C зависит только от γ, α, области Ω, коэффициентов уравнения и величины T.

Доказательство. Мы не будем подробно приводить все рассуждения, так как они полностью повторяют доказательство теоремы 1.1. Отметим лишь два главных отличия, вытекающих из самого вида уравнения (2.1).

Во-первых, в качестве малых цилиндров $\widetilde{q}_\lambda(x_0,t_0)$ для $(x_0,t_0) \in D_{n-1,T}$ нужно брать цилиндры, немасштабируемые по t $(r = |x_0|)$:

$$\widetilde{q}_\lambda(x_0,t_0) = \bigl\{(x,t) : |x - x_0| \leq \lambda r, \quad |t - t_0| \leq \lambda^2\bigr\}, \tag{2.3}$$

при этом $q_\lambda(x_0,t_0)$ определяются аналогично теореме 1.1. Соответствующая замена переменных, переводящая области $q_\lambda(x_0,t_0)$ в области стандартных размеров, имеет вид

$$x = x_0 + ry, \qquad t = t_0 + \tau\ —$$

без масштабирования по переменной t. Легко видеть, что при такой замене переменных уравнение (2.1) переходит в стандартное параболическое уравнение, допускающее стандартные локальные оценки.

Второе отличие возникает при оценке величины $|r^\gamma u_n|^{(0)}_{\Omega_{n,T}}$ и заключается в следующем, аналогично теореме 1.2. В отличие от уравнения (1.22), где, ввиду множителя $e^{-2\omega_0}$ при $\partial v/\partial t$, мы вынуждены были использовать эллиптическую часть уравнения для оценки $|v|^{(0)}$ (что привело к требованию малости размера области d в каком-либо из направлений), при преобразовании уравнения (2.1) нет необходимости делить обе части на $e^{2\omega_0}$, и мы получаем уравнение с ограниченными коэффициентами, но без множителя $e^{-2\omega_0}$ при $\partial v/\partial t$. Поэтому, как и в теореме 1.2, коэффициент при неизвестной функции в уравнении может быть сделан положительным с помощью хорошо известной замены неизвестной функции $v = we^{\mu t}$ с достаточно большим $\mu > 0$. Применение принципа максимума после этого дает оценку $|v|^{(0)} = |r^\gamma u_n|^{(0)}$ гораздо проще, чем в теореме 1.1.

Так как все остальные шаги доказательства полностью аналогичны теореме 1.1, то этим мы завершим доказательство теоремы 2.1. $\square$

В заключение данного пункта отметим, что уравнение (2.1) приведено нами как простейшее, так как его частный случай рассматривался в [26]. Полностью аналогично теореме 2.1 (и теореме 1.1 может быть рассмотрен случай уравнения, более общего, чем (2.1), когда множитель r^2 при эллиптической части уравнения заменен на множитель r^a, $a \in \mathbb{R}$. При этом при $a \neq 2$ возникает соответствующее масштабирование по переменной t в определении областей $q_\lambda(x_0, t_0)$, как это делалось в теореме 1.1, и, соответственно, меняются естественные весовые пространства функций и требования на младшие коэффициенты уравнения. Оценка же младшей нормы решения при $a \geq 2$ проводится точно так же, как в теореме 2.1 без ограничения на область d (см. по этому поводу следующий пункт статьи), а при $a < 2$ — точно так же, как в лемме 1.2 теоремы 1.1 с требованием малости размера области d в каком-либо направлении.

3. Параболическое уравнение, вырождающееся на всей границе нерегулярной области Ω

При изучении квазилинейного вырождающегося уравнения фильтрации, выраженного в терминах давления, и после линеаризации этого уравнения на финитных начальных данных возникает линейная краевая задача вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varphi(x,t) \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{3.2}$$

где заданная функция $\varphi(x,t) > 0$ при $(x,t) \in \Omega_T$ и имеет ноль первого порядка на всей границе $\partial\Omega$ при $t \in [0,T]$, а коэффициенты уравнения (3.1) достаточно регулярны и удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, сформулированным ниже.

Отметим, что характерной особенностью вырождающейся задачи (3.1), (3.2) является то, что мы будем рассматривать ее при таких условиях на коэффициенты b_i (унаследованных от задачи фильтрации), что, при постановке ее в определенных ниже достаточно гладких классах решений, граничные условия на $\partial\Omega$ отсутствуют (см. условия Фикеры в [33]).

Чтобы сформулировать требования на коэффициенты и данные уравнения нам нужны несколько определений и для нас важным является то, что задача (3.1), (3.2) в гладкой области Ω была исследована в [28, 34, 35]. Следуя работам [34, 35] определим “взвешенное” расстояние в Ω, относительно которого будут вычисляться константы Гельдера ($x, \overline{x} \in \overline{\Omega}$):

$$s(x,\overline{x}) = \frac{|x-\overline{x}|}{\sqrt{d(x)} + \sqrt{d(\overline{x})} + \sqrt{|x-\overline{x}|}}, \tag{3.3}$$

где $d(x)$ и $d(\overline{x})$ — расстояния до $\partial\Omega$ от точек x и $\overline{x}$, соответственно. Определим, далее, весовую константу Гельдера функции $u(x)$ относительно этого расстояния ($b \in \mathbb{R}$):

$$\langle r^b u\rangle^{(\alpha)}_{x,s,\Omega} = \sup_{x,\overline{x}\in\overline{\Omega}} \min\{r(x)^b, r(\overline{x})^b\} \frac{|u(x)-u(\overline{x})|}{s(x,\overline{x})^\alpha}. \tag{3.4}$$

Определим еще следующие весовые нормы функций, заданных в $\overline{\Omega_T}$. Пусть $a \in \mathbb{R}$ — параметр. Тогда

$$\|f\|^{(\alpha)}_{\gamma,a,\Omega_T} = |r^\gamma f|^{(0)}_{\Omega_T} + \langle r^{\gamma+\alpha/2} f\rangle^{(\alpha)}_{x,s,\Omega_T} + \langle r^{\gamma-\frac{\alpha}{2}(a-2)} f\rangle^{(\frac{\alpha}{2})}_{t,\Omega_T}, \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
\|u\|^{(2+\alpha)}_{\gamma,a,\Omega_T} = {} & |r^{\gamma+(a-2)}u|^{(0)}_{\Omega_T} + |r^{\gamma+(a-1)}Du|^{(0)}_{\Omega_T} \\
& + |r^{\gamma+(a-1)}d(x)D^2u|^{(0)}_{\Omega_T} + |r^\gamma u_t|^{(0)}_{\Omega_T} \\
& + \langle r^{\gamma+(a-1)-\frac{1+\alpha}{2}(a-2)}d(x)Du\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,\Omega_T} \\
& + \langle r^{\gamma+(a-1)+\alpha/2}d(x)D^2u\rangle^{(\alpha)}_{x,s,\Omega_T} \\
& + \langle r^{\gamma+(a-1)-\frac{\alpha}{2}(a-2)}d(x)D^2u\rangle^{(\alpha/2)}_{t,\Omega_T} \\
& + \langle r^{\gamma+\alpha/2}u_t\rangle^{(\alpha)}_{x,s,\Omega_T} + \langle r^{\gamma-\frac{\alpha}{2}(a-2)}u_t\rangle^{(\alpha/2)}_{t,\Omega_T}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Норма $\|u_0(x)\|^{(2+\alpha)}_{\gamma,a,\Omega}$ определяется полностью аналогично (3.6) выбрасыванием из (3.6) слагаемых, отвечающих за гладкость по переменной t.

Сформулируем теперь требования на коэффициенты уравнения (3.1). Пусть a_{ij} равномерно в $\overline{\Omega_T}$ удовлетворяют условию эллиптичности и $\|a_{ij}\|^{(\alpha)}_{0,a,\Omega_T} < \infty$. Пусть, далее, $\|b_i\|^{(\alpha)}_{-(a-1),a,\Omega_T} < \infty$ и

$\|c(x,t)\|^{(\alpha)}_{-(a-2),a,\Omega_T} < \infty$. Кроме того, мы предполагаем, что вектор $\overline{b} = \{b_1, \dots, b_N\}$ обладает тем свойством, что

$$(\overline{b}(x,t), \overrightarrow{n}) \geq \nu r^{a-1}, \quad x \in \partial\Omega, \tag{3.7}$$

где $\overrightarrow{n}$ — нормаль к $\partial\Omega$, направленная внутрь Ω.

Относительно функции $\varphi(x,t)$ в уравнении (3.1) мы предполагаем, что, как уже упоминалось, $\varphi(x,t) > 0$ в Ω_T и $\varphi(x,t) = 0$ при $x \in \partial\Omega$. Кроме того, пусть $\|\varphi\|^{(\alpha)}_{-a,a,\Omega_T} < \infty$, а градиент $\nabla\varphi$ функции φ обладает такими же свойствами, что и вектор $\overline{b}$, то есть $\|\nabla\varphi\|^{(\alpha)}_{-(a-1),a,\Omega_T} < \infty$ и для $\nabla\varphi$ выполнено условие (3.7), а кроме того, $\varphi(x,t) \geq \nu r(x)^{a-1} \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$.

Теорема 3.1. *Пусть $a \geq 2$ и с этим параметром a выполнены сформулированные выше требования на коэффициенты уравнения* (3.1) *и пусть $\gamma \in \mathbb{R}$ произвольно. Тогда для любых f и u_0 таких, что $\|f\|^{(\alpha)}_{\gamma,a,\Omega_T} < \infty$ и $\|u_0\|^{(2+\alpha)}_{\gamma,a,\Omega} < \infty$, задача* (3.1), (3.2) *имеет единственное решение, причем*

$$\|u\|^{(2+\alpha)}_{\gamma,a,\Omega_T} \leq C(\|f\|^{(\alpha)}_{\gamma,a,\Omega_T} + \|u_0\|^{(2+\alpha)}_{\gamma,a,\Omega}), \tag{3.8}$$

где константа C зависит только от γ, α, a, области Ω, коэффициентов уравнения и величины T.

Доказательство. Доказательство этой теоремы получается в точности по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.1, причем, как и выше, ввиду возможной замены неизвестной функции $u(x,t) \to u(x,t) - u_0(x)$, мы можем, не ограничивая общности, считать, что $u_0(x) \equiv 0$ в Ω.

Для того, чтобы определить последовательность задач в $\Omega_{n,T}$ ($\Omega_{n,T}$ — такие же, как и выше в доказательстве теоремы 1.1, сглаженные области, $r_n = 4^{-n} r_0$ — также из доказательства теоремы 1.1), нам нужна следующая лемма.

Лемма 3.1. *Существует такая последовательность функций $\varphi_n(x,t)$ и векторов $\overline{b}_n(x,t)$, определенных в $\Omega_{n,T}$, что*

$$\varphi_n(x,t) \equiv \varphi(x,t), \quad \overline{b}_n(x,t) \equiv \overline{b}(x,t), \qquad (x,t) \in D_{n,T},$$

$$\|\varphi_n\|^{(\alpha)}_{-a,a,\Omega_{n,T}} + \|\nabla\varphi_n\|^{(\alpha)}_{-(a-1),a,\Omega_{n,T}} + \|\overline{b}_n\|^{(\alpha)}_{-(a-1),a,\Omega_{n,T}} \leq C(\varphi,\overline{b},\partial\Omega),$$

и, кроме того, $\varphi_n = 0$ на $\partial\Omega_n$, а векторы $\nabla\varphi_n$ и $\overline{b}_n$ равномерно по n удовлетворяют условию (3.7) *на $\partial\Omega_n$ и, кроме того, $\varphi_n(x,t) \geq \nu r(x)^{a-1} \operatorname{dist}(x,\partial\Omega_n)$.*

Доказательство. Во-первых, как было указано в параграфе 1, область Ω_n получается из Ω следующей деформацией области Ω_0. Пусть $h(x_1)$ — строго монотонно возрастающая ($h'(x_1) \geq \nu > 0$) достаточно гладкая при $x_1 > r_{n+1} = r_n/4$ функция, определенная на $[r_{n+1}, r_n]$, такая, что $h(x_1) \equiv e(x_1)$ при $x_1 \in [\theta_3 r_n, r_n]$ (где $\theta_3 \in (0,1)$, θ_3 достаточно близко к единице), $h(r_{n+1}) = 0$ и $h'(x_1)$ имеет в точке $x_1 = r_{n+1}$ бесконечность достаточно высокого порядка. Кроме того, мы предполагаем функцию h построенной таким образом, что при $\theta_2 r_n \leq x_1 \leq r_n$ (где $1/4 < \theta_2 < \theta_3$) выполнено $\nu \leq e(x_1)/h(x_1) \leq C$. Как отмечалось в параграфе 2, область $\omega_n \equiv \cup_{x_1 \in [r_{n+1}, r_n]}(x_1, h(x_1)d)$ представляет собой гладкую область с гладкой границей $\sigma_n \equiv \partial\omega_n \cap \{x_1 < r_n\} = \cup_{x_1 \in [r_{n+1}, r_n)}(x_1, h(x_1)\partial d)$, которая также может быть представлена в виде $x_1 = g(x')$, $x' \in d_n \equiv e(r_n)d$, с некоторой гладкой функцией $g(x')$.

Построим сначала функцию $\varphi_n(x,t)$. Пусть $\eta_1(x_1)$ — гладкая срезающая функция, такая, что $\eta_1 \equiv 0$ при $r_{n+1} \leq \theta_1 r_n$ и $\eta_1 \equiv 1$ при $x_1 \geq \theta_2 r_n$, где $1/4 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$. Положим $\varphi^{(1)} = \varphi(x,t)\eta_1(x_1)$, так что $\varphi^{(1)} = 0$ при $x_1 \in [r_{n+1}, \theta_1 r_n]$. При $x = (x_1, x') \in \omega_n$ положим, далее, (деформация функции φ) $\varphi^{(2)} = \varphi^{(1)}(x_1, x'e(x_1)/h(x_1), t)$ — функция, определенная в $\omega_{n,T} = \omega_n \times [0,T]$, такая, что $\varphi^{(2)} = 0$ при $x_1 \leq \theta_1 r_n$, причем $\varphi^{(2)} > 0$ в $\omega_{n,T}$ при $x_1 > \theta_1 r_n$, $\varphi^{(2)} = 0$ на σ_n.

Далее, пусть θ_4 таково, что $\theta_2 < \theta_4 < \theta_3$, и пусть $\zeta_1(x_1)$, такая гладкая срезающая функция, что $\zeta_1 \equiv 1$ при $x_1 \leq \theta_4 r_n$, $\zeta_1 \equiv 0$ при $x_1 \geq \theta_3 r_n$. Положим в области $\omega_{n,T}$ $\psi(x) \equiv r_n^{a-1}(x_1 - g(x'))\zeta_1(x_1)$, причем $\psi > 0$ в $\omega_{n,T} \cap \{x_1 < \theta_3 r_n\}$ и $\psi = 0$ на σ_n. Положим, наконец, $\varphi_n = \varphi^{(2)} + \psi$.

Функция φ_n обладает всеми нужными свойствами. Во-первых, $\varphi_n \equiv \varphi$ при $x_1 \geq \theta_3 r_n$ и функция φ_n обладает, в силу своего построения, всеми необходимыми свойствами гладкости, как легко проверить. Кроме того, $\varphi_n > 0$ внутри $\omega_{n,T}$ (и внутри $\Omega_{n,T}$) и $\varphi_n = 0$ на $\partial\Omega_n \times [0,T]$. Далее, легко проверить, что, в силу того, что $\nu \leq e/h \leq C$ при $\theta_2 r_n \leq x_1 \leq r_n$, и того, что $\varphi \geq \nu r(x)^{a-1}\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, при $\theta_2 r_n \leq x_1 \leq r_n$ выполнено

$$\varphi^{(2)} \geq \nu r^{a-1}\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq \nu r^{a-1}\operatorname{dist}(x, \partial\Omega_n),$$

а, тем самым, тем более $\varphi_n = \varphi^{(2)} + \psi \geq \nu r^{a-1}\operatorname{dist}(x, \partial\Omega_n)$. Если же $r_{n+1} \leq x_1 \leq \theta_2 r_n$, то

$$\varphi_n \geq \psi \geq r_n^{a-1}(x_1 - g(x')) \geq \nu r^{a-1}\operatorname{dist}(x, \partial\Omega_n).$$

Таким образом, в $\overline{\Omega_{n,T}}$ выполнено $\varphi_n \geq \nu r^{a-1}\operatorname{dist}(x, \partial\Omega_n)$. Отсюда, в частности, следует, так как градиент φ_n направлен по внутренней нормали к $\partial\Omega_n$, что $(\nabla\varphi_n, \overrightarrow{n}) = |\nabla\varphi_n| \geq \nu r^{a-1}$ на $\partial\Omega_n$, то есть выполнено условие (4.7) для $\nabla\varphi_n$.

Свойства же гладкости функции φ_n легко следуют из ее построения, причем

$$\|\varphi_n\|^{(\alpha)}_{-a,a,\Omega_{n,T}} + \|\nabla\varphi_n\|^{(\alpha)}_{-(a-1),a,\Omega_{n,T}} \leq C(\varphi, \partial\Omega),$$

и, таким образом, требуемая функция φ_n построена.

Обратимся теперь к построению вектора $\overline{b}_n$. Этот вектор строится по аналогичной схеме, с учетом того, что его свойства гладкости ограничиваются только весовой гельдеровостью.

Пусть θ_3 — величина из предыдущих рассуждений и пусть ρ_1 и ρ_2 таковы, что $\theta_3 < \rho_1 < \rho_2 < 1$ (напомним, что при $\theta_3 r_n \leq x_1 \leq r_n$ поверхность σ_n совпадает с $\partial\Omega$). Пусть, далее, $\eta_2(x_1)$ — гладкая срезающая функция, такая, что $\eta_2 \equiv 1$ при $x_1 \geq \rho_2 r_n$ и $\eta_2 \equiv 0$ при $x_1 \leq \rho_1 r_n$. Положим $\overline{b}^{(1)} = \overline{b}(x,t)\eta_2(x_1)$.

Построим, далее, вектор $\overline{\xi}(x)$ в ω_n, положив $\overline{\xi}(x) = \overrightarrow{n} r_n^{a-1}$ на σ_n ($\overrightarrow{n}$ — нормаль к σ_n, направленная внутрь ω_n) и продолжив его гладким образом внутрь ω_n. Мы не останавливаемся подробно на этом продолжении, так как оно сводится к продолжению координат n_i вектора $\overrightarrow{n}$ в область ω_n и способ такого продолжения с сохранением класса хорошо известен — мы не требуем внутри ω_n от вектора $\overline{\xi}$ никаких свойств, кроме непрерывности по Гельдеру. Пусть еще $\zeta_2(x_1)$ — гладкая срезающая функция, такая, что $\zeta_2 \equiv 1$ при $x_1 \leq \rho_2 r_n$ и $\zeta_2 \equiv 0$ при $x_1 \geq \theta_3 r_n$.

Положим, наконец,

$$\overline{b}_n(x,t) = \overline{b}(x,t)\eta_2(x_1) + \overline{\xi}(x)\zeta_2(x_1).$$

Нетрудно проверить исходя непосредственно из определений, что $\overline{b}_n(x,t) \equiv \overline{b}(x,t)$ при $x_1 \geq r_n$ и $\overline{b}_n(x,t)$ обладает всеми требуемыми в лемме свойствами. Лемма 3.1 доказана. □

Возвращаясь к доказательству теоремы 3.1, рассмотрим последовательность задач с нулевыми начальными данными для неизвестных функций $u_n(x,t)$ в $\Omega_{n,T}$:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} - \varphi_n \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{N} b_{n,i} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} + c u_n = f, \quad (x,t) \in \Omega_{n,T}. \quad (3.9)$$

В силу результатов [34, 35], задача (3.9) имеет единственное решение u_n в весовых классах гладких функций в $\overline{\Omega_{n,T}}$, и нашей задачей будет получить для u_n оценку вида (3.8) по $\overline{D_{n-1,T}}$.

Получение такой оценки также аналогично доказательству теоремы 1.1. Одним из небольших отличий является то, что в качестве "стандартных" цилиндров $\widetilde{q}_\lambda(x_0,t_0)$ мы берем цилиндры с другим масштабом по t вида ($r=|x_0|$)

$$\widetilde{q}_\lambda(x_0,t_0)=\{|x-x_0|\le\lambda r\}\times\{|t-t_0|\le\lambda r^{-(a-2)}\},\qquad(3.10)$$

считая при этом все данные задачи (3.1) продолженными в область $t>0$ с сохранением норм и свойств (способ такого продолжения через плоскость $t=T$ описан, например, в [30, 32]). Области же $q_\lambda(x_0,t_0)$ определяются полностью аналогично доказательству теоремы 1.1 в зависимости от расположения $\widetilde{q}_\lambda(x_0,t_0)$. Остальные рассуждения также аналогичны. Например, если мы имеем приграничную область $q_\lambda(x_0,t_0)$, то совершим замену ($\overline{x_0}\in\partial\Omega$)

$$x=\overline{x_0}+ry,\quad t=t_0+r^{-(a-2)}\tau.$$

Такая замена переводит область $q_\lambda(x_0,t_0)=\widetilde{q}_\lambda(\overline{x_0},t_0)\cap\Omega_{n,T}$ в область $Q_{4\lambda}$ стандартных размеров порядка 4λ, причем соответствующий кусок границы $\partial\Omega$ переходит в некоторую поверхность $\Gamma(x_0,t_0)$ (являющийся частью $\partial Q_{4\lambda}$) с ограниченной $H^{2+\alpha}$-нормой. Уравнение (3.9) при этом принимает вид

$$\frac{\partial u_n}{\partial\tau}-d(y)\sum_{i,j=1}^{N}\widetilde{a}_{ij}\frac{\partial^2u_n}{\partial y_i\partial y_j}-\sum_{i=1}^{N}\widetilde{b}_{n,i}\frac{\partial u_n}{\partial y_i}+\widetilde{c}u_n=fr^{-(a-2)},\qquad(3.11)$$

где $d(y)=\operatorname{dist}(y,\Gamma(x_0,t_0))$ — расстояние от точки y до поверхности $\Gamma(x_0,t_0)$,

$$\widetilde{a}_{ij}=a_{ij}\frac{\varphi}{r^ad(y)},\quad\widetilde{b}_{n,i}=b_{n,i}/r^{a-1},\quad\widetilde{c}=c/r^{a-2}.$$

Из свойств коэффициентов уравнения (3.9) следует, что коэффициенты уравнения (3.11) имеют все нужные свойства для применения результатов [34, 35]. Обозначая через $Q_{2\lambda}$ часть $Q_{4\lambda}$, где $|y|<2\lambda$, $|\tau|<2\lambda$, из результатов указанных работ выводим, что справедлива оценка

$$\begin{aligned}&|u_n|^{(0)}_{Q_{2\lambda}}+|Du_n|^{(0)}_{Q_{2\lambda}}+|d(y)D^2u_n|^{(0)}_{Q_{2\lambda}}+\langle d(y)Du_n\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,Q_{2\lambda}}\\&\quad+\langle Du_n\rangle^{(\alpha)}_{y,s_y,Q_{2\lambda}}+\langle Du_n\rangle^{(\alpha/2)}_{\tau,Q_{2\lambda}}+\langle d(y)D^2u_n\rangle^{(\alpha)}_{y,s_y,Q_{2\lambda}}\\&\quad+\langle d(y)D^2u_n\rangle^{(\alpha/2)}_{\tau,Q_{2\lambda}}+|u_{n\tau}|^{(0)}_{Q_{2\lambda}}+\langle u_{n\tau}\rangle^{(\alpha)}_{y,s_y,Q_{2\lambda}}+\langle u_{n\tau}\rangle^{(\alpha/2)}_{\tau,Q_{2\lambda}}\\&\le C(r^{-(a-2)}|f|^{(0)}_{Q_{4\lambda}}+r^{-(a-2)}\langle f\rangle^{(\alpha)}_{y,s_y,Q_{4\lambda}}\\&\quad+r^{-(a-2)}\langle f\rangle^{(\alpha/2)}_{\tau,Q_{4\lambda}}+|u_n|^{(0)}_{Q_{4\lambda}}).\end{aligned}\qquad(3.12)$$

Заметим теперь, что при выполняемой нами замене переменных расстояние (3.3) преобразуется по формуле

$$s(x,\overline{x}) = r^{1/2}s(y,\overline{y}). \tag{3.13}$$

Умножая обе части оценки (3.12) на $r^{\gamma+(a-2)}$ и совершая в этой оценке обратную замену $(y,\tau)\to(x,t)$, получаем, что

$$\|u_n\|^{(2+\alpha)}_{\gamma,a,q_{\lambda/2}(x_0,t_0)} \le C\big(\|f\|^{(\alpha)}_{\gamma,a,q_\lambda(x_0,t_0)} + |r^{\gamma+(a-2)}u_n|^{(0)}_{q_\lambda(x_0,t_0)}\big). \tag{3.14}$$

Цилиндры $q_\lambda(x_0,t_0)$, не примыкающие к границе $\partial\Omega$, рассматриваются совершенно аналогично. При этом, ввиду свойств коэффициентов уравнения (3.9), мы получаем внутри таких $q_\lambda(x_0,t_0)$ обычное (не вырождающееся) параболическое уравнение и необходимо учесть, что для таких цилиндров при выполняемой нами замене переменных расстояние $s(x,\overline{x})$ переходит в расстояние, эквивалентное просто $r^{1/2}|y-\overline{y}|$

$$\begin{aligned} s(x,\overline{x}) = {} & \frac{|x-\overline{x}|}{\sqrt{d(x)}+\sqrt{d(\overline{x})}+\sqrt{|x-\overline{x}|}} \\ & \sim \frac{r|y-\overline{y}|}{Cr^{1/2}+Cr^{1/2}+r^{1/2}\sqrt{|y-\overline{y}|}} \sim Cr^{1/2}|y-\overline{y}|, \end{aligned}$$

так как $0\le|y-\overline{y}|\le 2$, $d(x)\sim r^{1/2}$, $d(\overline{x})\sim r^{1/2}$ для таких цилиндров, и константы Гельдера, определенные по расстоянию $s(x,\overline{x})$, в переменных y становятся обычными константами Гельдера с соответствующим весом, зависящим от r (и, соответственно, обратно). Ввиду этого мы легко получаем оценки (3.14) для таких цилиндров, действуя так же, как и выше.

Собирая оценки (3.14) по всем $(x_0,t_0)\in D_{n-1,T}$, мы получаем, что

$$\|u_n\|^{(2+\alpha)}_{\gamma,a,D_{n-1,T}} \le C\big(\|f\|^{(\alpha)}_{\gamma,a,\Omega_T} + |r^{\gamma+(a-2)}u_n|^{(0)}_{\Omega_{n,T}}\big). \tag{3.15}$$

Отметим, что до сих пор мы не использовали ограничение $a\ge 2$. Оно необходимо нам для оценки $|r^{\gamma+(a-2)}u_n|^{(0)}_{\Omega_{n,T}}$, причем его смысл тот же, что и в предыдущем параграфе в случае уравнения, вырождающегося в точке. При этом на самом деле мы получим из принципа максимума более сильную оценку, чем оценка величины $|r^{\gamma+(a-2)}u_n|^{(0)}_{\Omega_{n,T}}$, а именно мы оценим величину $|r^\gamma u_n|^{(0)}_{\Omega_{n,T}}$ (такая оценка является более сильной именно для $a-2\ge 0$).

Перейдем в задаче (3.9) сначала к полярным координатам, а затем к координатам (ω_0,ω) в точности так же, как это было сделано при доказательстве теоремы 1.1, обозначая получающуюся из Ω_n область через $\widetilde{\Omega_n}$. При этом уравнение (3.9) приобретет вид

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} - e^{-\omega_0(a-2)}\widetilde{\varphi}\sum_{i,j=0}^{N-1}\widetilde{a_{ij}}\frac{\partial^2 u_n}{\partial\omega_i\partial\omega_j} - e^{-\omega_0(a-2)}\sum_{i=0}^{N-1}\widetilde{b_i}\frac{\partial u_n}{\partial\omega_i} + e^{-\omega_0(a-2)}\widetilde{c}u_n = f, \quad (3.16)$$

причем область изменения (ω_0, ω) такова, что $\omega_0 \geq -C$, а коэффициенты этого уравнения $\widetilde{a_{ij}}, \widetilde{b_i}, \widetilde{c}$ и функция $\widetilde{\varphi}$ ограничены, причем $\widetilde{\varphi} = 0$ на $\partial\widetilde{\Omega_n}$, а $\widetilde{a_{ij}}$ удовлетворяют условию эллиптичности. Обозначая, как и выше, $u_n r^\gamma = u_n e^{-\omega_0\gamma} = v$, то есть $v = u_n e^{\omega_0\gamma}$, для функции v из (3.16) получаем уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} - e^{-\omega_0(a-2)}\widetilde{\varphi}\sum_{i,j=0}^{N-1}\widetilde{a_{ij}}\frac{\partial^2 v}{\partial\omega_i\partial\omega_j} - e^{-\omega_0(a-2)}\sum_{i=0}^{N-1}\widetilde{\widetilde{b_i}}\frac{\partial v}{\partial\omega_i} + e^{-\omega_0(a-2)}\widetilde{\widetilde{c}}v = fe^{-\omega_0\gamma} = \widetilde{f}, \quad (3.17)$$

с нулевым начальным условием и некоторым вектором $\widetilde{\widetilde{b}} = \{\widetilde{\widetilde{b_i}}\}$, удовлетворяющим, как нетрудно проверить, на границе области $\widetilde{\Omega_n}$ условию вида (3.7) (необходимо учесть, что все слагаемые в $\widetilde{\widetilde{b}}$, приходящие в $\widetilde{\widetilde{b}}$ при замене переменных и неизвестной функции из старшей эллиптической части уравнения, равны нулю на $\partial\widetilde{\Omega_n}$, так как φ_n равна нулю на $\partial\Omega_n$). Отметим также, что $|\widetilde{f}|^{(0)}_{\widetilde{\Omega_n}\times[0,T]} = |r^\gamma f|^{(0)}_{\Omega_n,T} \leq \|f\|^{(\alpha)}_{\gamma,a,\Omega_T}$. Учитывая то, что $a - 2 \geq 0$ и делая стандартную для параболических уравнений замену неизвестной функции $v = e^{\lambda t}w$ с выбором λ достаточно большим, мы можем добиться того, чтобы в уравнении (3.17) было выполнено $\widetilde{\widetilde{c}} \geq c_0 > 0$. Поэтому можно считать, не ограничивая общности, что это условие выполнено для уравнения (3.17). При этом условии оценка для $|v|$ следует стандартным образом из принципа максимума для уравнения (3.17). При этом в нашей ситуации вырождающегося уравнения, если положительный максимум (например) достигается на границе $\partial\widetilde{\Omega_n}$, то в этой точке, во первых, старшее эллиптическое слагаемое уравнения стремится к нулю, $e^{-\omega_0(a-2)}\widetilde{\varphi}\sum_{i,j=0}^{N-1}\widetilde{a_{ij}}\frac{\partial^2 v}{\partial\omega_i\partial\omega_j} \to 0$ (см. [34, 35]), причем $v_t \geq 0$ в этой точке и $e^{-\omega_0(a-2)}\sum_{i=0}^{N-1}\widetilde{\widetilde{b_i}}\frac{\partial v}{\partial\omega_i} \leq 0$ в силу условия (3.7) на вектор $\widetilde{\widetilde{b}}$ на $\partial\widetilde{\Omega_n}$. Поэтому в такой граничной точке положительного максимума, аналогично внутренним точкам, $\widetilde{\widetilde{c}}v \leq \widetilde{f}$, и, следовательно, $v \leq \widetilde{f}/c_0$. Аналогичные рассуждения для отрицательного минимума функции

v приводят стандартным образом к оценке $|v| \leq C|\widetilde{f}|^{(0)}_{\widetilde{\Omega}_n\times[0,T]}$, то есть к оценке

$$|r^\gamma u_n|^{(0)}_{\Omega_{n,T}} \leq C\|f\|^{(\alpha)}_{\gamma,a,\Omega_T}. \tag{3.18}$$

Ввиду оценок (3.15), (3.18) доказательство разрешимости в теореме 3.1 и оценка (3.8) получаются абсолютно точно так же, как и в теореме 1.1. Единственность решения следует из принципа максимума также аналогично теореме 1.1. Теорема 3.1 доказана. □

Благодарности. В заключение автор выражает глубокую благодарность Б. В. Базалию, привлекшему его внимание к данной проблематике и имевшему с ним полезные обсуждения. Автор также искренне благодарен рецензенту за его труд и несколько очень ценных замечаний.

Литература

[1] В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками* // Труды московского мат. общества, **16** (1967), 209–292.

[2] V. Maz'ya, S. Nazarov, B. Plamenevskii, *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. I.*, Basel: Birkhauser, 2000, xxiii, 435 pp.

[3] V. Maz'ya, S. Nazarov, B. Plamenevskii, *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. II.*, Basel: Birkhauser, 2000 xxiii, 323 p.

[4] V. G. Maz'ya, R. Mahnke, *Asymptotics of the solution of a boundary integral equation under a small perturbation of a corner* // Z. Anal. Anwend., **11** (1992), N 2, 173–182.

[5] В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда-Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе* // Math. Nachr., **81** (1978), 25–82.

[6] В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *Оценки функций Грина и шаудеровские оценки решений эллиптических краевых задач в двугранном угле* // Сиб. мат. журнал, (1978), N 5, 1065–1082.

[7] В. Зайончковский, В. А. Солонников, *О задаче Неймана для эллиптических уравнений второго порядка в областях с ребрами на границе* // Записки научн. семинаров ЛОМИ, **127** (1983), N 1, 7–48.

[8] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский. *Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей*, М.: "Наука", 1991, 335 с.

[9] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya and J. Rossman, *Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities*, AMS, Math. Surveys and Monographs, v. 52, 1997, 414 p.

[10] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya and J. Rossman, *Spectral problems associated with corner singularities of solutions to elliptic equations*, AMS, Math. Surveys and Monographs, v. 85, 2001.

[11] В. А. Солонников, Е. В. Фролова, *Исследование задачи для уравнения Лапласа с краевым условием специального вида в плоском угле* // Записки научн. семинаров ЛОМИ, **182** (1990), 149–167.

[12] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Boston: Pitman, 1985.

[13] M. Bochniak and M. Borsuk, *Dirichlet problem for linear elliptic equations degenerating at a conical boundary point*, Analysis. Munchen, Germany, **23** (2003), N 3, 225–248.

[14] M. Borsuk, V. Kondratiev, *Elliptic Boundary Value Problems of Second Order in Piecewise Smooth Domains* // North-Holland Mathematical Library, **69** (2006), ELSEVIER, 531 p.

[15] M. Borsuk, *Degenerate elliptic boundary-value problems of second order in nonsmooth domains* // Journal of Mathematical Sciences, **146** (2007), N 5, 6071–6212.

[16] В. А. Солонников, *О разрешимости классических начально-краевых задач для уравнения теплопроводности в двугранном угле* // Записки научн. семинаров ЛОМИ, **138** (1984), 146–180.

[17] В. А. Козлов, В. Г. Мазья, *Об особенностях решения первой краевой задачи для уравнения теплопрвводности в областях с коническими точками, I* // Известия ВУЗов, Математика, (1987), N 2, 38–46.

[18] В. А. Козлов, В. Г. Мазья, *Об особенностях решения первой краевой задачи для уравнения теплопрвводности в областях с коническими точками, II* // Известия ВУЗов, Математика, (1987), N 3, 37–44.

[19] В. А. Солонников, Е. В. Фролова, *О задаче с третьим краевым условием для уравнения Лапласа в плоском угле и ее применении к параболическим задачам* // Алгебра и анализ, (1990), N 11, 7–12.

[20] M. G. Garroni, V. A. Solonnikov, M. A. Vivaldi, *On the oblique derivative problem in an infinite angle* // Topol. Methods Nonlinear Anal., **7** (1996), 299–325.

[21] V. A. Solonnikov, E. V. Frolova, *On a certain nonstationary problem in a dihedral angle II* // J. Soviet Math., **70** (1994), 1841–6.

[22] M. G. Garroni, V. A. Solonnikov, M. A. Vivaldi, *Existence and regularity results for oblique derivative problem for heat equations in an angle* // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **128A** (1998), 47–79.

[23] В. Н. Арефьев, Л. А. Багиров, *О решениях уравнения теплопроводности в областях с особенностями* // Мат. заметки, **64** (1998), N 2, 163–179.

[24] Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев, *Об одной граничной задаче для сильно вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка в угловой области,* // Укр. мат. журнал, **59** (2007), N 7, 867–883.

[25] D. Gubelidze, *On a generalized solution of the second order degenerate elliptic equation in an angular domain* // Proc. A. Razmadze Math. Inst., **133** (2003), 37–61.

[26] A. Venni, *Maximal regularity for a singular parabolic problem* // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, **52** (1994), N 1, 87–101.

[27] S. Shmarev, *Differentiability and Analyticity of Solutions and Interfaces in Multidimensional Reaction-Diffusion Equation* // Universidad de Oviedo, Departamento de Matematicas, Prepublicacion N 1, Junio 2001, 1–51.

[28] S. I. Shmarev, *Interfaces in multidimensional diffusion equations with absorption terms* // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., **53** (2003), N 6(A), 791–828.

[29] I. D. Pukal's'kyi, *Cauchy problem for nonuniformly parabolic equations with degeneracy* // Ukr. Math. Journal, **55** (2003), N 11, 1828–1840.

[30] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М.: "Наука", 1967.

[31] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, М.: "Наука", 1989, 463 с.

[32] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, М.: "Наука", 1973, 576 с.

[33] О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, *Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой*, Итоги науки и техники. Мат. анализ, 1969, М.: ВИНИТИ, 1971, 252 с.

[34] P. Daskalapoulos, R. Hamilton, *Regularity of the free boundary for the porous medium equation* // J. Amer. Math. Soc., **11** (1998), N 4, 899–965.

[35] Б. В. Базалий, Н. В. Краснощек, *Регулярность решения многомерной задачи со свободной границей для уравнения пористой среды* // Мат. труды, **5** (2002), N 2, 38–91.

Сведения об авторах

Сергей Петрович Дегтярев

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
ул. Розы Люксембург, 74
83114, Донецк
Украина
E-Mail: spdegt@yahoo.com