 І. Д. Пукальський

НЕЛОКАЛЬНА ПАРАБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА З ВНУТРІШНІМ І ФІНАЛЬНИМ КЕРУВАННЯМ

Встановлено необхідні та достатні умови вибору оптимального керування системи, що описується нелокальною параболічною крайовою задачею з обмеженим внутрішнім і фінальним керуванням. Критерій якості задано сумою об'ємного і поверхневого інтегралів.

Ключові слова: крайова задача, функція Гріна, нелокальна умова, оптимальне керування, функціонал якості
MSC (2000): 93C20, 93C30, 35K40, 35K60

В сучасних прикладних і теоретичних дослідженнях дуже часто зустрічаються задачі, пов'язані з відшуканням оптимальних значень певних величин. Зокрема, задачам мінімізації функціоналів на траєкторіях систем рівнянь з частинними похідними присвячено праці [1, 2, 5 – 9].

Необхідність оптимального керування процесами, що описуються рівняннями параболічного типу, виникає при розв'язанні багатьох задач. Зокрема, при дослідженні процесів нагрівання і охолодження масивних елементів конструкцій, поширення полів температури або концентрації. Вивчення таких задач проводилося в [3, 4, 11].

У цій статті розглядається задача вибору оптимального керування системами, що описуються параболічною крайовою задачею з нелокальною умовою за часовою змінною і обмеженими внутрішнім і фінальним керуваннями. Функціонал якості визначається сумою об'ємного і поверхневого інтегралів.

1. Постановка задачі та основні обмеження.

Нехай T, T_1 – задані додатні числа, $0 < T \le T_1$, D – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D. В області $Q = (0, T_1) \times D$ розглянемо задачу знаходження функцій (u, u_{2b}, ω_{2b}), на яких функціонал

$$I(u_{2b}, \omega_{2b}) = \int\limits_0^T dt \int\limits_D \mathcal{F}_1(t, x; \overrightarrow{u})dx + \int\limits_D \mathcal{F}_2(x; \overrightarrow{\omega})dx \tag{1}$$

досягає мінімуму в класі функцій $V = \{u_{2b}(t,x) \in C^{\alpha}(Q), p_1(t,x) \le u_{2b} \le p_2(t,x); \omega_{2b}(x) \in C(D), q_1(x) \le \omega_{2b}(x) \le q_2(x)\}$, із яких $u(t, x; u_{2b}, \omega_{2b})$ є розв'язком нелокальної параболічної крайової задачі

$$(Lu)(t,x) \equiv \left(\partial_t - \sum_{|k| \le 2b} A_k(t,x)\partial_x^k\right) u = f(t, x, u_{2b}), \tag{2}$$

$$u(0,x;u_{2b}(0,x),\omega_{2b}(0,x))+Ru(T,x;u_{2b}(T,x),\omega_{2b}(x))=\varphi(x,\omega_{2b}), \tag{3}$$

$$(B_iu)(t,x)|_\Gamma \equiv \sum_{|k|\le r_i} b_k^{(i)}(t,x)\partial_x^k u\Big|_\Gamma = g_i(t,x), \tag{4}$$

де

$$0\le r_i\le 2b-1,\ i\in\{1,\dots,b\},$$

$$\overrightarrow{u}=(u,\partial_x u,\dots,\partial_x^{2b-1}u,u_{2b})\equiv(u_0,u_1,\dots,u_{2b-1},u_{2b}),$$

$$\overrightarrow{\omega}=(u_0|_{t=T},\dots,u_{2b-1}|_{t=T},\omega_{2b})\equiv(\omega_0,\dots,\omega_{2b}),$$

$$Ru\equiv\sum_{|k|\le 2b-1} d_k(T,x)\partial_x^k u(T,x;u_{2b}(T,x),\omega_{2b}(x)),\ \Gamma=[0,T)\times\partial D.$$

Нехай для задачі (1) – (4) виконуються умови:
1) крайова задача

$$(Lv)(t,x)=f_0(t,x),\quad v(0,x)=0,\quad (B_iv)(t,x)|_\Gamma=g_i(t,x) \tag{5}$$

є параболічною [10] і $A_k(t,x)\in C^\alpha(Q)$, $b_k^{(i)}\in C^{2b-r_i+\alpha}(\Gamma)$, $\partial D\in C^{2b+\alpha}$, $p_1\in C^\alpha(Q)$, $p_2\in C^\alpha(Q)$, $f(t,x,u_{2b}(t,x))$ як функція (t,x) належить простору $C^\alpha(Q)$ і має гельдерову похідну другого порядку за u_{2b}, неперервну як функцію (t,x);

2) функція $\varphi(x,\omega_{2b})$ як функція x належить простору $C(D)$ і має гельдерову похідну другого порядку за ω_{2b}, неперервну як функцію змінної x, $q_1(x)\in C(D)$, $q_2(x)\in C(D)$, $g_i(t,x)\in C^{2b-r_i+\alpha}(\Gamma)$, $g_i(0,x)=0$, $d_k(T,x)\in C(D)$;

3) функції $\mathcal{F}_1(t,x;\overrightarrow{u})$ та $\mathcal{F}_2(x,\overrightarrow{\omega})$ визначені відповідно в областях $M_1=\overline{Q}\times R^{2b}\times[p_1,p_2]$, $M_2=\overline{D}\times R^{2b}\times[q_1,q_2]$ мають гельдерові похідні другого порядку за u_j, ω_j, $j=\{0,1,\dots,2b\}$, як функції змінних (t,x) і x належать відповідно до просторів $C(Q)$, $C(D)$.

2. Коректна розв'язність нелокальної параболічної крайової задачі..

Для встановлення розв'язності задачі (1) – (4) потрібно встановити коректну розв'язність параболічної крайової задачі з нелокальною диференціальною умовою за часовою змінною.

Розглянемо в області Q задачу знаходження розв'язку рівняння

$$(Lv)(t,x)=f_0(t,x), \tag{6}$$

який задовольняє нелокальну умову

$$v(0,x)+Rv(T,x)=\varphi_0(x), \tag{7}$$

а на бічній поверхні крайову умову

$$(B_i v)(t,x)|_\Gamma = g_i(t,x), \tag{8}$$

Нехай $G(t,x,\tau,\xi)$ – функції Гріна однорідної крайової задачі

$$(Lu)(t,x) = f_0(t,x), \quad u(0,x) = \varphi(x), \quad (B_i u)(t,x)|_\Gamma = 0 \tag{9}$$

побудованої в [11]. Позначимо

$$r(x) = \int\limits_D |RG(T,x,0,\xi)|d\xi.$$

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів операторів L, B_i, функцій $g_i(t,x)$ і поверхні ∂D виконані умови 1), 2). Функції $f_0(t,x) \in C^\alpha(Q)$, $\varphi_0(x) \in C(D)$, $r(x) \le K < 1$. Тоді існує розв'язок задачі (6) – (8) і для нього правильна оцінка*

$$\left| t^{j+\frac{|k|}{2b}} \partial_t^j \partial_x^k u \right| \le c(\|f_0\|_{C^\alpha(Q)} + \|\varphi_0\|_{C(D)} + \sum_{i=1}^{b} \|g_i\|_{C^{2b-r_i+\alpha}(\Gamma)}), \tag{10}$$

($|k| + 2bj \le 2b$).

Доведення. Розв'язок задачі (6) – (8) шукаємо у вигляді

$$v(t,x) = \int\limits_D G(t,x,0,\xi)v(0,\xi)d\xi + \omega(t,x), \tag{11}$$

де $\omega(t,x)$ – розв'язок задачі (5). За теоремою 2.3 [11, стор. 61] для $\omega(t,x)$ виконується оцінка

$$\|\omega\|_{C^{2b+\alpha}(Q)} \le c(\|f_0\|_{C^\alpha(Q)} + \sum_{i=1}^{b} \|g_i\|_{C^{2b-r_i+\alpha}(\Gamma)}) \equiv cB(f_0, \overrightarrow{g}). \tag{12}$$

Задовольнивши нелокальну умову (7), маємо

$$v(0,x) + \int\limits_D RG(T,x,0,\xi)v(0,\xi)d\xi = \varphi_0(x) - R\omega(T,x) \equiv F(x). \tag{13}$$

Розв'язок інтегрального рівняння (13) шукаємо методом послідовних наближень. Враховуючи обмеження на функцію $r(x)$, зазначені у теоремі 1, визначаємо розв'язок рівняння (13) у вигляді

$$v(0,x) = F(x) + \int\limits_D \Phi(x,y)F(y)dy, \tag{14}$$

де $\Phi(x,y)$ – резольвента, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$\Phi(x,y) = RG(T,x,0,\xi) + \int\limits_D RG(T,x,0,\xi)\Phi(\xi,y)d\xi,$$

з якого отримуємо оцінки

$$\left|\int\limits_D \Phi(x,y)dy\right| \le \frac{K}{1-K}, |\Phi(x,y)| \le C(T)\exp\left\{-c\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-y_i}{T^{1/2b}}\right)^{\frac{2b}{2b-1}}\right\}. \qquad (15)$$

Отже, з урахуванням (15), для розв'язку інтегрального рівняння (13) одержуємо оцінку

$$|v(0,x)| \le c|F|_{C(Q)}. \qquad (16)$$

Підставляючи (14) у (11) і враховуючи нерівність (16) і оцінки функції Гріна $G(t,x,\tau,\xi)$

$$|\partial_x^k G(t,x,\tau,\xi)| \le c(t-\tau)^{-\frac{n+|k|}{2b}}\exp\left\{-c\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\xi_i}{(t-\tau)^{1/(2b)}}\right)^{\frac{2b}{2b-1}}\right\}, \qquad (17)$$

будемо мати $v(T,x) \in C^{2b+\alpha}(Q\cap(t=T))$ і

$$|\partial_x^k v(T,x)| \le c(T)(\|\varphi_0\|_{C(D)} + B(f_0,\overrightarrow{g})), \quad |k| \le 2b. \qquad (18)$$

Для доведення нерівностей (10) задачу (6) – (8) запишемо у вигляі

$$(Lv)(t,x) = f_0(t,x), \quad (B_iv)(t,x)|_\Gamma = g_i(t,x),$$

$$v(0,x) = \varphi_0(x) - Rv(T,x).$$

Використовуючи оцінки функції Гріна (17) і зображення

$$v(t,x) = \int\limits_D G(t,x,0,\xi)[\varphi_0(\xi) - Rv(T,\xi)]d\xi + \omega(t,x),$$

отримаємо оцінки (10).

Встановимо зображення розв'язку однорідної нелокальної крайової задачі (6) – (8) при $g_i(t,x) \equiv 0$. Правильна така теорема.

Теорема 2. *Якщо виконані умови теореми 1, $g_i(t,x) = 0$, $i \in \{1,2,\dots,b\}$, то існує функція Гріна (G,E,E_1) однорідної задачі (6) – (8) і розв'язок цієї задачі визначаєтьса формулою*

$$v(t,x) = \int\limits_0^t d\tau\int\limits_D G(t,x,\tau,\xi)f_0(\tau,\xi)d\xi + \int\limits_D E(t,x,0,\xi)\varphi_0(\xi)d\xi -$$

$$-\int\limits_0^T d\tau\int\limits_D E_1(T,t,x,\tau,\xi)f_0(\tau,\xi)d\xi. \qquad (19)$$

Доведення. Підставляючи у формулу (13) замість $F(x)$ значення

$$F(x)=\varphi_0(x)-\int\limits_0^T d\tau\int\limits_D RG(T,x,\tau,\xi)f_0(\tau,\xi)d\xi$$

і змінюючи порядок інтегрування, отримуємо

$$v(0,x)=\varphi_0(x)+\int\limits_D \Phi(x,y)\varphi_0(y)dy-\int\limits_0^T d\tau\int\limits_D\Big[RG(T,x,\tau,\xi)+$$

$$+\int\limits_D \Phi(\xi,y)RG(T,y,\tau,\xi)dy\Big]f_0(\tau,\xi)d\xi.$$

Підставляючи значення $v(0,x)$ у поверхневий інтеграл рівності (11) і змінивши порядок інтегрування, одержимо зображення (19), де

$$E(t,x,0,\xi)=G(t,x,0,\xi)+\int\limits_D G(t,x,0,y)\Phi(y,\xi)dy, \qquad (20)$$

$$E_1(T,t,x,\tau,\xi)=\int\limits_D G(t,x,0,y)\Big[RG(T,y,\tau,\xi)+\int\limits_D \Phi(y,z)RG(T,z,\tau,\xi)dz\Big]dy.$$

3. Задача оптимального керування.

Позначимо через

$$\lambda(\tau,\xi)=\sum_{|k|=0}^{2b-1}\Big\{\int\limits_\tau^T dt\int\limits_D \partial_{u_k}\mathcal{F}_1(t,x;\overrightarrow{u})\partial_x^k G(t,x,\tau,\xi)dx-$$

$$-\int\limits_0^T dt\int\limits_D \partial_{u_k}\mathcal{F}_1(t,x;\overrightarrow{u})\partial_x^k E_1(T,t,x,\tau,\xi)dx+$$

$$+\int\limits_D \partial_{\omega_k}\mathcal{F}_2(x;\overrightarrow{\omega})(\partial_x^k G(T,x,\tau,\xi)-\partial_x^k E_1(T,T,x,\tau,\xi))dx\Big\},$$

$$\mu(\xi) = \sum_{|k|=0}^{2b-1} \left\{ \int_0^T dt \int_D \partial_{u_k} \mathcal{F}_1(t,x;\overrightarrow{u}) \partial_x^k E(T,x,0,\xi) dx + \right.$$

$$\left. + \int_D \partial_{\omega_k} \mathcal{F}_2(x;\overrightarrow{\omega}) \partial_x^k E(T,x,0,\xi) dx \right\},$$

$$H_1(\overrightarrow{u},\lambda) = \mathcal{F}_1(t,x;\overrightarrow{u}) + \lambda(t,x) f(t,x,u_{2b}),$$

$$H_2(\overrightarrow{\omega},\mu) = \mathcal{F}_2(x;\overrightarrow{\omega}) + \mu(x)\varphi(x,\omega_{2b}).$$

Сформулюємо умови оптимальності (u_{2b},ω_{2b}).

Теорема 3. *Якщо функції $H_1(\overrightarrow{u},\lambda)$, $H_2(\overrightarrow{\omega},\mu)$ відповідно за аргументами u_{2b} і ω_{2b} є монотонно зростаючими, то оптимальне керування $u_{2b}^{(0)} = p_1(t,x)$, $\omega_{2b}^{(0)} = q_1(x)$, а оптимальним розв'язком задачі (2) – (4) є $u(t,x;p_1,q_1)$.*

Якщо функції $H_1(\overrightarrow{u},\lambda)$, $H_2(\overrightarrow{\omega},\mu)$ відповідно за аргументами u_{2b} і ω_{2b} є монотонно спадними, то оптимальне керування $u_{2b}^{(0)} = p_2(t,x)$, $\omega_{2b}^{(0)} = q_2(x)$, а оптимальним розв'язком задачі (2) – (4) є $u(t,x;p_2,q_2)$.

Якщо функція $H_1(\overrightarrow{u},\lambda)$ за аргументом u_{2b} є монотонно спадною, а $H_2(\overrightarrow{\omega},\mu)$ за аргументом ω_{2b} є монотонно зростаючою, то оптимальним є керування (p_2,q_1), а оптимальним розв'язком задачі (2) – (4) є $u(t,x;p_2,q_1)$.

Якщо функція $H_2(\overrightarrow{\omega},\mu)$ за аргументом ω_{2b} є монотонно спадною, а $H_1(\overrightarrow{u},\lambda)$ за аргументом u_{2b} є монотонно зростаючою, то оптимальним є керування (p_1,q_2), а оптимальним розв'язком задачі (2) – (4) є $u(t,x;p_1,q_2)$.

Доведення. Нехай Δu_{2b} – деякий допустимий приріст керування $u_{2b}(t,x)$, в $\Delta\omega_{2b}$ – деякий допустимий приріст керування $\omega_{2b}(x)$. Позначимо через $\Delta_u u_0$ відповідний приріст розв'язку $u_0(t,x;u_{2b},\omega_{2b})$ за керуванням $u_{2b}(t,x)$, а $\Delta_\omega u_0$ – відповідний приріст розв'язку $u_0(t,x;u_{2b},\omega_{2b})$ за керуванням $\omega_{2b}(x)$.

Приріст $\Delta_u u_0$ є розв'язком крайової задачі

$$(L\Delta_u u)(t,x) = f(t,x,u_{2b}+\Delta u_{2b}) - f(t,x,u_{2b}) \equiv \Delta f(t,x),$$

$$\Delta_u u(0,x;u_{2b}(0,x),\omega_{2b}(x)) + R\Delta_u u(T,x;u_{2b}(T,x),\omega_{2b}(x)) = 0, \tag{21}$$

$$(B_i\Delta_u u)(t,x)|_\Gamma = 0.$$

Використовуючи формулу (19) маємо зображення розв'язку задачі (21):

$$\Delta_u u_0 = \int_0^t d\tau \int_D G(t,x,\tau,\xi)\Delta f(\tau,\xi) d\xi -$$

$$- \int_0^T d\tau \int_D E_1(T,t,x,\tau,\xi)\Delta f(\tau,\xi) d\xi. \tag{22}$$

Враховуючи оцінки (15), (17) і формули (20), продиференціюємо рівність (22) за змінною x до порядку $2b-1$. Маємо

$$\Delta_u u_k = \int_0^t d\tau \int_D \partial_x^k G(t,x,\tau,\xi)\Delta f(\tau,\xi)d\xi -$$

$$-\int_0^T d\tau \int_D \partial_x^k E_1(T,t,x,\tau,\xi)\Delta f(\tau,\xi)d\xi \tag{23}$$

$(|k| \leq 2b-1)$.

Приріст $\Delta_\omega u_0$ є розв'язком крайової задачі

$$(L\Delta_\omega u)(t,x) = 0, \quad (B_i \Delta_\omega u)(t,x)|_\Gamma = 0,$$

$$\Delta_\omega u(0,x;u_{2b}(0,x),\omega_{2b}(x)) + R\Delta_\omega u(T,x;u_{2b}(T,x),\omega_{2b}(x)) =$$
$$= \varphi(x,\omega_{2b}+\Delta\omega_{2b}) - \varphi(x,\omega_{2b}) \equiv \Delta\varphi(x). \tag{24}$$

Використовуючи формулу (19) маємо зображення розв'язку задачі (24):

$$\Delta_\omega u_0 = \int_D E(t,x,0,\xi)\Delta\varphi(\xi)d\xi. \tag{25}$$

Враховуючи оцінки (15), (17) і формули (20), продиференціюємо рівність (25) за змінною x до порядку $2b-1$. Маємо

$$\Delta_\omega u_k = \int_D \partial_x^k E(t,x,0,\xi)\Delta\varphi(\xi)d\xi \tag{26}$$

$(|k| \leq 2b-1)$.

Для знаходження приросту $\Delta I(u_{2b},\omega_{2b})$ скористаємося формулою Тейлора для функцій $\mathcal{F}_1(t,x;\overrightarrow{u})$, $\mathcal{F}_2(x;\overrightarrow{\omega})$ за аргументами u_j, ω_j. Враховуючи, що

$$\Delta_\omega u_k|_{t=T} = \Delta_\omega \omega_k \quad (|k| \leq 2b-1),$$

маємо

$$\Delta I(u_{2b},\omega_{2b}) = \sum_{|k|=0}^{2b-1} \left\{ \int_0^T dt \int_D \partial_{u_k}\mathcal{F}_1(t,x;\overrightarrow{u})(\Delta_u u_k + \Delta_\omega u_k)\right\} dx +$$

$$+\int_0^T dt \int_D \{\partial_{u_{2b}}\mathcal{F}_1(t,x;\overrightarrow{u})\Delta u_{2b} + O(|\Delta\overrightarrow{u}|^2)\} dx +$$

$$+\sum_{|k|=0}^{2b-1}\left\{\int\limits_D \partial_{\omega_k}\mathcal{F}_2(x;\overrightarrow{\omega})(\Delta_u\omega_k+\Delta_\omega\omega_k)\right\}dx+$$

$$+\int\limits_D\{\partial_{\omega_{2b}}\mathcal{F}_2(x;\overrightarrow{\omega})\Delta\omega_{2b}+O(|\Delta\overrightarrow{\omega}|^2)\}dx,$$

де $|\Delta\overrightarrow{u}|^2=\sum\limits_{|k|=0}^{2b}(\Delta_u u_k)^2$, $|\Delta\overrightarrow{\omega}|^2=\sum\limits_{|k|=0}^{2b}(\Delta_\omega\omega_k)^2$.

Підставимо $\Delta_u u_k$, $\Delta_\omega u_k$, $\Delta_u\omega_k$, $\Delta_\omega\omega_k$ із формул (22), (23), (25), (26) у лінійну частину приросту функціоналу (27) і поміняємо порядок інтегрування. Отримаємо зображення $\Delta I(u_{2b},\omega_{2b})$ за допомогою функцій $H_1(\overrightarrow{u},\lambda)$, $H_2(\overrightarrow{\omega},\mu)$:

$$\Delta I(u_{2b},\omega_{2b})=\int\limits_0^T dt\int\limits_D\{\partial_{u_{2b}}H_1(\overrightarrow{u},\lambda)\Delta u_{2b}+O(|\Delta\overrightarrow{u}|^2)\}dx+$$

$$+\int\limits_D\{\partial_{\omega_{2b}}H_2(\overrightarrow{\omega},\mu)\Delta\omega_{2b}+O(|\Delta\overrightarrow{\omega}|^2)\}dx. \tag{28}$$

Якщо функції $H_1(\overrightarrow{u},\lambda)$, $H_2(\overrightarrow{\omega},\mu)$ задовольняють умови теореми 3 і оптимальним керуванням є $(u_{2b}^{(0)},\omega_{2b}^{0(})$, то підставивши у формулу (28) $u_{2b}=u_{2b}^{(0)}$, $\omega_{2b}=\omega_{2b}^{(0)}$ при досить малих Δu_{2b} і $\Delta\omega_{2b}$ дістанемо $\Delta I>0$.

Нехай $(u_{2b}^{(0)},\omega_{2b}^{(0)})$ – оптимальне керування, тобто $\Delta I>0$. Перевіримо виконання умов теореми 3. Якщо $H_1(\overrightarrow{u},\lambda)$ і $H_2(\overrightarrow{\omega},\mu)$ не є монотонними за аргументами u_{2b}, ω_{2b} відповідно, то $\partial_{u_{2b}}H_1(\overrightarrow{u},\lambda)$ і $\partial_{\omega_{2b}}H_2(\overrightarrow{\omega},\mu)$ – знакозмінні величини. Нехай $\partial_{u_{2b}}H_1(\overrightarrow{u},\lambda)>0$ в $Q^+\subset Q$ і $\partial_{u_{2b}}H_1(\overrightarrow{u},\lambda)<0$ в $Q^-=Q\setminus Q^+$, а $\partial_{\omega_{2b}}H_2(\overrightarrow{\omega},\mu)>0$ в $D^+\subset D$ і $\partial_{\omega_{2b}}H_2(\overrightarrow{\omega},\mu)<0$ в $D^-=D\backslash D^+$. Використовуючи теорему про середнє значення, маємо

$$\Delta I=\partial_{u_{2b}}H_1^+(\overrightarrow{u},\lambda)\iint\limits_{Q^+}\Delta u_{2b}dxdt-|\partial_{u_{2b}}H_1^-(\overrightarrow{u},\lambda)|\iint\limits_{Q\backslash Q^+}\Delta u_{2b}dxdt+$$

$$+\partial_{\omega_{2b}}H_2^+(\overrightarrow{\omega},\mu)\int\limits_{D^+}\Delta\omega_{2b}dx-|\partial_{\omega_{2b}}H_2^-(\overrightarrow{\omega},\mu)|\int\limits_{D\backslash D^+}\Delta\omega_{2b}dx+$$

$$+\iint\limits_Q O(|\Delta\overrightarrow{u}|^2)dxdt+\int\limits_D O(|\Delta\overrightarrow{\omega}|^2)dx.$$

При досить малих Δu_{2b}, $\Delta\omega_{2b}$ знак ΔI визначається першими двома парами доданків. Різниця перших двох доданків змінює знак ΔI в залежності від величини значень $\mathrm{mes}Q^+$, $\mathrm{mes}Q^-$, Δu_{2b}. Різниця наступних двох доданків змінює знак ΔI в залежності від величини значень $\mathrm{mes}D^+$, $\mathrm{mes}D^-$, $\Delta\omega_{2b}$. Отже, функціонал не досягає мінімуму.

Теорема 4. *Нехай функції $H_1(\overrightarrow{u},\lambda)$, $H_2(\overrightarrow{\omega},\mu)$ немонотонні за аргументами u_{2b} і ω_{2b} відповідно. Для того, щоб керування $(u_{2b}^{(0)},\omega_{2b}^{(0)})$ і відповідний розв'язок крайової задачі (2) – (4) $u(t,x;u_{2b}^{(0)},\omega_{2b}^{(0)})$ були оптимальними, необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови:*

а) функція $H_1(\overrightarrow{u},\lambda)$ за аргументом u_{2b} має в точці $u_{2b}^{(0)}$ мінімальне значення;

б) функція $H_2(\overrightarrow{\omega},\mu)$ за аргументом ω_{2b} має в точці $\omega_{2b}^{(0)}$ мінімальне значення;

в) для довільного вектора $e=(e_0,\dots,e_{2b})\neq 0$ і $(t,x)\in\overline{Q}$ виконується нерівність

$$\mathcal{K}_1(t,x;e)=\sum_{i=0}^{2b-1}\sum_{j=0}^{2b}\partial^2_{u_iu_j}\mathcal{F}_1(t,x,\overrightarrow{u}^{(0)})e_ie_j-\lambda(t,x)\partial^2_{u_{2b}}f(t,x,u_{2b}^{(0)})e_{2b}^2\geq 0;$$

г) для довільного вектора $\nu=(\nu_0,\dots,\nu_{2b})\neq 0$ і $x\in\overline{D}$ виконується нерівність

$$\mathcal{K}_2(x;\nu)=\sum_{i=0}^{2b-1}\sum_{j=0}^{2b}\partial^2_{u_iu_j}\mathcal{F}_2(x;\overrightarrow{\omega}^{(0)})\nu_i\nu_j-\mu(x)\partial^2_{\omega_{2b}}\varphi(x,\omega_{2b}^{(0)})\nu_{2b}^2\geq 0.$$

Доведення. Достатність. Нехай керування $(u_{2b}^{(0)},\omega_{2b}^{(0)})$ задовольняє умови а) – г). Покажемо його оптимальність. Використовуючи формули (27), (28) і умову гельдеровості других похідних функцій $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, f, φ за змінними u_i, ω_i, знаходимо приріст функціоналу $I(u_{2b},\omega_{2b})$:

$$\Delta I=\int_0^T dt\int_D\Big\{\partial_{u_{2b}}H_1(\overrightarrow{u}^{(0)},\lambda)\Delta u_{2b}+\frac{1}{2}\partial^2_{u_{2b}}H_1(\overrightarrow{u}^{(0)},\lambda)(\Delta u_{2b})^2+\frac{1}{2}\mathcal{K}_1(t,x;\Delta u)+$$

$$+O(|\Delta\overrightarrow{u}|^{2+\alpha})\}dx+\int_D\Big\{\partial_{\omega_{2b}}H_2(\overrightarrow{\omega}^{(0)},\mu)\Delta\omega_{2b}+\frac{1}{2}\partial^2_{\omega_{2b}}H_2(\overrightarrow{\omega}^{(0)},\mu)(\Delta\omega_{2b})^2+$$

$$+\frac{1}{2}\mathcal{K}_2(x;\Delta\omega)+O(|\Delta\overrightarrow{\omega}|^{2+\alpha})\}dx. \tag{29}$$

Оцінимо приріст $\Delta I(u_{2b}^{(0)},\omega_{2b}^{(0)})$ знизу. За умовами а), б) теореми 4

$$\partial_{u_{2b}}H_1(\overrightarrow{u},\lambda)=0,\;\;\partial_{\omega_{2b}}H_2(\overrightarrow{\omega},\mu)=0 \text{ і } \partial^2_{u_{2b}}H_1(\overrightarrow{u},\lambda)>0,\;\;\partial^2_{\omega_{2b}}H_2(\overrightarrow{\omega},\mu)>0.$$

Тому, враховуючи умови в), г), правильні нерівності

$$N_1(t,x;e) \equiv \partial^2_{u_{2b}} H_1(\overrightarrow{u}^{(0)},\lambda)e^2_{2b} + \mathcal{K}_1(t,x;e) = \sum_{i,j=0}^{2b} \partial^2_{u_i u_j}\mathcal{F}_1(t,x;\overrightarrow{u}^{(0)})e_i e_j > 0,$$

$$N_2(x;\nu) \equiv \partial^2_{\omega_{2b}} H_2(\overrightarrow{\omega}^{(0)},\mu)\nu^2_{2b} + \mathcal{K}_2(x;\nu) = \sum_{i,j=0}^{2b} \partial^2_{\omega_i\omega_j}\mathcal{F}_2(x;\overrightarrow{\omega}^{(0)})\nu_i\nu_j > 0. \quad (30)$$

Отже, для квадратичних форм $N_1(t,x;e)$ і $N_2(x;\nu)$ існують додатні функції $\delta_1(t,x) = \inf\limits_{|z|=1} N_1(t,x;z) > 0$ і $\delta_2(x) = \inf\limits_{|z|=1} N_2(x;z) > 0$, внаслідок чого

$$\Delta I(u^{(0)}_{2b},\omega^{(0)}_{2b}) \geq \frac{1}{2}\int\limits_0^T dt \int\limits_D [\delta_1(t,x) - O(|\Delta\overrightarrow{u}|^\alpha)]|\Delta\overrightarrow{u}|^2 dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_D [\delta_2(x) - O(|\Delta\overrightarrow{\omega}|^\alpha)]|\Delta\overrightarrow{\omega}|^2 dx > 0$$

при досить малих Δu_{2b} і $\Delta\omega_{2b}$.

Необхідність. Нехай $(u^{(0)}_{2b},\omega^{(0)}_{2b})$ – оптимальне керування, тобто $\Delta I > 0$. Перевіримо виконання умов а) – г) теореми 4. Якщо $\partial_{u_{2b}}H_1(\overrightarrow{u},\lambda) \neq 0$, $\partial_{\omega_{2b}}H_2(\overrightarrow{\omega},\mu) \neq 0$, то вибираючи досить малі різні за знаком в області $\overline{Q}$ прирости Δu_{2b} і різні за знаком в області $\overline{D}$ прирости $\Delta\omega_{2b}$, із формули

$$\Delta I(u^{(0)}_{2b},\omega^{(0)}_{2b}) = \int\limits_0^T dt \int\limits_D [\partial_{u_{2b}}H_1(\overrightarrow{u}^{(0)},\lambda)\Delta u_{2b} + O(|\Delta\overrightarrow{u}|^2)]dx +$$

$$+\int\limits_D [\partial_{\omega_{2b}}H_2(\overrightarrow{\omega}^{(0)},\mu)\Delta\omega_{2b} + O(|\Delta\overrightarrow{\omega}|^2)]dx$$

одержимо, що ΔI змінює знак в залежності від знаків величин Δu_{2b}, $\Delta\omega_{2b}$. Це суперечить умові $\Delta I > 0$. Визначимо знак функцій $\partial_{u_{2b}}H_1(\overrightarrow{u},\lambda)$ і $\partial_{\omega_{2b}}H_2(\overrightarrow{\omega},\mu)$ в околі значень $u^{(0)}_{2b}$ і $\omega^{(0)}_{2b}$ відповідно. Запишемо приріст ΔI у вигляді

$$\Delta I(u^{(0)}_{2b},\omega^{(0)}_{2b}) = \int\limits_0^T dt \int\limits_D \partial_{u_{2b}}H_1(u_0,\ldots,u_{2b-1},u_{2b}+\varepsilon_1\Delta u_{2b},\lambda)\Delta u_{2b}dx +$$

$$+\int\limits_D \partial_{\omega_{2b}}H_2(\omega_0,\ldots,\omega_{2b-1},\omega_{2b}+\varepsilon_2\Delta\omega_{2b},\mu)\Delta\omega_{2b}dx,$$

де $\varepsilon_1 \in (0,1)$, $\varepsilon_2 \in (0,1)$.

При досить малих Δu_{2b} і $\Delta\omega_{2b}$ із умови $\Delta I > 0$ випливає, що

$$\partial u_{2b} H_1(u_0, \dots, u_{2b-1}, u_{2b} + \varepsilon_1 \Delta u_{2b}, \lambda)\Delta u_{2b} > 0$$

і

$$\partial \omega_{2b} H_2(\omega_0, \dots, \omega_{2b-1}, \omega_{2b} + \varepsilon_2 \Delta \omega_{2b}, \mu)\Delta \omega_{2b} > 0.$$

Тобто $\partial u_{2b} H_1 < 0$ при $u_{2b} < u_{2b}^{(0)}$ і $\partial u_{2b} H_1 > 0$ при $u_{2b} > u_{2b}^{(0)}$, а також $\partial\omega_{2b} H_2 < 0$ при $\omega_{2b} < \omega_{2b}^{(0)}$ і $\partial\omega_{2b} H_2 > 0$ при $\omega_{2b} > \omega_{2b}^{(0)}$. Тому при значенні $u_{2b} = u_{2b}^{(0)}$ функція $H_1(\overrightarrow{u}, \lambda)$ досягає мінімуму і функція $H_2(\overrightarrow{\omega}, \mu)$ досягає мінімуму при значенні $\omega_{2b} = \omega_{2b}^{(0)}$.

Якщо $N_1(t, x; \Delta u) < 0$ і $N_2(x; \Delta\omega) < 0$, то з формули (29) одержуємо $\Delta I \le 0$, що неможливо.

Нехай $N_1(t, x; \Delta u) > 0$ в області $Q_1 \subset \overline{Q}$ і $N_1(t, x; \Delta u) < 0$ в $Q_2 = \overline{Q} \setminus Q_1$, а $N_2(x; \Delta\omega) > 0$ в області $D_1 \subset \overline{D}$ і $N_2(x; \Delta\omega) < 0$ в $D_2 = D \setminus D_1$. Використовуючи теорему про середнє для приросту ΔI маємо

$$\Delta I = \frac{1}{2} N_1^+(t, x; \Delta u)\mathrm{mes} Q_1 - \frac{1}{2}|N_1^-(t, x; \Delta u)|\mathrm{mes} Q_2 + \frac{1}{2} N_2^+(x; \Delta\omega)\mathrm{mes} D_1 -$$

$$-\frac{1}{2}|N_2^-(x; \Delta\omega)|\mathrm{mes} D_2 + \int_0^T dt \int_D O(|\Delta\overrightarrow{u}|^{2+\alpha})dx + \int_D O(|\Delta\overrightarrow{\omega}|^{2+\alpha})dx.$$

При досить малих Δu_{2b} і $\Delta\omega_{2b}$ знак $\Delta I(u_{2b}^{(0)}, \omega_{2b}^{(0)})$ визначається першими двома парами доданків. Різниця цих пар змінює знак залежно від величини значень $\mathrm{mes} Q_1$, $\mathrm{mes} Q_2$, $\mathrm{mes} D_1$, $\mathrm{mes} D_2$. Отже, при знакозмінних величинах $\mathcal{K}_1(t, x; \Delta u)$, $\mathcal{K}_2(x; \Delta\omega)$ функціонал $I(u_{2b}, \omega_{2b})$ не досягає мінімуму.

Існування $(u_0^{(0)}, u_{2b}^{(0)}, \omega_{2b}^{(0)})$ встановлюється наступним чином. Нехай $(u_{2b}^{(0)}, \omega_{2b}^{(0)})$ – оптимальні, тобто $\partial_{u_{2b}} H_1(\overrightarrow{u}^{(0)}, \lambda) = 0$, $\partial_{\omega_{2b}} H_2(\overrightarrow{\omega}^{(0)}, \mu) = 0$ і $\partial^2_{u_{2b}} H_1(\overrightarrow{u}^{(0)}, \lambda) > 0$, $\partial^2_{\omega_{2b}} H_2(\overrightarrow{\omega}^{(0)}, \mu) > 0$. Застосовуючи теореми про неявну функцію до рівнянь $\partial_{u_{2b}} H_1(\overrightarrow{u}^{(0)}, \lambda) = 0$, $\partial_{\omega_{2b}} H_2(\overrightarrow{\omega}^{(0)}, \mu) = 0$, одержуємо

$$u_{2b}^{(0)} = \Phi_1(u_0^{(0)}, \dots, u_{2b-1}^{(0)}, \lambda).$$

$$\omega_{2b}^{(0)} = \Phi_2(\omega_0^{(0)}, \dots, \omega_{2b-1}^{(0)}, \mu). \tag{31}$$

Використовуючи функцію Гріна (G, E, E_1), формули (19), (23), (31), поставимо у відповідність задачі (1) – (4) систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$u_k^{(0)} = \int_0^T dt \int_D \partial_x^k G(t, x, \tau, \xi)[f(\tau, \xi, \Phi_1(u_0^{(0)}, \dots, u_{2b-1}^{(0)}, \lambda)) - f(\tau, \xi, 0)]d\xi +$$

$$+\int\limits_D \partial_x^k E(t,x,0,\xi)\varphi(\xi,\Phi_2(\omega_1^{(0)},\ldots,\omega_{2b-1}^{(0)},\mu))d\xi + \partial_x^k W(t,x) - \int\limits_D \partial_x^k E(t,x,0,\xi)\times$$

$$\times RW(T,\xi)d\xi + \int\limits_0^T d\tau \int\limits_D \partial_x^k E_1(T,t,x,\tau,\xi)[f(\tau,\xi,\Phi_1(u_0^{(0)},\ldots,u_{2b-1}^{(0)},\lambda))-$$

$$-f(\tau,\xi,0)]d\xi, \quad \omega_k^{(0)} = u_k^{(0)}|_{t=T}, \quad (|k| \le 2b-1),$$

$$\lambda(\tau,\xi) = \sum_{|k|=0}^{2b-1} \left\{ \int\limits_\tau^T dt \int\limits_D \partial_{u_k}\mathcal{F}_1(t,x;\overrightarrow{u}^{(0)})\partial_x^k G(t,x,\tau,\xi)dx - \right.$$

$$-\int\limits_0^T dt \int\limits_D \partial_{u_k}\mathcal{F}_1(t,x\overrightarrow{u}^{(0)})\partial_x^k E_1(T,t,x,\tau,\xi)dx - \int\limits_D \partial_{\omega_k}\mathcal{F}_2(x;\overrightarrow{\omega}^{(0)})\times$$

$$\left. \times[\partial_x^k G(T,x,\tau,\xi)dx - \partial_x^k E_1(T,t,x,\tau,\xi)]dx \right\}, \qquad (32)$$

$$\mu(\xi) = \sum_{|k|=0}^{2b-1} \left\{ \int\limits_0^T dt \int\limits_D \partial_{u_k}\mathcal{F}_1(t,x;\overrightarrow{u}^{(0)})\partial_x^k E(t,x,0,\xi)dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_D \partial_{\omega_k}\mathcal{F}_2(x;\overrightarrow{\omega}^{(0)})\partial_x^k E(T,x,0,\xi)dx \right\},$$

де $W(t,x)$ – розв'язок крайової задачі

$$(LW)(t,x) = f(t,x,0), \quad W(0,x) = 0, \quad (B_i W)(t,x)|_\Gamma = g_i(t,x).$$

Розв'язок системи (32) знаходимо методом послідовних наближень.

Зауваження. Використовуючи методику доведення теорем 3, 4 можна встановити умови існування розв'язку задачі (1) – (4) у випадку монотонності однієї із функцій H_1, H_2 за аргументом u_{2b} і ω_{2b} відповідно і немонотонності іншої.

1. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 383 с.
2. *Лурье К.А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. – М.: Наука, 1975. – 478 с.
3. *Вигак В.М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 312 с.
4. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 614 с.
5. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени T управления упругими граничными силами на двух концах струны // Докл. РАН. – 2007. – Т. 417, № 4. – С. 456 – 463.

6. *Rösch A., Tröltzsch F.* Existence of regular Lagrange multipliers for a nonlinear elliptic optimal control problem win pointwise control-state constraints // SIAM J. Contr. and Optimiz. – 2006. – 45, № 2. – P. 548 – 564.
7. *Wang Gengsheng, Wang Lijuan, Yang Donghui.* Shape optimization of an elliptic equation in an exterior domain // SIAM J. Contr. and Optimiz. – 2006. – 45, № 2. – P. 532 – 547.
8. *Majewski M.* On the existence of optimal solution to an optimal control problem // J. Optimiz. Theory and Appl. – 2006. – 126, № 3. – P. 635 – 651.
9. *Yanlei Kou, Shijin Ding.* Solutions of Ginzburg-Landau equations with weight and minimizers of the renormlized energy // Appl. Math J. Chin Univ. B. – 2007. – 22, № 1. – P. 48 – 60.
10. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudodifferential equations of parabolic type. – Basel-Boston-Berlin: Birkhausep. – 2004. – 390 p. (Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 152).
11. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Отримано 8.02.11