©2010. **М.А. Кулиев, А.М. Эл-Хадиди**

МНОГОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В работе с помощью обобщенного принципа сжатых отображений доказана теорема существования и единственности классического решения многомерной обратной краевой задачи для систем гиперболических уравнений в ограниченной области.

Ключевые слова: гиперболическая система, обратная задача, классическое решение.
MSC (2000): 35L20; 35L55

В работе исследуется классическое решение многомерной обратной краевой задачи для систем гиперболических уравнений в ограниченной области. Предполагается, что неизвестные коэффициенты и правая часть уравнения зависят от аргумента t. А именно рассматривается задача:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - Au(x,t) = a_1(t)b(x,t)u(x,t) + c_1(t)d(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + f_1(t)F(x,t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - Av(x,t) = a_2(t)\tilde{b}(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c_2(t)\tilde{d}(x,t)v(x,t) + f_2(t)G(x,t), \quad (2)$$

$$(x,t) \in \bar{D}_T = \bar{\Omega} \times [0,T],$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (3)$$

$$v(x,0) = \tilde{\varphi}(x), \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \tilde{\psi}(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (4)$$

$$u(x,t)|_{\Gamma_T} = 0, \quad v(x,t)|_{\Gamma_T} = 0, \qquad \Gamma_T = S \times [0,T], \quad (5)$$

$$u(x^i,t) = h_i(t) \quad (i=1,2,3), \quad t \in [0,T], \quad (6)$$

$$v(x^i,t) = g_i(t) \quad (i=1,2,3), \quad t \in [0,T], \quad (7)$$

где $0 < T < +\infty$; Ω – произвольная ограниченная n-мерная область, $n \le 2$; S – граница области Ω; Γ_T – боковая поверхность цилиндра $\bar{D}_T$; x^i $(i=1,2,3)$ – различные фиксированные точки в Ω, а оператор A имеет вид:

$$Au(x,t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\right) - K(x)u(x,t), \quad (8)$$

причем всюду на $\bar{\Omega}$ функции $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $K(x) \ge 0$ – измеримы, ограничены в Ω и $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, $\mu = \text{const} > 0$, ξ_i $(i = \overline{1,n})$ – любые действительные числа.

Функции $b(x,t)$, $\tilde{b}(x,t)$, $d(x,t)$, $\tilde{d}(x,t)$, $F(x,t)$, $G(x,t)$, $\varphi(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$, $\psi(x)$, $\tilde{\psi}(x)$, $h_i(t)$ и $q_i(t)$ $(i=\overline{1,3})$ – заданные, а $u(x,t)$, $v(x,t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$, $c_1(t)$, $c_2(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ – искомые.

Определение. Функции $\{u(x,t),\, v(x,t),\, a_1(t),\, a_2(t), c_1(t), c_2(t),\, f_1(t),\, f_2(t)\}$ назовем классическим решением задачи (1)–(7), если выполняются следующие условия:

1. Функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемы в $\bar{D}_T$.
2. Функции $a_1(t)$, $a_2(t)$, $c_1(t)$, $c_2(t)$, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ непрерывны на $[0,T]$.
3. Условия (1)–(7) выполняются в обычном классическом смысле.

С целью исследования задачи (1)–(7) рассмотрим следующие пространства. Обозначим через $B_{2,T}^{k,k-1}$ совокупность всех функций $u(x,t)$ вида $u(x,t) = \sum\limits_{s=1}^{\infty} u_s(t)\mu_s(x)$, где $u_s(t)$ $(s=1,2,...)$ непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$ и такие, что

$$\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^k \max_{0\le t\le T}|u_s(t)|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^{k-1} \max_{0\le t\le T}|u_s'(t)|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \equiv R_T(u) < +\infty.$$

Здесь $k\ge 1$, $0 > -\lambda_1^2 \ge -\lambda_2^2 \ge ...$ и $\mu_s(x)$ $(s=1,2,...)$ – собственные значения и соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ обобщенные собственные функции первой однородной краевой задачи для оператора A в Ω. Нормы в этом множестве определим так: $\|u\| = R_T(u)$. Известно [3], что все эти пространства банаховы.

Предположим, что функции $a_{ij}(x)$ $(i,j=\overline{1,n})$, $K(x)$, $b(x,t)$, $\tilde{b}(x,t)$, $d(x,t)$, $\tilde{d}(x,t)$,
$F(x,t)$, $G(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$, $h_i(t)$ и $q_i(t)$ $(i=\overline{1,3})$ удовлетворяют следующим условиям:

1. Функция $a_{ij}(x)$ $(i,j=\overline{1,n})$ $\left[\frac{n}{2}\right]+2$ раза, а функция $K(x)\ge 0$ $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ раз непрерывно дифференцируемы на $\bar{\Omega}$.
2. Область Ω является нормальной [2] и $S \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}$.
3. Собственные функции $\mu_k(x)$ оператора A при граничном условии $\mu_k(x)|_S = 0$ $(k=1,2,...)$ $\left[\frac{n}{2}\right]+3$ раза непрерывно дифференцируемы на $\bar{\Omega}$.
4. Функция $\varphi(x) \in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(\Omega)$, $\varphi(x)|_S = A\,\varphi(x)|_S = ... = A^{\left[\frac{n}{4}\right]+1}\,\varphi(x)|_S = 0$, $\tilde{\varphi}(x) \in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(\Omega)$, $\tilde{\varphi}(x)|_S = A\,\tilde{\varphi}(x)|_S = ... = A^{\left[\frac{n}{4}\right]+1}\,\tilde{\varphi}(x)|_S = 0$,

$$\psi(x) \in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(\Omega), \qquad \psi(x)|_S = A\,\psi(x)|_S = ... = A^{\left[\frac{n+2}{4}\right]}\,\psi(x)|_S = 0,$$
$$\tilde\psi(x) \in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(\Omega), \qquad \tilde\psi(x)\Big|_S = A\,\tilde\psi(x)\Big|_S = ... = A^{\left[\frac{n+2}{4}\right]}\,\tilde\psi(x)\Big|_S = 0.$$

5. Функции $\dfrac{\partial^i b(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}, \frac{\partial^i \tilde b(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}, \frac{\partial^i d(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}, \frac{\partial^i \tilde d(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}, \left(i=\overline{0,\left[\frac{n}{2}\right]+2}\right)$ принадлежат пространству $C(\bar D_T)$ и $\dfrac{\partial^j b(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}} = 0$, $\frac{\partial^j \tilde b(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}} = 0$, $\dfrac{\partial^j d(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}} = 0$, $\dfrac{\partial^j \tilde d(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}} = 0$, $\left(t\in[0,T]\ \ x\in S; \quad j=\overline{0,2\left[\frac{n+2}{2}\right]}\right)$.

6. Функции $F(x,t),\ G(x,t)$ принадлежат пространству $W_{x,t,2}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2,0}(D_T)\cap C(\overline{D}_T)$ и

$$F(x,t)|_{\Gamma_T} = AF(x,t)|_{\Gamma_T} = ... = A^{\left[\frac{n+2}{4}\right]}F(x,t)\Big|_{\Gamma_T} = 0,$$
$$G(x,t)|_{\Gamma_T} = AG(x,t)|_{\Gamma_T} = ... = A^{\left[\frac{n+2}{4}\right]}G(x,t)\Big|_{\Gamma_T} = 0\,.$$

7. Функции $h_i(t)\neq 0,\ g_i(t)\neq 0\ \ (i=\overline{1,3})$ дважды непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$ и $h_i(0)=\varphi(x^i),\ h_i'(0)=\psi(x^i),\ g_i(0)=\tilde\varphi(x^i),\ \ g_i'(0)=\tilde\psi(x^i)$ $(i=\overline{1,3})$.

8.

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} b(x^1,t)h_1(t) & d(x^1,t)g_1'(t) & F(x^1,t) \\ b(x^2,t)h_2(t) & d(x^2,t)g_2'(t) & F(x^2,t) \\ b(x^3,t)h_3(t) & d(x^3,t)g_3'(t) & F(x^3,t) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall t\in[0,T]\,,$$

$$\tilde\Delta(t) = \begin{vmatrix} \tilde b(x^1,t)h_1'(t) & \tilde d(x^1,t)g_1(t) & G(x^1,t) \\ \tilde b(x^2,t)h_2'(t) & \tilde d(x^2,t)g_2(t) & G(x^2,t) \\ \tilde b(x^3,t)h_3'(t) & \tilde d(x^3,t)g_3(t) & G(x^3,t) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall t\in[0,T]\,.$$

При выполнении условий 1–8, применяя метод Фурье и учитывая условия 6 и 7, решение задачи (1)–(7) сведем к решению следующей системы интегро-дифференци-альных уравнений:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\cos\lambda_k t\mu_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k t\mu_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\int_0^t\int_\Omega\Big[a_1(\tau)b(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+$$
$$+c_1(\tau)d(\xi,\tau)\frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,\tau)+f_1(\tau)F(\xi,\tau)\Big]\sin\lambda_k(t-\tau)\mu_k(\xi)d\xi d\tau\cdot\mu_k(x), \qquad (9)$$

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_k \cos\lambda_k t \mu_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}_k}{\lambda_k} \sin\lambda_k t \mu_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t \int_{\Omega} [a_2(\tau)\tilde{b}(\xi,\tau) \times \frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,\tau) +$$

$$+c_2(\tau)\tilde{d}(\xi,\tau)\, v(\xi,\tau) + f_2(\tau)G(\xi,\tau)\Big] \sin\lambda_k(t-\tau)\mu_k(\xi)d\xi d\tau \cdot \mu_k(x), \qquad (10)$$

$$\begin{cases} a_1(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \sum_{i=1}^{3} A_{i1}\Phi_i(u,v,a_1,c_1,f_1;t), \\ c_1(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \sum_{i=1}^{3} A_{i2}\Phi_i(u,v,a_1,c_1,f_1;t), \\ f_1(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \sum_{i=1}^{3} A_{i3}\Phi_i(u,v,a_1,c_1,f_1;t); \end{cases} \qquad (11)$$

$$\begin{cases} a_2(t) = \frac{1}{\tilde{\Delta}(t)} \sum_{i=1}^{3} \tilde{A}_{i1}\tilde{\Phi}_i(u,v,a_2,c_2,f_2;t), \\ c_2(t) = \frac{1}{\tilde{\Delta}(t)} \sum_{i=1}^{3} \tilde{A}_{i2}\tilde{\Phi}_i(u,v,a_2,c_2,f_2;t), \\ f_2(t) = \frac{1}{\tilde{\Delta}(t)} \sum_{i=1}^{3} \tilde{A}_{i3}\tilde{\Phi}_i(u,v,a_2,c_2,f_2;t), \end{cases} \qquad (12)$$

где $\Phi_i(u,v,a_1,c_1,f_1;t) = h_i''(t) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \varphi_k \cos\lambda_k t \mu_k(x^i) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k \psi_k \sin\lambda_k t \mu_k(x^i) +$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_{\Omega} \lambda_k \Big[a_1(\tau)b(\xi,\tau)u(\xi,\tau) + c_1(\tau)d(\xi,\tau)\frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,\tau) + f_1(\tau)F(\xi,\tau)\Big] \times$$

$$\times \sin\lambda_k(t-\tau)\mu_k(\xi)d\xi d\tau \cdot \mu_k(x^i) \quad (i=\overline{1,3}),$$

$$\tilde{\Phi}_i(u,v,a_2,c_2,f_2;t) = g_i''(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \tilde{\varphi}_k \cos\lambda_k t \mu_k(x^i) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \tilde{\psi}_k \sin\lambda_k t \mu_k(x^i) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_{\Omega} \lambda_k \Big[a_2(\tau)\tilde{b}(\xi,\tau)\frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,\tau) + c_2(\tau)\tilde{d}(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + f_2(\tau)G(\xi,\tau)\Big] \times$$

$$\times \sin\lambda_k(t-\tau)\mu_k(\xi)d\xi d\tau \cdot \mu_k(x^i) \quad (i=\overline{1,3}),$$

$A_{ij}(t)$ – алгебраическое дополнение элемента b_{ij} определителя $\Delta(t)$; $\tilde{A}_{ij}(t)$ – алгебраическое дополнение элемента $\tilde{b}_{ij}$ определителя $\tilde{\Delta}(t)$.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть выполнены условия 1–8. Тогда при достаточно малых значениях T задача (1)–(7) имеет единственное классическое решение.*

Доказательство. Запишем систему (9)–(12) в виде

$$Z = LZ, \qquad (13)$$

где
$$Z = \{u(x,t), v(x,t), a_1(t), a_2(t), c_1(t), c_2(t), f_1(t), f_2(t)\},$$

$$LZ = (L_1(z), L_2(z), L_3(z), L_4(z), L_5(z), L_6(z), L_7(z), L_8(z)),$$

причем компоненты $L_i(z) \quad (i=\overline{1,8})$ оператора LZ равны правым частям уравнений (9)–(12) соответственно. А это означает, что мы должны найти неподвижную точку оператора L в пространстве

$$E_T = \left(B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}\right)^2 \times (C[0,T])^6,$$

причем норму в E_T определим так:

$$\|\,(u,v,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)\,\|_{E_T} = \|u\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}} + \|v\|_{B_{2,T}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3,\left[\frac{n}{2}\right]+2}} + \sum_{i=1}^{6} \|a_i\|_{C[0,T]}\,.$$

Рассмотрим оператор $L(u,v,a_1,a_2,c_1,c_2,f_1,f_2)$ в шаре $K_R\left(\|z\|_{E_T} \le R\right)$ пространства E_T, где

$$\begin{aligned}
&C\left(\|\varphi\|_{W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(\Omega)} + \|\psi\|_{W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(\Omega)} + \|\tilde{\varphi}\|_{W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(\Omega)} + \left\|\tilde{\psi}\right\|_{W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(\Omega)}\right) + \\
&+\left(\min_{0\le t\le T}|\Delta(t)|\right)^{-1} \cdot \sum_{i,j=1}^{3} \|A_{ij}(t)\|_{C[0,T]} \left[\left\|h_i''(t)\right\|_{C[0,T]} + C\left(\|\varphi\|_{W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(\Omega)} + \right.\right.\\
&\left.\left. + \|\psi\|_{W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(\Omega)}\right) \left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_s(x^i)}{\lambda_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right] + \\
&+\left(\min_{0\le t\le T}\left|\tilde{\Delta}(t)\right|\right)^{-1} \cdot \sum_{i,j=1}^{3} \left\|\tilde{A}_{ij}(t)\right\|_{C[0,T]} \left[\left\|g_i''(t)\right\|_{C[0,T]} + \right.\\
&\left. +C\left(\|\tilde{\varphi}\|_{W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(\Omega)} + \left\|\tilde{\psi}\right\|_{W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(\Omega)}\right) \left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_s(x^i)}{\lambda_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right] = M < R, \qquad (14)
\end{aligned}$$

где $C>0$ – некоторая постоянная.

Пользуясь условиями 5–8 теоремы и тем, что в $\Omega \quad \mu_s(x) = -\dfrac{1}{\lambda_s^2} A\mu_s(x)$

для любого $(u,v,a_1,a_2,c_1,c_2,f_1,f_2)\in K_R$, имеем

$$\|L(u,v,a_1,a_2,c_1,c_2,f_1,f_2)\|_{E_T}\le \|W_1(x,t)\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3,[\frac{n}{2}]+2}}+\|W_5(x,t)\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3,[\frac{n}{2}]+2}}+$$
$$+\sum_{i=2}^{4}\|W_i(x,t)\|_{C[0,T]}+\sum_{i=6}^{8}\|W_i(x,t)\|_{C[0,T]}+$$
$$+\sqrt{T}\left[q_1+q_2\sum_{i,j=1}^{3}\left(\|A_{ij}(t)\|_{C[0,T]}+\|\tilde{A}_{ij}(t)\|_{C[0,T]}\right)\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\underset{s}{\mu}(x^i)}{\lambda_s^{[\frac{n}{2}]+1}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right]\cdot$$
$$\cdot\Big[\|Q(u(x,t),v(x,t),a_1(t),c_1(t),f_1(t))\|_{W_{x,t}^{[\frac{n}{2}]+2,\,0}(D_T)}+$$
$$+\|\tilde{Q}(u(x,t),v(x,t),a_2(t),c_2(t),f_2(t))\|_{W_{x,t}^{[\frac{n}{2}]+2,\,0}(D_T)}\Big],\tag{15}$$

где $q_1>0,\ q_2>0$ – некоторые постоянные и

$$W_1(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\cos\lambda_k t\cdot\mu_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k t\cdot\mu_k(x),\tag{16}$$

$$W_{i+1}(x,t)=\frac{1}{\Delta(t)}\sum_{j=1}^{3}A_{ji}(t)\Big[h_i''(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(\lambda_k\varphi_k\cos\lambda_k t+$$
$$+\psi_k\sin\lambda_k t)\mu_k(x^i)\Big]\quad (i=\overline{1,3}),\tag{17}$$

$$W_5(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\varphi}_k\cos\lambda_k t\cdot\mu_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{\psi}_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k t\cdot\mu_k(x),\tag{18}$$

$$W_{i+5}(x,t)=\frac{1}{\tilde{\Delta}(t)}\sum_{j=1}^{3}\tilde{A}_{ji}(t)\Big[g_i''(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(\lambda_k\tilde{\varphi}_k\cos\lambda_k t+$$
$$+\tilde{\psi}_k\sin\lambda_k t)\mu_k(x^i)\Big]\quad (i=\overline{1,3}),\tag{19}$$

$$Q(u(x,t),v(x,t),a_1(t),c_1(t),f_1(t))=a_1(t)b(x,t)u(x,t)+$$
$$+c_1(t)d(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}+f_1(t)F(x,t),\tag{20}$$

$$\tilde{Q}(u(x,t),v(x,t),a_2(t),c_2(t),f_2(t))=a_2(t)\tilde{b}(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+$$
$$+c_2(t)\tilde{d}(x,t)v(x,t)+f_2(t)G(x,t).\tag{21}$$

Пользуясь теоремами вложения С.Л. Соболева и структурой пространства $B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3,[\frac{n}{2}]+2}$, для любых $u,v\in B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3,[\frac{n}{2}]+2}$ и $t\in[0,T]$ имеем

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\partial^i u(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}\right\|_{L_2(\Omega)}\leq q_3\,\|u\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3,[\frac{n}{2}]+2}}\quad\left(i=\overline{0,\left[\tfrac{n}{2}\right]+3}\right),\\
&\left\|\frac{\partial^i v(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}\right\|_{L_2(\Omega)}\leq q_4\,\|v\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3,[\frac{n}{2}]+2}}\quad\left(i=\overline{0,\left[\tfrac{n}{2}\right]+3}\right),
\end{aligned}\tag{22}$$

где $q_3>0, q_4>0$ – некоторые постоянные, не зависящие от u,v,t. Тогда, с учетом оценки (22), из (15) получаем, что $\forall\ u,v,a_1,a_2,\,c_1,c_2,\,f_1,f_2\in K_R$:

$$\begin{aligned}
&\|L(u,v,a_1,a_2,c_1,c_2,f_1,f_2)\|_{E_T}\leq\|W_1(x,t)\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3,[\frac{n}{2}]+2}}+\|W_5(x,t)\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3,[\frac{n}{2}]+2}}+\\
&+\sum_{i=2}^{4}\|W_i(x,t)\|_{C[0,T]}+\sum_{i=6}^{8}\|W_i(x,t)\|_{C[0,T]}+TK_1\cdot M_1\cdot\Bigg(\|a_1\|_{C[0,T]}\cdot\|u\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3,[\frac{n}{2}]+2}}+\\
&+\|c_1\|_{C[0,T]}\cdot\|v\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3,[\frac{n}{2}]+2}}+\|f_1\|_{C[0,T]}+\\
&+\|a_2\|_{C[0,T]}\cdot\|u\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3,[\frac{n}{2}]+2}}+\|c_2\|_{C[0,T]}\cdot\|v\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3,[\frac{n}{2}]+2}}+\|f_2\|_{C[0,T]}\Bigg),
\end{aligned}\tag{23}$$

где $K_1=q_1+q_2\sum\limits_{i,j=1}^{3}\left(\|A_{ij}(t)\|_{C[0,T]}+\|\tilde{A}_{ij}(t)\|_{C[0,T]}\right)\left\{\sum\limits_{s=1}^{\infty}\left(\dfrac{\mu_s(x^i)}{\lambda_2^{[\frac{n}{2}]+1}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$; $M_1>0$ – некоторое число.

Из последнего имеем

$$\|L(u,v,a_1,a_2,c_1,c_2,f_1,f_2)\|_{E_T}\leq M+TK_1M_1 2(2R^2+R).\tag{23_1}$$

Так как $M<R$, то из оценки (23_1) следует, что при достаточно малом $T>0$ выполнено $\|L(u,v,a_1,a_2,c_1,c_2,f_1,f_2)\|_{E_T}\leq R$, то есть оператор L отображает шар K_R в себя.

Покажем, что некоторая итерация оператора L является сжимающим оператором. Рассмотрим два произвольных элемента W и $\tilde{W}$ из шара K_R. Построим их образы с помощью последовательных итераций оператора L.

Тогда имеем

$$W_0=W,\qquad W_1=L(W_0),\,...\,,\qquad W_k=L(W_{k-1}),...\,,$$

и

$$\tilde{W}_0=\tilde{W},\qquad \tilde{W}_1=L(\tilde{W}_0),...\,,\qquad \tilde{W}_k=L(\tilde{W}_{k-1}),...\,,$$

где

$$
\begin{aligned}
&W_k = \{u_k, v_k, a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, f_1^{(k)}, f_2^{(k)}\},\\
&\tilde{W}_k = \{\tilde{u}_k, \tilde{v}_k, \tilde{a}_1^{(k)}, \tilde{a}_2^{(k)}, \tilde{c}_1^{(k)}, \tilde{c}_2^{(k)}, \tilde{f}_1^{(k)}, \tilde{f}_2^{(k)}\},\\
&u_0 = u, v_0 = v, a_1^{(0)} = a_1, a_2^{(0)} = a_2, c_1^{(0)} = c_1, c_2^{(0)} = c_2, f_1^{(0)} = f_1, f_2^{(0)} = f_2,\\
&\tilde{u}_0 = \tilde{u}, \tilde{v}_0 = \tilde{v}, \tilde{a}_1^{(0)} = \tilde{a}_1, \tilde{a}_2^{(0)} = \tilde{a}_2, \tilde{c}_1^{(0)} = \tilde{c}_1, \tilde{c}_2^{(0)} = \tilde{c}_2, \tilde{f}_1^{(0)} = \tilde{f}_1, \tilde{f}_2^{(0)} = \tilde{f}_2\,.
\end{aligned}
$$

Тогда из системы (9)–(12) при условиях теоремы $\forall t \in [0,T]$ имеем:

$$
\|u_k(x,t)-\tilde{u}_k(x,t)\|^2_{B_{2,t}^{[\frac{n}{2}]+3,[\frac{n}{2}]+2}} \le q_5 \int_0^t d\tau \|Q(u_{k-1}(x,t), v_{k-1}(x,t), a_1^{(k-1)}(t), c_1^{(k-1)}(t)\,,
$$

$$
f_1^{(k-1)}(t)) - Q(\tilde{u}_{k-1}(x,t), \tilde{v}_{k-1}(x,t), \tilde{a}_1^{(k-1)}(t), \tilde{c}_1^{(k-1)}(t), \tilde{f}_1^{(k-1)}(t))\|^2_{W_{x,t}^{[\frac{n}{2}]+2,\,0}(D_\tau)}; \tag{24}
$$

$$
\|v_k(x,t)-\tilde{v}_k(x,t)\|^2_{B_{2,t}^{[\frac{n}{2}]+3,[\frac{n}{2}]+2}} \le q_6 \int_0^t d\tau \|\tilde{Q}(u_{k-1}(x,t), v_{k-1}(x,t), a_2^{(k-1)}(t), c_2^{(k-1)}(t),
$$

$$
f_2^{(k-1)}(t)) - \tilde{Q}(\tilde{u}_{k-1}(x,t), \tilde{v}_{k-1}(x,t), \tilde{a}_2^{(k-1)}(t), \tilde{c}_2^{(k-1)}(t), \tilde{f}_2^{(k-1)}(t))\|^2_{W_{x,t}^{[\frac{n}{2}]+2,\,0}(D_\tau)}; \tag{25}
$$

$$
\left\|a_1^{(k)}(\tau) - \tilde{a}_1^{(k)}(\tau)\right\|^2_{C[0,t]} \le K_2 q_7 \int_0^t d\tau \left\|Q(u_{k-1}(x,t), v_{k-1}(x,t), a_1^{(k-1)}(t), c_1^{(k-1)}(t),\right.
$$

$$
\left. f_1^{(k-1)}(t)) - Q(\tilde{u}_{k-1}(x,t), \tilde{v}_{k-1}(x,t), \tilde{a}_1^{(k-1)}(t), \tilde{c}_1^{(k-1)}(t), \tilde{f}_1^{(k-1)}(t))\right\|_{W_{x,t}^{[\frac{n}{2}]+2,\,0}(D_\tau)}; \tag{26}
$$

$$
\left\|c_1^{(k)}(\tau) - \tilde{c}_1^{(k)}(\tau)\right\|^2_{C[0,t]} \le K_3 q_8 \int_0^t d\tau \left\|Q(u_{k-1}(x,t), v_{k-1}(x,t), a_1^{(k-1)}(t), c_1^{(k-1)}(t),\right.
$$

$$
\left. f_1^{(k-1)}(t)) - Q(\tilde{u}_{k-1}(x,t), \tilde{v}_{k-1}(x,t), \tilde{a}_1^{(k-1)}(t), \tilde{c}_1^{(k-1)}(t), \tilde{f}_1^{(k-1)}(t))\right\|^2_{W_{x,t}^{[\frac{n}{2}]+2,0}(D_\tau)}; \tag{27}
$$

$$\left\|f_1^{(k)}(\tau)-\tilde{f}_1^{(k)}(\tau)\right\|_{C[0,t]}^2 \le K_4 q_9 \int\limits_0^t d\tau \left\|Q(u_{k-1}(x,t),v_{k-1}(x,t),a_1^{(k-1)}(t),c_1^{(k-1)}(t),\right.$$

$$\left. f_1^{(k-1)}(t))-Q(\tilde{u}_{k-1}(x,t),\tilde{v}_{k-1}(x,t),\tilde{a}_1^{(k-1)}(t),\tilde{c}_1^{(k-1)}(t),\tilde{f}_1^{(k-1)}(t))\right\|^2_{W_{x,t}^{[\frac{n}{2}]+2,\,0}(D_\tau)}; \tag{28}$$

$$\left\|a_2^{(k)}(\tau)-\tilde{a}_2^{(k)}(\tau)\right\|_{C[0,t]}^2 \le K_2 q_{10} \int\limits_0^t d\tau \left\|\tilde{Q}(u_{k-1}(x,t),v_{k-1}(x,t),a_2^{(k-1)}(t),c_2^{(k-1)}(t),\right.$$

$$\left. f_2^{(k-1)}(t))-\tilde{Q}(\tilde{u}_{k-1}(x,t),\tilde{v}_{k-1}(x,t),\tilde{a}_2^{(k-1)}(t),\tilde{c}_2^{(k-1)}(t),\tilde{f}_2^{(k-1)}(t))\right\|_{W_{x,t}^{[\frac{n}{2}]+2,\,0}(D_\tau)}; \tag{29}$$

$$\left\|c_2^{(k)}(\tau)-\tilde{c}_2^{(k)}(\tau)\right\|_{C[0,t]}^2 \le q_{11}\tilde{K}_3 \int\limits_0^t d\tau \left\|\tilde{Q}(u_{k-1}(x,t),v_{k-1}(x,t),a_2^{(k-1)}(t),c_2^{(k-1)}(t),\right.$$

$$\left. f_2^{(k-1)}(t))-\tilde{Q}(\tilde{u}_{k-1}(x,t),\tilde{v}_{k-1}(x,t),\tilde{a}_2^{(k-1)}(t),\tilde{c}_2^{(k-1)}(t),\tilde{f}_2^{(k-1)}(t))\right\|^2_{W_{x,t}^{[\frac{n}{2}]+2,\,0}(D_\tau)}; \tag{30}$$

$$\left\|f_2^{(k)}(\tau)-\tilde{f}_2^{(k)}(\tau)\right\|_{C[0,t]}^2 \le \tilde{K}_4 q_{12} \int\limits_0^t d\tau \left\|\tilde{Q}(u_{k-1}(x,t),v_{k-1}(x,t),a_2^{(k-1)}(t),c_2^{(k-1)}(t),\right.$$

$$\left. f_2^{(k-1)}(t))-Q(\tilde{u}_{k-1}(x,t),\tilde{v}_{k-1}(x,t),\tilde{a}_2^{(k-1)}(t),\tilde{c}_2^{(k-1)}(t),\tilde{f}_2^{(k-1)}(t))\right\|^2_{W_{x,t}^{[\frac{n}{2}]+2,\,0}(D_\tau)}, \tag{31}$$

где $$K_i=\left(\min_{0\le t\le T}|\Delta(t)|\right)^{-2}\cdot 3\cdot\sum_{j=1}^{3}\|A_{ij}(t)\|^2_{C[0,T]}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_s(x^i)}{\lambda_2^{[\frac{n}{2}]+1}}\right)^2 \quad (i=\overline{2,4}),$$

$$\tilde{K}_i=\left(\min_{0\le t\le T}\left|\tilde{\Delta}(t)\right|\right)^{-2}\cdot 3\cdot\sum_{j=1}^{3}\left\|\tilde{A}_{ij}(t)\right\|^2_{C[0,T]}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_s(x^i)}{\lambda_2^{[\frac{n}{2}]+1}}\right)^2 \quad (i=\overline{2,4}),$$

$q_i>0$ $(i=\overline{5,12})$ – некоторые постоянные, не зависящие от $u,v,a_1,a_2,c_1,c_2,f_1,f_2$.

Отсюда получим

$$\left\|W_k - \tilde{W}_k\right\|_{E_t}^2 \le K \int\limits_0^t \left\|W_{k-1} - \tilde{W}_{k-1}\right\|_{E_\tau}^2 d\tau, \tag{32}$$

где $\left\|W_k - \tilde{W}_k\right\|_{E_t} =$

$$\|u_k(\xi,\tau) - \tilde{u}_k(\xi,\tau)\|^2_{B_{2,t}^{[\frac{n}{2}]+3,[\frac{n}{2}]+2}} + \|v_k(\xi,\tau) - \tilde{v}_k(\xi,\tau)\|^2_{B_{2,t}^{[\frac{n}{2}]+3,[\frac{n}{2}]+2}} +$$

$$+\left\|a_1^{(k)}(\tau) - \tilde{a}_1^{(k)}(\tau)\right\|^2_{C[0,t]} + \left\|a_2^{(k)}(\tau) - \tilde{a}_2^{(k)}(\tau)\right\|^2_{C[0,t]} + \left\|c_1^{(k)}(\tau) - \tilde{c}_1^{(k)}(\tau)\right\|^2_{C[0,t]} +$$

$$+\left\|c_2^{(k)}(\tau) - \tilde{c}_2^{(k)}(\tau)\right\|^2_{C[0,t]} + \left\|f_1^{(k)}(\tau) - \tilde{f}_1^{(k)}(\tau)\right\|^2_{C[0,t]} + \left\|f_2^{(k)}(\tau) - \tilde{f}_2^{(k)}(\tau)\right\|^2_{C[0,t]},$$

$$K = \left[2 + \sum_{i=2}^{4}(K_i + \tilde{K}_i)\right] q_{13},$$

$q_{13} > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от $u, v, a_1, a_2, c_1, c_2, f_1, f_2$.

Тогда по индукции нетрудно получить оценку

$$\left\|W_k - \tilde{W}_k\right\|_{E_T} \le \left\{\frac{(KT)^k}{k!}\right\}^{\frac{1}{2}} \left\|W_0 - \tilde{W}_0\right\|_{E_T}. \tag{33}$$

Таким образом, итерация L^n оператора L удовлетворяет неравенству

$$\left\|L^k W - L^k \tilde{W}\right\|_{E_T} \le \left\{\frac{(KT)^k}{k!}\right\}^{\frac{1}{2}} \left\|W - \tilde{W}\right\|_{E_T}. \tag{34}$$

Ясно, что при достаточно больших значениях k

$$\left\{\frac{(KT)^k}{k!}\right\}^{\frac{1}{2}} < 1. \tag{35}$$

А это означает, что существующая итерация L^k является сжимающей. Следовательно, при достаточно малых значениях T оператор L^k удовлетворяет на множестве K_R условию принципа сжатых отображений. Тогда единственная неподвижная точка W оператора L^k является и единственной в K_R неподвижной точкой для оператора L.

Таким образом, оператор L имеет в K_R единственную неподвижную точку $(u(x,t),\ v(x,t), a_1(t), a_2(t), c_1(t), c_2(t), f_1(t), f_2(t))$. Тогда функции

$$u(x,t) \in B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3,[\frac{n}{2}]+2}, v(x,t) \in B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3,[\frac{n}{2}]+2}, a_1(t), a_2(t), c_1(t), c_2(t), f_1(t), f_2(t)$$

удовлетворяют на $[0,T]$ системам (9)–(12).

Легко можно показать, что $(u(x,t), v(x,t), a_1(t), a_2(t), c_1(t), c_2(t), f_1(t), f_2(t))$ является классическим решением задачи (1)–(7) (см. [7], гл. II).

Теперь покажем, что функции $u(x,t), v(x,t)$ удовлетворяют условиям (6), (7), соответственно. Тогда из (9), (10), в силу теоремы, получим, что

$$\frac{\partial^2 u(x^i,t)}{\partial t^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \varphi_k \cos\lambda_k t \mu_k(x^i) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \psi_k \sin\lambda_k t \mu_k(x^i) +$$
$$+ a_1(t) b(x^i,t) u(x^i,t) + c_1(t) d(x^i,t) \frac{\partial v(x^i,t)}{\partial t} + f_1(t) F(x^i,t) -$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left[a_1(\tau) b(\xi,\tau) u(\xi,\tau) + c_1(\tau) d(\xi,\tau) \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi,\tau) + f_1(\tau) F(\xi,\tau) \right] \times$$
$$\times \sin\lambda_k(t-\tau) \cdot \mu_k(\xi) d\xi d\tau \cdot \mu_k(x^i) \quad (i=\overline{1,3}); \tag{36}$$

$$\frac{\partial^2 v(x^i,t)}{\partial t^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \tilde{\varphi}_k \cos\lambda_k t \mu_k(x^i) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \tilde{\psi}_k \sin\lambda_k t \mu_k(x^i) +$$
$$+ a_2(t) \tilde{b}(x^i,t) \frac{\partial u(x^i,t)}{\partial t} + c_2(t) \tilde{d}(x^i,t) v(x^i,t) + f_2(t) G(x^i,t) -$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left[a_2(\tau) \tilde{b}(\xi,\tau) \frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \tau} + c_2(\tau) \tilde{d}(\xi,\tau) v(\xi,\tau) + f_2(\tau) G(\xi,\tau) \right] \times$$
$$\times \sin\lambda_k(t-\tau) \cdot \mu_k(\xi) d\xi d\tau \cdot \mu_k(x^i) \quad (i=\overline{1,3}). \tag{37}$$

Из (11) и (12) имеем

$$h_i''(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \varphi_k \cos\lambda_k t \mu_k(x^i) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \psi_k \sin\lambda_k t \mu_k(x^i) +$$
$$+ a_1(t) b(x^i,t) h_i(t) + c_1(t) d(x^i,t) g_i'(t) + f_1(t) F(x^i,t) -$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left[a_1(\tau) b(\xi,\tau) u(\xi,\tau) + c_1(\tau) d(\xi,\tau) \frac{\partial v}{\partial \tau}(\xi,\tau) + f_1(\tau) F(\xi,\tau) \right] \times$$
$$\times \sin\lambda_k(t-\tau) \cdot \mu_k(\xi) d\xi d\tau \cdot \mu_k(x^i) \quad (i=\overline{1,3}), \tag{38}$$

$$g_i''(t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\tilde{\varphi}_k\cos\lambda_k t\mu_k(x^i)-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\tilde{\psi}_k\sin\lambda_k t\mu_k(x^i)+$$
$$+a_2(t)\tilde{b}(x^i,t)h_i'(t)+c_2(t)\tilde{d}(x^i,t)g_i(t)+f_2(t)G(x^i,t)-$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\left[a_2(\tau)\tilde{b}(\xi,\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial\tau}+c_2(\tau)\tilde{d}(\xi,\tau)v(\xi,\tau)+f_2(\tau)G(\xi,\tau)\right]\times$$
$$\times\sin\lambda_k(t-\tau)\cdot\mu_k(\xi)d\xi d\tau\cdot\mu_k(x^i)\quad(i=\overline{1,3}).\tag{39}$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial^2 u(x^i,t)}{\partial t^2}-h_i''(t)=a_1(t)b(x^i,t)(u(x^i,t)-h_i(t))+$$
$$+c_1(t)d(x^i,t)\left(\frac{\partial v(x^i,t)}{\partial t}-g_i'(t)\right)\quad(i=\overline{1,3}),\tag{40}$$

$$\frac{\partial^2 v(x^i,t)}{\partial t^2}-g_i''(t)=a_2(t)\tilde{b}(x^i,t)\left(\frac{\partial u(x^i,t)}{\partial t}-h_i'(t)\right)+$$
$$+c_2(t)\tilde{d}(x^i,t)\left(v(x^i,t)-g_i(t)\right)\quad(i=\overline{1,3}),\tag{41}$$

в силу условия 7 данной теоремы

$$\begin{aligned}&u(x^i,0)-h_i(0)=0\quad(i=\overline{1,3}),\\&\frac{\partial u(x^i,0)}{\partial t}-h_i'(0)=0\quad(i=\overline{1,3}),\\&v(x^i,0)-g_i(0)=0\quad(i=\overline{1,3}),\\&\frac{\partial v(x^i,0)}{\partial t}-g_i'(0)=0\quad(i=\overline{1,3}).\end{aligned}\tag{42}$$

Тогда для функции $u(x^i,t)-h_i(t)$ и $v(x^i,t)-g_i(t)$ $(i=\overline{1,3})$ получаем задачу Коши (40), (41). Отсюда имеем

$$u(x^i,t)-h_i(t)=0\quad(i=\overline{1,3})\ \ \forall t\in[0,T],$$
$$v(x^i,t)-g_i(t)=0\quad(i=\overline{1,3})\ \ \forall t\in[0,T].$$

1. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г.* Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1967. – 150 с.
2. *Ильин В.А., Шишмарев И.А.* Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР, сер. математика. – 1960, **24**. – С. 883–896.

3. *Худавердиев К.И.* К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений. – Дисс.док.физ.-мат.наук, metricconverterProductID1973 г. 1973 г., АГУ. – 319 с.
4. *Кулиев М.А.* Многомерная обратная краевая задача для линейного гиперболического уравнения в ограниченной области // Дифференциальные уравнения. – 2002. – **38**, №1. – С. 98–101.
5. *Кулиев М.А.* Многомерная обратная краевая задача для систем линейных гиперболических уравнений в ограниченной области // Вестн. Бакинского ун-та, физ.-мат. сер., № 2, 2007. – С. 5–15.
6. *Шишмарев И.А.* Введение в теорию эллиптических уравнений. – Изд-во МГУ, 1979.
7. *Ладыженская О.А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. – Москва, 1953. – 279 с.

Бакинский государственный университет

Получено 19.10.10