©2010. **А.И. Кожанов**

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Для параболических уравнений с одной пространственной переменной изучается разрешимость задач

а) с нелокальными граничными условиями, сочетающими условия А.А. Самарского и условия интегрального вида;

б) с интегральными условиями по пространственной переменной.

Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Ключевые слова: параболические уравнения, пространственно нелокальные краевые задачи, задачи с интегральными условиями, существование и единственность решений

MSC (2000): 35K20

1. Постановка задач.

Пусть Ω есть интервал $(0,1)$ оси Ox, Q есть прямоугольник $\Omega\times(0,T)$, $0<T<+\infty$, $c(x,t)$, $f(x,t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $K_i(x,t)$ и $N_i(x,t)$, $i=1,2$, суть заданные функции, определенные при $x\in\overline{\Omega}$, $t\in[0,T]$ соответственно.

Краевая задача I: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$u_t-u_{xx}+c(x,t)u=f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0)=0,\quad x\in\Omega, \tag{2}$$

$$u_x(0,t)=\alpha_1(t)u(0,t)+\alpha_2(t)u(1,t)+\int\limits_{\Omega}K_1(x,t)u(x,t)\,dx,\quad 0<t<T, \tag{3}$$

$$u_x(1,t)=\beta_1(t)u(0,t)+\beta_2(t)u(1,t)+\int\limits_{\Omega}K_2(x,t)u(x,t)\,dx,\quad 0<t<T. \tag{4}$$

Краевая задача II: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условие* (2), *а также условия*

$$u(0,t)=\alpha_1(t)u_x(0,t)+\alpha_2(t)u_x(1,t)+\int\limits_{\Omega}K_1(x,t)u(x,t)\,dx,\quad 0<t<T, \tag{5}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 09-01-00422а, и ФЦП " Научные и научно-педагогические кадры инновационной России", государственный контракт № 16.740.11.0127

$$u(1,t) = \beta_1(t)u_x(0,t) + \beta_2(t)u_x(1,t) + \int\limits_\Omega K_2(x,t)u(x,t)\,dx, \quad 0 < t < T. \tag{6}$$

Краевая задача III: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условие* (2), *а также условия*

$$u_x(0,t) = \alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)u_x(1,t) + \int\limits_\Omega K_1(x,t)u(x,t)\,dx, \quad 0 < t < T, \tag{7}$$

$$u(1,t) = \beta_1(t)u(0,t) + \beta_2(t)u_x(1,t) + \int\limits_\Omega K_2(x,t)u(x,t)\,dx, \quad 0 < t < T. \tag{8}$$

Нелокальная краевая задача с интегральными условиями: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условие* (2), *а также условия*

$$\int\limits_\Omega N_i(x,t)u(x,t)\,dx = 0, \quad i = 1,2, \quad 0 < t < T. \tag{9}$$

Уточним, что в краевых задачах I — III предполагается, что функция $\alpha_1(t)\beta_2(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)$ может обращаться в нуль (в том числе тождественно) на отрезке $[0,T]$.

Краевые задачи I — III, задача с интегральными условиями относятся к числу нелокальных задач, т.е. задач, в которых задается связь значений решения или (и) его производных в различных точках тех или иных граничных либо внутренних многообразий. Подобные задачи в целом активно изучаются в последнее время (см., например, монографии [1, 2]). Если же говорить о работах, более близких к предмету настоящей статьи, то заметим здесь следующее.

Краевые задачи I — III в случае $K_i(x,t) \equiv 0$, $i = 1,2$, как было отмечено в статье [3], возникают при моделировании некоторых теплофизических процессов (см. также [2]). В работе [4] методом Фурье была исследована разрешимость начально-краевой задачи для уравнения

$$u_t - u_{xx} + c(x)u = f(x,t)$$

с нелокальными краевыми условиями статьи [3]:

$$\alpha_1 u(0,t) + \alpha_2 u(1,t) + \alpha_3 u_x(0,t) + \alpha_4 u_x(1,t) = 0,$$

$$\beta_1 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) + \beta_3 u_x(0,t) + \beta_4 u_x(1,t) = 0,$$

$\alpha_i = const$, $\beta_i = const$, $i = \overline{1,4}$; основными требованиями на входные данные в этой работе были требование линейной независимости векторов $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$

и $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, а также требование самосопряженности в смысле пространства L_2 оператора $-\frac{d^2}{dx^2} + c(x)$ с указанными краевыми условиями. Некоторые частные случаи задач I — III в ситуации $K_i(x,t) \equiv 0$, $i = 1, 2$, при отказе от требования самосопряженности в случае постоянных коэффициентов в граничных условиях были рассмотрены в [5], в случае переменных коэффициентов и для более общего уравнения в [6].

Систематическое исследование краевых задач для параболических уравнений с нелокальными граничными условиями интегрального вида началось, по-видимому, с работ [7] и [8]; как близкие по постановке изучаемых задач отметим также работы [9 — 16].

2. Разрешимость краевой задачи I.

Обозначим через V_0 пространство

$$V_0 = \{v(x,t): \quad v(x,t) \in W_2^{2,1}(Q), \quad v_x(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)\};$$

норму в этом пространстве определим естественным образом

$$\|v\|_{V_0} = \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v_x\|_{W_2^{2,1}(Q)}.$$

Очевидно, что пространство V_0 с данной нормой является банаховым.

Проведем вначале некоторые вспомогательные построения.

Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $a_i(x,t)$, $\gamma_i(t)$ и $\delta_i(t)$, $i = 1, 2$, суть функции

$$\varphi(x) = x - \frac{x^2}{2}, \quad \psi(x) = \frac{x^2}{2},$$

$$a_i(x,t) = \frac{\beta_i(t) - \alpha_i(t)}{2}x^2 + \alpha_i(t)x,$$

$$\gamma_i(t) = \int\limits_\Omega \varphi(y)K_i(y,t)\,dy,$$

$$\delta_i(t) = \int\limits_\Omega \psi(y)K_i(y,t)\,dy.$$

Для заданной функции $v(x,t)$ через $\overline{v}(t)$ и $\widetilde{v}(t)$ будем обозначать функции

$$\overline{v}(t) = \int\limits_\Omega K_1(y,t)v(y,t)\,dy, \quad \widetilde{v}(t) = \int\limits_\Omega K_2(y,t)v(y,t)\,dy,$$

через B — оператор, действие которого определяется равенством

$$(Bv)(x,t) = v(x,t) - a_1(x,t)v(0,t) - a_2(x,t)v(1,t) - \varphi(x)\overline{v}(t) - \psi(x)\widetilde{v}(t).$$

Обозначим $w(x,t) = (Bv)(x,t)$. Имеют место равенства

$$v(0,t) = w(0,t),$$

$$[1 - a_2(1,t)]v(1,t) - \frac{1}{2}\overline{v}(t) - \frac{1}{2}\widetilde{v}(t) = w(1,t) + a_1(1,t)w(0,t), \tag{10}$$

$$-\overline{a}_2(t)v(1,t) + [1 - \gamma_1(t)]\overline{v}(t) - \delta_1(t)\widetilde{v}(t) = \overline{w}(t) + \overline{a}_1(t)w(0,t), \tag{11}$$

$$-\widetilde{a}_2(t)v(1,t) - \gamma_2(t)\overline{v}(t) + [1 - \delta_2(t)]\widetilde{v}(t) = \widetilde{w}(t) + \widetilde{a}_1(t)w(0,t). \tag{12}$$

Если определитель $\Delta(t)$ алгебраической системы (10) — (12) отличен от нуля на отрезке $[0,T]$, то функции $v(0,t)$, $v(1,t)$, $\overline{v}(t)$ и $\widetilde{v}(t)$ вычисляются через функции $w(0,t)$, $w(1,t)$, $\overline{w}(t)$ и $\widetilde{w}(t)$:

$$v(0,t) = w(0,t),$$

$$v(1,t) = b_1(x,t)w(0,t) + b_2(x,t)w(1,t) + b_3(x,t)\overline{w}(t) + b_4(x,t)\widetilde{w}(t),$$

$$\overline{v}(t) = c_1(x,t)w(0,t) + c_2(x,t)w(1,t) + c_3(x,t)\overline{w}(t) + c_4(x,t)\widetilde{w}(t),$$

$$\widetilde{v}(t) = d_1(x,t)w(0,t) + d_2(x,t)w(1,t) + d_3(x,t)\overline{w}(t) + d_4(x,t)\widetilde{w}(t).$$

Из этих равенств следует, что при выполнении условия $\Delta(t) \neq 0$ оператор B обратим, и что оператор B^{-1} задается равенством

$$(B^{-1}w)(x,t) = w(x,t) + A_1(x,t)w(0,t) + A_2(x,t)w(1,t) +$$

$$+ A_3(x,t)\overline{w}(t) + A_4(x,t)\widetilde{w}(t),$$

в котором функции $A_j(x,t)$, $j = \overline{1,4}$, вычисляются через функции $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ и $K_i(x,t)$, $i = 1,2$.

Определим функции $\Phi(x,t,v)$ и $F(x,t,v)$:

$$\Phi(x,t,v) = [a_{1xx}(x,t) - a_{1t}(x,t) - c(x,t)a_1(x,t) + a_1(x,t)c(0,t)]v(0,t) +$$

$$+ [a_{2xx}(x,t) - a_{2t}(x,t) - c(x,t)a_2(x,t) + a_2(x,t)c(1,t)]v(1,t) -$$

$$-\varphi(x)\int\limits_\Omega \int\limits_\Omega K_1(y,t)v_{yy}(y,t)\,dy - \psi(x)\int\limits_\Omega K_2(y,t)v_{yy}(y,t)\,dy +$$

$$+ \int\limits_\Omega [\varphi''(x)K_1(y,t) - \varphi(x)K_{1t}(y,t) - c(x,t)\varphi(x)K_1(y,t) +$$

$$+ \varphi(x)K_1(y,t)c(y,t)]v(y,t)\,dy + \int\limits_\Omega [\psi''(x)K_2(y,t) -$$

$$-\psi(x)K_{2t}(y,t) - c(x,t)\psi(x)K_1(y,t) + \psi(x)K_2(y,t)c(y,t)]v(y,t)\,dy,$$

$$F(x,t,v) = -a_1(x,t)v_{xx}(0,t) - a_2(x,t)v_{xx}(1,t) + \Phi(x,t,v).$$

Пусть функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$ связаны равенством $w(x,t) = (Bv)(x,t)$. В представлениях функций $\Phi(x,t,v)$ и $F(x,t,v)$ заменим $v(0,t)$, $v(1,t)$, $v_t(0,t)$, $v_t(1,t)$, $v_{yy}(y,t)$, $v_{xx}(0,t)$, $v_{xx}(1,t)$ их значениями, вычисленными через функцию $w(x,t)$. Получим равенства

$$\Phi(x,t,v) = \Phi_1(x,t,w),$$

$$F(x,t,v) = -a_1(x,t)w_{xx}(0,t) - a_2(x,t)w_{xx}(1,t) + \Phi_2(x,t,w),$$
$$\widetilde{\Phi}_1(x,t,w) = \Phi_1(x,t,w) + \Phi_2(x,t,w),$$

в которых формы $\Phi_1(x,t,w)$ и $\Phi_2(x,t,w)$ определяются функциями $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $K_i(x,t)$, $i = 1,2$, а также $c(x,t)$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$c(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad \alpha_i(t) \in C^1([0,T]), \quad \beta_i(t) \in C^1([0,T]),$$
$$K_i(x,t) \in C^1(\overline{Q}), \quad i = 1,2; \tag{14}$$
$$\Delta(t) \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T]; \tag{15}$$
$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad f_x(x,t) \in L_2(Q). \tag{16}$$

Тогда краевая задача I имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in V_0$, $u(0,t) \in W_2^1([0,T])$, $u(1,t) \in W_2^1([0,T])$.

Доказательство. Пусть $g(x,t)$ есть заданная функция такая, что $g(x,t) \in L_2(Q)$, $g_x(x,t) \in L_2(Q)$. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$w_t - w_{xx} + c(x,t)w = g(x,t) - a_1(x,t)w_{xx}(0,t) - a_2(x,t)w_{xx}(1,t) + \widetilde{\Phi}_1(x,t,w) \tag{17}$$

и такую, что для нее выполняются условие (2), а также условия

$$w_x(0,t) = w_x(1,t) = 0, \quad 0 < t < T. \tag{18}$$

Установим ее разрешимость в пространстве V_0. Воспользуемся методом продолжения по параметру.

Пусть λ есть число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим семейство краевых задач: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$w_t - w_{xx} + c(x,t)w = g(x,t) + \lambda[-a_1(x,t)w_{xx}(0,t) - a_2(x,t)w_{xx}(1,t) + \widetilde{\Phi}_1(x,t,w)] \tag{17_λ}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (18). Как обычно это делается при применении теоремы о методе продолжения по параметру (см. [17]), обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0,1]$, для которых краевая задача (17_λ), (2), (18) разрешима в пространстве V_0 для всех функций $g(x,t)$, удовлетворяющих включениям $g(x,t) \in L_2(Q)$, $g_x(x,t) \in L_2(Q)$. Как известно (вновь см. [17]), если множество Λ будет не пустым, открытым и замкнутым в отрезке $[0,1]$, то оно будет совпадать со всем отрезком $[0,1]$. Покажем, что наше множество Λ будет требуемым — не пустым, открытым и замкнутым.

Тот факт, что множество Λ не пусто, очевиден, поскольку число 0 принадлежит ему (см. [18]).

Открытость и замкнутость Λ будет иметь место, если для всевозможных решений краевой задачи (17_λ), (2), (18) из пространства V_0 выполняется равномерная по λ априорная оценка

$$\|w\|_{V_0} \leq R_0 \tag{19}$$

(см. [17]). Покажем ее наличие.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_\Omega (w_{x\tau} - w_{xxx} + cw_x + c_x w)\left[\mu w_{x\tau} - \left(x - \frac{1}{2}\right) w_{xx}\right] dx\, d\tau =$$
$$= \int_0^t \int_\Omega (g_x + \lambda[-a_{1x} w_{xx}(0,\tau) - a_{2x} w_{xx}(1,\tau) + \widetilde{\Phi}_{1x}(x,\tau,w)])\cdot$$
$$\cdot \left[\mu w_{x\tau} - \left(x - \frac{1}{2}\right) w_{xx}\right] dx\, d\tau, \tag{20}$$

в котором μ есть положительное число, величина которого будет уточнена ниже. Интегрируя по частям и используя (2) и (18), нетрудно данное равенство преобразовать к виду

$$\mu \int_0^t \int_\Omega w_{x\tau}^2\, dx\, d\tau + \frac{\mu}{2} \int_\Omega w_{xx}^2(x,t)\, dx + \frac{1}{4} \int_0^t w_{xx}^2(0,\tau)\, d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t w_{xx}^2(0,\tau)\, d\tau =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega w_{xx}^2\, dx\, d\tau + \int_0^t \int_\Omega \left(x - \frac{1}{2}\right) w_{xx} w_{x\tau}\, dx\, d\tau -$$
$$-\lambda \int_0^t \int_\Omega [a_{1x} w_{xx}(0,\tau) + a_{2x} w_{xx}(1,\tau)]\left[\mu w_{x\tau} - \left(x - \frac{1}{2}\right) w_{xx}\right] dx\, d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_\Omega [g_x - cw_x - c_x w + \widetilde{\Phi}_{1x}(x,\tau,w)]\left[\mu w_{x\tau} - \left(x - \frac{1}{2}\right) w_{xx}\right] dx\, d\tau.$$

Второе слагаемое правой части данного равенства оценивается сверху с помощью неравенства Юнга величиной

$$\frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega w_{x\tau}^2\,dx\,d\tau+\frac{1}{8\delta_1^2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega w_{xx}^2\,dx\,d\tau.$$

Далее, имеют место неравенства

$$\left|\lambda\int\limits_0^t\int\limits_\Omega[a_{1x}w_{xx}(0,\tau)+a_{2x}w_{xx}(1,\tau)]\left[\mu w_{x\tau}-\left(x-\frac{1}{2}\right)w_{xx}\right]dx\,d\tau\right|\le$$

$$\le 2\delta_2^2\int\limits_0^t[w_{xx}^2(0,\tau)+w_{xx}^2(1,\tau)]\,d\tau+$$

$$+\frac{\mu^2}{\delta_2^2}[\max\{\max_{\overline{Q}}|a_{1x}(x,t)|,\max_{\overline{Q}}|a_{2x}(x,t)|\}]^2\int\limits_0^t\int\limits_\Omega w_{x\tau}^2\,dx\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{\delta_2^2}[\max\{\max_{\overline{Q}}|a_{1x}(x,t)|,\max_{\overline{Q}}|a_{2x}(x,t)|\}]^2\int\limits_0^t\int\limits_\Omega w_{xx}^2\,dx\,d\tau,$$

$$\left|\int\limits_0^t\int\limits_\Omega[g_x-cw_x-c_xw+\widetilde{\Phi}_{1x}]\left[\mu w_{x\tau}-\left(x-\frac{1}{2}\right)w_{xx}\right]dx\,d\tau\right|\le$$

$$\le\delta_3\int\limits_0^t\int\limits_\Omega w_{x\tau}^2\,dx\,d\tau+C(\delta_3)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega(w^2+w_x^2+\widetilde{\Phi}_{1x}^2+w_{xx}^2+g_x^2)\,dx\,d\tau;$$

в этих неравенствах δ_2 и δ_3 — произвольные положительные числа, число $C(\delta_3)$ определяется, помимо числа δ_3, также функциями $c(x,t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ и $K_i(x,t)$, $i=1,2$. Зафиксируем число δ_2: $\delta_2=\frac{1}{4}$. Далее зафиксируем число μ таким, чтобы выполнялось

$$8\mu[\max\{\max_{\overline{Q}}|a_{1x}(x,t)|,\max_{\overline{Q}}|a_{2x}(x,t)|\}]<1.$$

Подбирая теперь числа δ_1 и δ_3 малыми, нетрудно получить, что следствием равенства (20) будет неравенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega w_{x\tau}^2\,dx\,d\tau+\int\limits_\Omega w_{xx}^2(x,t)\,dx+\int\limits_0^t[w_{xx}^2(0,\tau)+w_{xx}^2(1,\tau)]\,d\tau\le$$

$$\leq C_1 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (w^2 + w_x^2 + w_{xx}^2 + \widetilde{\Phi}_{1x}^2 + g_x^2)\,dx\,d\tau, \tag{21}$$

постоянная C_1 в котором определяется лишь функциями $c(x,t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ и $K_i(x,t)$, $i = 1,2$.

Для функции $\widetilde{\Phi}_{1x}(x,\tau,w)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega \widetilde{\Phi}_{1x}^2\,dx\,d\tau \leq C_2 \left\{ \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (w^2 + w_x^2)\,dx\,d\tau + \int\limits_0^t [w^2(0,\tau) + w^2(1,\tau)]\,d\tau \right\},$$

постоянная C_2 в котором вновь определяется лишь функциями $c(x,t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ и $K_i(x,t)$, $i = 1,2$. Это неравенство, а также элементарные неравенства

$$\int\limits_\Omega w_x^2(x,\tau)\,dx \leq \int\limits_\Omega w_{xx}^2(x,\tau)\,dx, \tag{22}$$

$$w^2(0,\tau) \leq 4\left[\int\limits_\Omega w^2(x,\tau)\,dx + \int\limits_\Omega w_x^2(x,\tau)\,dx\right], \tag{23}$$

$$w^2(1,\tau) \leq 4\left[\int\limits_\Omega w^2(x,\tau)\,dx + \int\limits_\Omega w_x^2(x,\tau)\,dx\right], \tag{24}$$

позволяют продолжить (21):

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega w_{x\tau}^2\,dx\,d\tau + \int\limits_\Omega w_{xx}^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^t [w_{xx}^2(0,\tau) + w_{xx}^2(1,\tau)]\,d\tau \leq$$

$$\leq C_3 \left[\int\limits_0^t \int\limits_\Omega w^2\,dx\,d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega w_{xx}^2\,dx\,d\tau + \int\limits_Q g_x^2\,dx\,d\tau\right]; \tag{25}$$

постоянная C_3 здесь вновь определяется лишь функциями $c(x,t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $K_i(x,t)$, $i = 1,2$.

Рассмотрим теперь равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega (w_\tau - w_{xx} + cw)w\,dx\,d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_\Omega [g + \lambda[-a_{1x}w_{xx}(0,\tau) - a_{2x}w_{xx}(1,\tau) + \widetilde{\Phi}_1(x,\tau,w)]w\,dx\,d\tau.$$

Интегрируя по частям, используя оценку для функции $\widetilde{\Phi}_1(x,\tau,w)$:

$$|\widetilde{\Phi}_1(x,\tau,w)| \leq C_4 \left[\left(\int\limits_\Omega w^2(x,\tau)\,dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_\Omega w_{xx}^2(x,\tau)\,dx \right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + |w(0,\tau)| + |w(1,\tau)| \right],$$

применяя неравенство Юнга и далее вновь используя неравенства (23) и (24), нетрудно получить оценку

$$\int\limits_\Omega w^2(x,t)\,dx \leq \delta \int\limits_0^t [w_{xx}^2(0,\tau) + w_{xx}^2(1,\tau)]\,d\tau +$$

$$+ C(\delta) \left[\int\limits_0^t \int\limits_\Omega (w^2 + w_{xx}^2)\,dx\,d\tau + \int\limits_Q g^2\,dx\,dt \right], \tag{26}$$

в которой δ есть произвольное положительное число, число же $C(\delta)$ определяется, помимо δ, еще функциями $c(x,t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ и $K_i(x,t)$, $i = 1, 2$.

Сложив (25) и (26), подобрав δ малым и зафиксировав, далее применяя лемму Гронуолла, получаем, что для решений $w(x,t)$ краевой задачи (17_λ), (2), (18) из пространства V_0 имеет место априорная оценка

$$\int\limits_\Omega [w^2(x,t) + w_{xx}^2(x,t)]\,dx + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega w_{x\tau}^2\,dx\,d\tau + \int\limits_0^t [w_{xx}^2(0,\tau) + w_{xx}^2(1,\tau)]\,d\tau \leq$$

$$\leq C_5 \int\limits_Q (g^2 + g_x^2)\,dx\,dt \tag{27}$$

с постоянной C_5, определяющейся лишь функциями $c(x,t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ и $K_i(x,t)$, $i = 1, 2$.

Из оценки (27) и из уравнения (17_λ) следует очевидная вторая априорная оценка

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega w_\tau^2\,dx\,d\tau \leq C_6 \int\limits_Q (g^2 + g_x^2)\,dx\,dt, \tag{28}$$

из оценки (27) и из продифференцированного по переменной x уравнения (17_λ) — третья:

$$\int_0^t \int_\Omega w_{xxx}^2 \, dx \, d\tau \le C_7 \int_Q (g^2 + g_x^2) \, dx \, dt, \tag{29}$$

числа C_6 и C_7 в этих оценках вновь определяются лишь функциями $c(x,t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ и $K_i(x,t)$, $i = 1, 2$.

Оценки (27) — (29) дают требуемую оценку (19); как уже говорилось выше, из этой оценки и из непустоты множества Λ следует совпадение этого множества со всем отрезком $[0, 1]$. В свою очередь, совпадение множества Λ со всем отрезком [0,1] означает, что краевая задача (17), (2), (18) имеет решение $w(x,t)$, принадлежащее пространству V_0.

Определим функцию $u(x,t)$ с помощью равенства (13):

$$u(x,t) = w(x,t) + A_1(x,t)w(0,t) + A_2(x,t)w(1,t) + A_3(x,t)\overline{w}(t) + A_4(x,t)\widetilde{w}(t).$$

Эта функция принадлежит пространству V_0 и является решением уравнения

$$u_t - u_{xx} + c(x,t)u = g(x,t) - a_1(x,t)u_{xx}(0,t) - a_2(x,t)u_{xx}(1,t) + \Phi(x,t,u). \tag{30}$$

Если обозначить через L оператор

$$Lu = u_t - u_{xx} + c(x,t)u,$$

то уравнение (30) можно записать в виде

$$BLu = g. \tag{31}$$

Положим $g(x,t) = (Bf)(x,t)$. Тогда вследствие взаимной однозначности оператора B из (31) вытекает, что функция $u(x,t)$ является решением уравнения (1). Выполнение условий (2) — (4) для функции $u(x,t)$ очевидно. Следовательно, функция $u(x,t)$ представляет собой (при указанном выше выборе функции $g(x,t)$) требуемое решение краевой задачи I.

Теорема доказана.

Приведем еще одну теорему о разрешимости краевой задачи I, более удобную для дальнейших использований.

Положим

$$h_1(t) = \alpha_2(t) + \beta_2(t) - 2,$$

и пусть выполняется условие

$$h_1(t) \ne 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, T]. \tag{32}$$

Далее положим

$$h_{01}(t) = \frac{1 - \beta_2(t)}{h_1(t)}, \quad h_{11}(t) = \frac{\beta_2(t) - 2}{h_1(t)},$$

$$g_{01}(t) = \frac{\alpha_2(t) - 1}{h_1(t)}, \quad g_{11}(t) = -\frac{\alpha_2(t)}{h_1(t)},$$

$$N_{11}(x,t) = h_{01}(t)K_1(x,t) + g_{01}(t)K_2(x,t),$$

$$N_{21}(x,t) = h_{11}(t)K_1(x,t) + g_{11}(t)K_2(x,t),$$

$$M_1(x,y,t) = x^2 N_{11}(y,t) + xN_{21}(y,t),$$

$$R_{11}(t) = 1 - \int\limits_\Omega x^2 N_{11}(x,t)\,dx, \quad R_{21}(t) = -\int\limits_\Omega xN_{11}(x,t)\,dx,$$

$$S_{11}(t) = -\int\limits_\Omega x^2 N_{21}(x,t)\,dx, \quad S_{21}(t) = 1 - \int\limits_\Omega xN_{21}(x,t)\,dx,$$

$$\Delta_1(t) = R_{11}(t)S_{21}(t) - R_{21}(t)S_{11}(t),$$

$$M_1^*(x,y,t) = \frac{1}{\Delta_1(t)}\{[x^2 S_{21}(t) - xS_{11}(t)]N_{11}(y,t) - [x^2 R_{21}(t) - xR_{11}(t)]N_{21}(y,t)\}.$$

Определим оператор M:

$$(Mu)(x,t) = u(x,t) - \int\limits_\Omega M_1(x,y,t)u(y,t)\,dy.$$

Пусть выполняется условие

$$\Delta_1(t) \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T]. \tag{33}$$

Тогда оператор M будет обратим, и обратный оператор будет определяться равенствами

$$u(x,t) = w(x,t) + \int\limits_\Omega M_1^*(x,y,t)w(y,t)\,dy, \quad w(x,t) = (Mu)(x,t).$$

Определим функцию $\Psi_1(x,t,v)$ ($v = v(x,t)$ — заданная функция):

$$\Psi_1(x,t,v) = \int\limits_\Omega [M_{1xx}(x,y,t) - M_{1t}(x,y,t) - c(x,t)M_1(x,y,t)+$$

$$+c(y,t)M_1(x,y,t)]v(y,t)\,dy - \int\limits_\Omega M_1(x,y,t)v_{yy}(y,t)\,dy.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (14) *и* (16) *теоремы* 1, *а также условия* (32) *и* (33). *Тогда краевая задача* I *имеет решение* $u(x,t)$ *такое, что* $u(x,t) \in V_0$, $u(0,t) \in W_2^1([0,T])$, $u(1,t) \in W_2^1([0,T])$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$w_t - w_{xx} + cw - \Psi_1(x,t,M^{-1}w) = g(x,t) \tag{1_1}$$

и такую, что для нее выполняются условие (2), *а также условия*

$$w_x(0,t) = \alpha_1(t)w(0,t) + \alpha_2(t)w(1,t), \quad 0 < t < T, \tag{3_1}$$

$$w_x(1,t) = \beta_1(t)w(0,t) + \beta_2(t)w(1,t), \quad 0 < t < T. \tag{4_1}$$

Предполагая, что для функции $g(x,t)$ выполняются включения $g(x,t) \in L_2(Q)$, $g_x(x,t) \in L_2(Q)$, нетрудно установить, что краевая задача (1_1), (2), (3_1), (4_1) имеет решение $w(x,t)$ такое, что $w(x,t) \in V_0$, $w(0,t) \in W_2^1([0,T])$, $w(1,t) \in W_2^1([0,T])$ — делается это дословным повторением доказательства теоремы 1. Положим $u(x,t) = (M^{-1}w)(x,t)$, $g(x,t) = (Mf)(x,t)$. Для функции $u(x,t)$ выполняются включения $u(x,t) \in V_0$, $u(0,t) \in W_2^1([0,T])$, $u(1,t) \in W_2^1([0,T])$. Далее имеет место равенство

$$M(u_t - u_{xx} + cu - f) = 0.$$

Вследствие взаимной однозначности оператора M из этого равенства вытекает, что функция $u(x,t)$ является решением краевой задачи I из требуемого класса.

Теорема доказана.

Ниже нам понадобится результат о повышении гладкости решений краевой задачи I по переменной t.

Теорема 3. *Пусть выполняются условие* (15), *а также условия*

$$c(x,t) \in C^2(\overline{Q}), \quad \alpha_i(t) \in C^2([0,T]), \quad \beta_i(t) \in C^2([0,T]),$$

$$K_i(x,t) \in C^2(\overline{Q}), \quad i = 1,2; \tag{34}$$

$$f(x,t) \in W_2^1(Q), \quad f_{xt}(x,t) \in L_2(Q), \quad f(x,0) \equiv 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{35}$$

Тогда краевая задача I имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in V_0$, $u_t(x,t) \in V_0$, $u(0,t) \in W_2^2([0,T])$, $u(1,t) \in W_2^2([0,T])$.

Доказательство. Пусть $g(x,t)$ есть заданная функция такая, что $g(x,t) \in L_2(Q)$, $g_t(x,t) \in L_2(Q)$, $g_{xt}(x,t) \in L_2(Q)$. Обозначим

$$w(x,t) = \int_0^t v(x,\tau)\,d\tau$$

и рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $v(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$v_t - v_{xx} + c(x,t)v = g_t(x,t) - a_1(x,t)v_{xx}(0,t) - a_2(x,t)v_{xx}(1,t) -$$

$$-a_{1t}(x,t)w_{xx}(0,t) - a_{2t}(x,t)w_{xx}(1,t) + \widetilde{\Phi}_1(x,t,v) + \widetilde{\Phi}_{1t}(x,t,w)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (18). Существование решения $v(x,t)$ этой задачи такого, что $v(x,t) \in V_0$, $v(0,t) \in W_2^1([0,T])$, $v(1,t) \in W_2^1([0,T])$, устанавливается также, как доказывалась разрешимость краевой задачи (17), (2), (18) — с помощью метода продолжения по параметру и априорных оценок, при этом наличие требуемых оценок доказывается вполне аналогично тому, как доказывалась справедливость оценки (19). Очевидно теперь, что функция $w(x,t)$ будет решением задачи (17), (2), (18), причем таким, что для нее выполняются включения $w(x,t) \in V_0$, $w_t(x,t) \in V_0$, $w(0,t) \in W_2^2([0,T])$, $w(1,t) \in W_2^2([0,T])$. Также очевидно, что функция $u(x,t)$, определенная равенством (13), будет решением краевой задачи I из требуемого класса.

Теорема доказана.

Теорема 3'.*Пусть выполняются условия* (32) — (35)*. Тогда краевая задача I имеет решение* $u(x,t)$ *такое, что* $u(x,t) \in V_0$*,* $u_t(x,t) \in V_0$*,* $u(0,t) \in W_2^2([0,T])$*,* $u(1,t) \in W_2^2([0,T])$*.*

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3, т.е. с помощью перехода к продифференцированной по переменной t задаче.

3. Разрешимость краевых задач II и III .

Как и при доказательстве теоремы 2, выполним некоторые построения, сводящие краевую задачу II к задаче без интегральных слагаемых в граничных условиях, но для интегро-дифференциального уравнения.

Положим

$$h_2(t) = \beta_1(t) + \beta_2(t) - \alpha_1(t) - \alpha_2(t) - 1,$$

и пусть выполняется условие

$$h_2(t) \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T]. \tag{36}$$

Далее положим

$$h_{02}(t) = \frac{1}{h_2(t)}, \quad h_{12}(t) = \frac{\beta_1(t) + \beta_2(t) - 1}{h_2(t)},$$

$$g_{02}(t) = -\frac{1}{h_2(t)}, \quad g_{12}(t) = -\frac{\alpha_1(t) + \alpha_2(t)}{h_2(t)},$$

$$N_{12}(x,t) = h_{02}(t)K_1(x,t) + g_{02}(t)K_2(x,t),$$

$$N_{22}(x,t) = h_{12}(t)K_1(x,t) + g_{12}(t)K_2(x,t),$$

$$M_2(x,y,t) = xN_{12}(y,t) + N_{22}(y,t),$$

$$R_{12}(t) = 1 - \int\limits_{\Omega} xN_{12}(x,t)\,dx, \quad R_{22}(t) = -\int\limits_{\Omega} N_{12}(x,t)\,dx,$$

$$S_{12}(t) = -\int\limits_{\Omega} x N_{22}(x,t)\,dx, \quad S_{22}(t) = 1 - \int\limits_{\Omega} N_{22}(x,t)\,dx,$$

$$\Delta_2(t) = R_{12}(t)S_{22}(t) - R_{22}(t)S_{12}(t),$$

$$M_2^*(x,y,t) = \frac{1}{\Delta_2(t)}\{[xS_{22}(t) - S_{12}(t)]N_{12}(y,t) -$$

$$-[xR_{22}(t) - R_{12}(t)]N_{22}(y,t)\}.$$

Оператор M для краевой задачи II определим прежним способом, но с помощью функции $M_2(x,y,t)$; при выполнении условия

$$\Delta_2(t) \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T] \tag{37}$$

этот оператор будет обратим, и обратный оператор будет определяться равенствами

$$u(x,t) = w(x,t) + \int\limits_{\Omega} M_2^*(x,y,t)w(y,t)\,dy, \quad w(x,t) = (Mu)(x,t).$$

Наконец, определим функцию $\Psi_2(x,t,v)$ ($v = v(x,t)$ — заданная функция):

$$\Psi_2(x,t,v) = \int\limits_{\Omega} [M_{2xx}(x,y,t) - M_{2t}(x,y,t) - c(x,t)M_2(x,y,t) +$$

$$+c(y,t)M_2(x,y,t)]v(y,t)\,dy - \int\limits_{\Omega} M_2(x,y,t)v_{yy}(y,t)\,dy.$$

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* (34) — (37), *а также условия*

$$\alpha_1(t) \geq 0, \quad \beta_2(t) \leq 0, \quad \alpha_1(t)\beta_2(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t) \leq 0,$$

$$\alpha_1(t) - \alpha_2(t) \geq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T]; \tag{38}$$

$$\alpha_2(t) + \beta_1(t) \equiv 0. \tag{39}$$

Тогда краевая задача II имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in V_0$, $u(0,t) \in W_2^1([0,T])$, $u(1,t) \in W_2^1([0,T])$, $u_x(0,t) \in W_2^1([0,T])$, $u_x(1,t) \in W_2^1([0,T])$.

Доказательство. Пусть $g(x,t)$ есть заданная функция такая, что $g(x,t) \in L_2(Q)$, $g_t(x,t) \in L_2(Q)$, $g_{xt}(x,t) \in L_2(Q)$. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$w_t - w_{xx} + cw = g(x,t) + \Psi_2(x,t,M^{-1}w) \tag{1_2}$$

и такую, что для нее выполняются условие (2), а также условия

$$w(0,t) = \alpha_1(t)w_x(0,t) + \alpha_2(t)w_x(1,t), \quad 0 < t < T, \tag{5_2}$$

$$w(1,t) = \beta_1(t)w_x(0,t) + \beta_2(t)w_x(1,t), \quad 0 < t < T. \tag{6_2}$$

Разрешимость этой задачи докажем, используя метод регуляризации.

Пусть ε есть положительное число. Положим

$$\alpha_{1\varepsilon}(t) = \alpha_1(t) + \varepsilon, \quad \beta_{2\varepsilon}(t) = \beta_2(t) - \varepsilon.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (1_2) *и такую, что для нее выполняются условие* (2), *а также условия*

$$w(0,t) = \alpha_{1\varepsilon}(t)w_x(0,t) + \alpha_2(t)w_x(1,t), \quad 0 < t < T, \tag{$5_{2,\varepsilon}$}$$

$$w(1,t) = \beta_1(t)w_x(0,t) + \beta_{2\varepsilon}(t)w_x(1,t), \quad 0 < t < T. \tag{$6_{2,\varepsilon}$}$$

В данной задаче условия ($5_{2,\varepsilon}$), ($6_{2,\varepsilon}$) можно записать в виде

$$w_x(0,t) = \frac{\beta_{2\varepsilon}(t)}{\alpha_{1\varepsilon}(t)\beta_{2\varepsilon}(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)}w(0,t) - \frac{\alpha_2(t)}{\alpha_{1\varepsilon}(t)\beta_{2\varepsilon}(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)}w(1,t),$$

$$w_x(1,t) = -\frac{\beta_1(t)}{\alpha_{1\varepsilon}(t)\beta_{2\varepsilon}(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)}w(0,t) + \frac{\alpha_{1\varepsilon}(t)}{\alpha_{1\varepsilon}(t)\beta_{2\varepsilon}(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)}w(1,t).$$

Заметим, что вследствие (38) при $t \in [0,T]$ выполняется неравенство

$$\alpha_{1\varepsilon}(t)\beta_{2\varepsilon}(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t) \le -\varepsilon^2.$$

Следовательно, краевая задача (1_2), (2), ($5_{2,\varepsilon}$), ($6_{2,\varepsilon}$) является краевой задачей вида I, но для интегро-диференциального уравнения (1_2). Используя технику доказательства теорем 1 и 3 ($3'$), нетрудно установить, что при выполнении условий (34) — (38) краевая задача (1_2), (2), ($5_{2,\varepsilon}$), ($6_{2,\varepsilon}$) при фиксированном ε имеет решение $w_\varepsilon(x,t)$ такое, что $w_\varepsilon(x,t) \in V_0$, $w_{\varepsilon t}(x,t) \in V_0$, $w_\varepsilon(0,t) \in W_2^2([0,T])$, $w_\varepsilon(1,t) \in W_2^2([0,T])$. Покажем, что для семейства $\{w_\varepsilon(x,t)\}$ имеют место априорные оценки, которые позволят перейти к пределу в семействе задач (1_2), (2), ($5_{2,\varepsilon}$), ($6_{2,\varepsilon}$).

При выводе априорных оценок индекс «ε» у решений задачи (1_2), (2), ($5_{2,\varepsilon}$), ($6_{2,\varepsilon}$) будем опускать.

Уточним прежде всего, что имеет место равенство

$$\Psi_2(x,t,M^{-1}w) = \int\limits_\Omega M_0(x,y,t)w(y,t)\,dy +$$

$$+\int\limits_{\Omega} M_0(x,y,t)\left(\int\limits_{\Omega} M_2^*(y,z,t)w(z,t)\,dz\right)\,dy-$$

$$-\int\limits_{\Omega} M_2(x,y,t)\left(\int\limits_{\Omega} M_{2yy}^*(y,z,t)w(z,t)\,dz\right)\,dy+$$

$$+\int\limits_{\Omega} M_{2y}(x,y,t)w_y(y,t)\,dy - M_2(x,1,t)w_y(1,t) + M_2(x,0,t)w_y(0,t), \qquad (40)$$

функция $M_0(x,y,t)$ в котором определяется функциями $c(x,t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $K_i(x,t)$, $i=1,2$.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}(w_\tau - w_{xx} + cw)[\mu_1 w_\tau - (x-\frac{1}{2})w_x]\,dx\,d\tau =$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}(g+\Psi_2(x,\tau,M^{-1}w))[\mu_1 w_\tau - (x-\frac{1}{2})w_x]\,dx\,d\tau,$$

в котором μ_1 есть положительное число, значение которого будет уточнено ниже. Интегрируя по частям в этом равенстве, используя граничные условия и условие (39), нетрудно преобразовать его к виду

$$\mu_1\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} w_\tau^2\,dx\,d\tau + \frac{\mu_1}{2}\int\limits_{\Omega} w_x^2(x,t)\,dx + \frac{1}{4}\int\limits_0^t w_x^2(0,\tau)\,d\tau + \frac{1}{4}\int\limits_0^t w_x^2(1,\tau)\,d\tau +$$

$$+\frac{\mu_1}{2}\int\limits_0^t[\alpha_{1\varepsilon}(\tau)w_x^2(0,\tau) - \beta_{2\varepsilon}(\tau)w_x^2(1,\tau)]\,d\tau +$$

$$+\frac{\mu_1}{2}\alpha_{1\varepsilon}(t)w_x^2(0,t) + \mu_1\alpha_2(t)w_x(0,t)w_x(1,t) - \frac{\mu_1}{2}\beta_{2\varepsilon}(t)w_x^2(1,t) =$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\{(x-\frac{1}{2})w_x w_\tau - \mu_1 c w w_\tau + [g+\Psi_2(x,\tau,M^{-1}w)][\mu_1 w_\tau - (x-\frac{1}{2})w_x]\}\,dx\,d\tau +$$

$$+\mu_1\int\limits_0^t\{-\frac{1}{2}\alpha_1'(\tau)w_x^2(0,\tau) + \beta_1'(\tau)w_x(0,\tau)w_x(1,\tau) + \frac{1}{2}\beta_2'(\tau)w_x^2(1,\tau)\}\,d\tau. \qquad (41)$$

Заметим, что справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}\alpha_1(t)w_x^2(0,t)+\alpha_2(t)w_x(0,t)w_x(1,t)-\frac{1}{2}\beta_2(t)w_x^2(1,t)\geq 0.$$

Учитывая это неравенство, учитывая далее равенство (40), применяя неравенство Юнга (в правой части), подбирая число μ_1 малым (и фиксируя), наконец, используя лемму Гроноулла, получим, что следствием равенства (41) будет априорная оценка решений $w(x,t)$ краевой задачи (1_2), (2), $(5_{2,\varepsilon})$, $(6_{2,\varepsilon})$:

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega w_\tau^2\,dx\,d\tau+\int\limits_\Omega w_x^2(x,t)\,dx+\int\limits_0^t[w_x^2(0,\tau)+w_x^2(1,\tau)]\,d\tau\leq R_1\int\limits_Q g^2\,dx\,dt, \quad (42)$$

постоянная R_1 в которой определяется лишь функциями $c(x,t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_(t)$, $K_i(x,t)$, $i=1,2$, а также числом T.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega(w_{\tau\tau}-w_{xx\tau}+cw_\tau+c_\tau w)[\mu_2 w_{\tau\tau}-(x-\frac{1}{2})w_{x\tau}]\,dx\,d\tau=$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_\Omega[g_\tau+(\Phi_2(x,\tau,M^{-1}w))_\tau][\mu_2 w_{\tau\tau}-(x-\frac{1}{2})w_{x\tau}]\,dx\,d\tau,$$

в котором μ_2 есть положительное число, величина которого будет уточнена ниже. Повторяя выкладки, с помощью которых было доказано неравенство (42), подбирая число μ_2 малым, нетрудно вывести вторую априорную оценку решений краевой задачи (1_2), (2), $(5_{2,\varepsilon})$, $(6_{2,\varepsilon})$:

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega w_{\tau\tau}^2\,dx\,d\tau+\int\limits_\Omega w_{xt}^2(x,t)\,dx+\int\limits_0^t[w_{xt}^2(0,\tau)+w_{x\tau}^2(1,\tau)]\,d\tau\leq R_2\int\limits_Q g_t^2\,dx\,dt, \quad (43)$$

постоянная R_2 в которой определяется лишь функциями $c(x,t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $K_i(x,t)$, $i=1,2$, а также числом T.

Следующая оценка решений $w(x,t)$ краевой задачи (1_2), (2), $(5_{2,\varepsilon})$, $(6_{2,\varepsilon})$

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega w_{xx}^2\,dx\,d\tau\leq R_3\int\limits_Q(g^2+g_t^2)\,dx\,dt \quad (44)$$

очевидным образом вытекает из оценок (42), (43), а также из уравнения (1_2) (с учетом равенства (40)).

Оценок (42) — (44) уже вполне достаточно для осуществления процедуры предельного перехода. Именно, из этих оценок и из свойства рефлексивности пространства L_2 следует, что существуют последовательность $\{\varepsilon_n\}$ положительных чисел и функция $w(x,t)$ такие, что при $n \to \infty$ $\varepsilon_n \to 0$, $w_{\varepsilon_n}(x,t) \to w(x,t)$, $w_{\varepsilon_n t} \to w_t(x,t)$, $w_{\varepsilon_n xx}(x,t) \to w_{xx}(x,t)$ слабо в $L_2(Q)$, $w_{\varepsilon_n}(0,t) \to w(0,t)$, $w_{\varepsilon_n x}(0,t) \to w_x(0,t)$, $w_{\varepsilon_n}(1,t) \to w(1,t)$, $w_{\varepsilon_n t}(1,t) \to w_t(1,t)$ слабо в пространстве $L_2([0,T])$ (здесь $w_{\varepsilon_n}(x,t)$ — решение краевой задачи (1_2), (2), $(5_{\varepsilon_n,2})$, $(6_{\varepsilon_n,2})$). Из указанных сходимостей следует, что предельная функция $w(x,t)$ будет являться решением краевой задачи (1_2), (2), (5_2), (6_2), и что для нее будут выполняться включения $w(x,t) \in V_0$, $w(0,t) \in W_2^1([0,T])$, $w(1,t) \in W_2^1([0,T])$, $w_x(0,t) \in W_2^1([0,T])$, $w_x(1,t) \in W_2^1([0,T])$.

Определим функцию $u(x,t)$:

$$u(x,t) = w(x,t) + \int\limits_{\Omega} M_2^*(x,y,t)w(y,t)\,dy.$$

Очевидно, что для функции $u(x,t)$ сохранятся включения $u(x,t) \in V_0$, $u(0,t) \in W_2^1([0,T])$, $u(1,t) \in W_2^1([0,T])$, $u_x(0,t) \in W_2^1([0,T])$, $u_x(1,t) \in W_2^1([0,T])$. Если теперь выбрать функцию $g(x,t)$ специальным образом: $g(x,t) = (Mf)(x,t)$, то построенная по данной функции $g(x,t)$ функция $u(x,t)$ будет искомым решением краевой задачи II.

Теорема доказана.

Обратимся теперь к задаче III.

Положим

$$h_3(t) = [\alpha_2(t) - 1][\beta_1(t) - 1] - \alpha_1(t)[\beta_2(t) - 1],$$

и пусть выполняется условие

$$h_3(t) \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T]. \tag{45}$$

Далее положим

$$h_{03}(t) = \frac{1-\beta_1(t)}{h_3(t)}, \quad h_{13}(t) = \frac{\beta_2(t)-1}{h_3(t)},$$

$$g_{03}(t) = \frac{\alpha_1(t)}{h_3(t)}, \quad g_{13}(t) = \frac{1-\alpha_2(t)}{h_3(t)},$$

$$N_{13}(x,t) = h_{03}(t)K_1(x,t) + g_{03}(t)K_2(x,t),$$

$$N_{23}(x,t) = h_{13}(t)K_1(x,t) + g_{13}(t)K_2(x,t),$$

$$M_3(x,y,t) = xN_{13}(y,t) + N_{23}(y,t),$$

$$R_{13}(t) = 1 - \int\limits_\Omega x N_{13}(x,t)\,dx, \quad R_{23}(t) = -\int\limits_\Omega N_{13}(x,t)\,dx,$$

$$S_{13}(t) = -\int\limits_\Omega x N_{23}(x,t)\,dx, \quad S_{23}(t) = 1 - \int\limits_\Omega N_{23}(x,t)\,dx,$$

$$\Delta_3(t) = R_{13}(t)S_{23}(t) - R_{23}(t)S_{13}(t),$$

$$M_3^*(x,y,t) = \frac{1}{\Delta_3(t)}\{[xS_{23}(t) - S_{13}(t)]N_{13}(y,t) -$$

$$-[xR_{23}(t) - R_{13}(t)]N_{23}(y,t)\}.$$

Вновь определим оператор M — теперь с помощью ядра $M_3(x,y,t)$; при выполнении условия

$$\Delta_3(t) \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T] \tag{46}$$

этот оператор будет обратим, и обратный оператор будет определяться равенствами

$$u(x,t) = w(x,t) + \int\limits_\Omega M_3^*(x,y,t)w(y,t)\,dy, \quad w(x,t) = (Mu)(x,t).$$

Определим функцию $\Psi_3(x,t,v)$ ($v = v(x,t)$ — заданная функция):

$$\Psi_3(x,t,v) = \int\limits_\Omega [M_{3xx}(x,y,t) - M_{3t}(x,y,t) - c(x,t)M_3(x,y,t) +$$

$$+c(y,t)M_3(x,y,t)]v(y,t)\,dy - \int\limits_\Omega M_3(x,y,t)v_{yy}(y,t)\,dy.$$

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* (34), (35), (45) *и* (46), *а также условие*

$$\alpha_2(t) + 2\beta_2(t) + 1 \leq 0, \quad \beta_2(t) \leq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T].$$

Тогда краевая задача III имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in V_0$, $u(0,t) \in W_2^1([0,T])$, $u(1,t) \in W_2^1([0,T])$, $u_x(0,t) \in W_2^1([0,T])$, $u_x(1,t) \in W_2^1([0,T])$.

Доказательство. Пусть $g(x,t)$ есть заданная функция такая, что $g(x,t) \in L_2(Q)$, $g_t(x,t) \in L_2(Q)$, $g_{xt}(x,t) \in L_2(Q)$. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$w_t - w_{xx} + cw = g(x,t) + \Psi_3(x,t,M^{-1}w) \tag{1_3}$$

и такую, что для нее выполняются условие (2), *а также условия*

$$w_x(0,t) = \alpha_1(t)w(0,t) + \alpha_2(t)w_x(1,t), \quad 0 < t < T, \tag{7_3}$$

$$w_x(1,t) = \beta_1(t)w(0,t) + \beta_2(t)w_x(1,t), \quad 0 < t < T. \tag{8_3}$$

Разрешимость этой задачи докажем вновь с помощью метода регуляризации.

Пусть ε есть положительное число, $\beta_{2\varepsilon}(t)$ есть функция

$$\beta_{2\varepsilon}(t) = \beta_2(t) - \varepsilon.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (1_3) *и такую, что для нее выполняются условия (2) и* (7_3), *а также условие*

$$w(1,t) = \beta_1(t)w(0,t) + \beta_{2\varepsilon}(t)w_x(1,t), \quad 0 < t < T. \tag{$8_{3,\varepsilon}$}$$

В этой задаче условия (7_3) и ($8_{3,\varepsilon}$) представляют собой условия краевой задачи I для интегро-дифференциального уравнения (1_3); используя технику доказательства теорем 1 и 3 ($3'$), нетрудно установить, что при выполнении условий теоремы краевая задача (1_3), (2), (7_3), ($8_{3,\varepsilon}$) имеет решение $w_\varepsilon(x,t)$ такое, что $w_\varepsilon(x,t) \in V_0$, $w_{\varepsilon t}(x,t) \in V_0$, $w_\varepsilon(0,t) \in W_2^2([0,T])$, $w_\varepsilon(1,t) \in W_2^2([0,T])$. Для семейства $\{w_\varepsilon(x,t)\}$ имеют место априорные оценки (42) — (44), что устанавливается дословным повторением доказательства этих же оценок для решений краевой задачи (1_2), (2), ($5_{2,\varepsilon}$), ($6_{2,\varepsilon}$). Осуществляя далее процедуру предельного перехода аналогичную использованной при доказательстве теоремы 4, получаем существование решения $w(x,t)$ краевой задачи (1_3), (2), (7_3), (8_3) такого, что $w(x,t) \in V_0$, $w(0,t) \in W_2^1([0,T])$, $w(1,t) \in W_2^1([0,T])$, $w_x(0,t) \in W_2^1([0,T])$, $w_x(1,t) \in W_2^1([0,T])$; определяя же функцию $u(x,t)$ равенством

$$u(x,t) = w(x,t) + \int\limits_\Omega M_3^*(x,y,t)w(y,t)\,dy,$$

получаем существование решения $u(x,t)$ краевой задачи III из требуемого класса.

Теорема доказана.

4. Нелокальная краевая задача с интегральными условиями.

Сделаем два предварительных замечания.

Прежде всего отметим, что функции $N_1(x,t)$ и $N_2(x,t)$ обязаны быть линейно независимыми на множестве Q, и в дальнейшем это будет отражено в соответствующих условиях.

Далее, в отличие от задач I — III задача (1), (2), (9) названа не «краевой», а «нелокальной». Строго говоря, в условиях (9) граница («край») не участвует; кроме того, если задачи I — III в частных случаях превращаются в классические первую, вторую или смешанную начально-краевые задачи для параболического уравнения, то задача (1), (2), (9) ни при каких функциях $N_i(x,t)$ не совпадает с классическими задачами и всегда является нелокальной.

Положим

$$K_i(x,t) = N_i(x,t)c(x,t) - N_{ixx}(x,t) - N_{it}(x,t), \quad i = 1,2.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в прямоугольнике* Q *решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условие* (2), *а также условия*

$$N_i(0,t)u_x(0,t) - N_i(1,t)u_x(1,t) + N_{ix}(1,t)u(1,t) - N_{ix}(0,t)u(0,t)+$$
$$+\int\limits_\Omega K_i(x,t)u(x,t)\,dx = 0, \quad i = 1,2, \quad 0 < t < T. \tag{47}$$

Утверждение. *Пусть функция* $f(x,t)$ *такова, что выполняются условия*

$$\int\limits_\Omega N_i(x,t)f(x,t)\,dx = 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T], \quad i = 1,2. \tag{48}$$

Тогда на классе решений из пространства $W_2^{2,1}(Q)$ *задачи* (1), (2), (9) *и* (1), (2), (47) *эквивалентны.*

Доказательство. Пусть функция $u(x,t)$ является решением задачи (1), (2), (9) из пространства $W_2^{2,1}(Q)$. Умножая уравнение (1) последовательно на функции $N_1(x,t)$ и $N_2(x,t)$, интегрируя по интервалу Ω и используя условия (48), получаем, что для функции $u(x,t)$ будут выполняться условия (47). Следовательно, функция $u(x,t)$ будет решением краевой задачи (1), (2), (47).

Обратно, пусть функция $u(x,t)$ является решением краевой задачи (1), (2), (47), принадлежащим пространству $W_2^{2,1}(Q)$. Интегрируя по частям в слагаемых левой части равенств (47), соответствующих функциям $N_{ixx}(x,t)$, получим равенства

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int\limits_\Omega N_i(x,t)u(x,t)\,dx\right] = 0, \quad i = 1,2.$$

Из этих равенств и из условия (2) следует, что для функции $u(x,t)$ выполняются условия (9).

Утверждение доказано.

Пусть выполняется одно из условий

$$N_1(0,t)N_2(1,t) - N_1(1,t)N_2(0,t) \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T]; \tag{49}$$

$$N_{1x}(0,t)N_{2x}(1,t) - N_{1x}(1,t)N_{2x}(0,t) \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T]; \tag{50}$$

$$N_1(0,t)N_{2x}(1,t) - N_{1x}(1,t)N_2(0,t) \neq 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T]. \tag{51}$$

Разрешая соотношения (47) относительно $u_x(0,t)$ и $u_x(1,t)$ при выполнении условия (49) , относительно $u(0,t)$ и $u(1,t)$ при выполнении условия (50), относительно $u_x(0,t)$ и $u(1,t)$ при выполнении условия (51), получаем, что краевая задача (1), (2), (47) и при выполнении условий (48) нелокальная задача (1), (2), (9) эквивалентны краевым задачам I, II или III соответственно. Имея теперь условия разрешимости краевых задач I, II или III, приведенные в теоремах 2, 4 и 5, автоматически получаем условия разрешимости нелокальной задачи (1), (2), (9).

5. Комментарии и дополнения.

1. Все полученные выше результаты справедливы и для более общих параболических уравнений вида

$$u_t - a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u = f(x,t)$$

при выполнении условия

$$a(x,t) \geq a_0 > 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \overline{Q}$$

и необходимых условий гладкости.

2. При выполнении условий теорем 1, 2, 4 и 5 для краевых задач I — III имеет место *единственность* решений. Далее, единственность имеет место и для нелокальной задачи с интегральными условиями — при выполнении одного из условий (49), (50) или (51), а также условий соответствующих теорем разрешимости краевых задач вида I — III, эквивалентных задаче с интегральными условиями.

3. Теоремы разрешимости для задач II и III нетрудно доказать при выполнении условия типа (15). Однако поскольку такое условие должно выполняться для регуляризованной задачи, то проверка его в реальной ситуации представляется (автору) затруднительной. Именно поэтому был выбран «обходной» путь, связанный с расщеплением задач I — III.

4. Наличие в условиях (3) — (10) свободных членов не влияет на разрешимость соответствующих задач.

5. Условие (2) с нулевой начальной функцией, условие $f(x,0) \equiv 0$ теорем 4 и 5 не является необходимым.

6. Условие $f_{xt}(x,t) \in L_2(Q)$ теорем 4 и 5 не является необходимым, поскольку для справедливости оценок (42) — (44) оно не нужно. Приближая функцию $f(x,t)$ гладкими (например) функциями, используя для гладких приближений теоремы 3 или $3'$, получая далее оценки (42) — (44), переходя к пределу по параметру ε, а потом по параметру сглаживания функции $f(x,t)$, получим, что разрешимость задач II и III имеет место лишь *при условии* $f(x,t) \in W_2^1(Q)$.

1. *Skubachevskii, A.L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Operator Theory. Advances and Applications. Vol. 91. Birkhäuser Verlag, 1997.

2. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
3. *Самарский А.А.* О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, 1980, Т. 16, № 11. С. 1925-1935.
4. *Lažetic, N.L.* On classical solutions of mixed boundary problems for one dimensional parabolic equation of second order // Publ. de l'Institut mathematique-Nouvelle serie, 2000, V. 67(81). P. 53-75.
5. *Мокин А.Ю.* Об одном семействе начально-краевых задач для уравнения теплопроводности // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 1. С. 123-137.
6. *Кожанов А.И.* О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия, 2008, № 3(62). С. 165-174.
7. *Cannon, J.R.* The Solution of the Heat Equation Subject to the Specification of Energy // Quart. Appl. Math. 1963, V. 21. P. 155-160.
8. *Камынин Л.И.* Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1964. Т. 4, № 6. С. 1006-1024.
9. *Fridman, A.* Monotonic decay of solutions of parabolic equation with nonlocal boundary conditions // Quaterly of Applied Mathematics. 1986. V. XLIV, № 3. P. 401-407.
10. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294-304.
11. *Муравей Л.А., Филиновский А.В.* Об одной задаче с нелокальным граничным условием для параболического уравнения // Мат. заметки. 1993. Т. 54, № 4. С. 98-116.
12. *Bouziani A.* On a class of parabolic equations with a nonlocal boundary condition // Bulletin de la Classe des Sciences. Academie Royail de Belgique. 1996. 6^e serie. T. X. P. 61-77.
13. *Пулькина Л.С.* Нелокальная задача для уравнения теплопроводности // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН. 2005. С. 231-239.
14. *Абдрахманов А.М., Кожанов А.И.* Задача с нелокальным граничным условием для одного класса уравнений нечетного порядка // Известия вузов. Математика. 2007. № 5. С. 3-12.
15. *Кожанов А.И., Пулькина Л.С.* О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений // Математический журнал (Казахстан). 2009. Т. 9, № 2. С. 78-92.
16. *Абдрахманов А.М.* О разрешимости краевой задачи с интегральным граничным условием второго рода для уравнений нечетного порядка // Математические заметки. 2010. Т. 88, Вып. 2. С. 163-170.
17. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
18. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия
kozhanov@math.nsc.ru

Получено 14.12.10