 І. Д. Пукальський

НЕЛОКАЛЬНА ПАРАБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ТА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Досліджується задача про вибір оптимального керування системами, що описуються параболічною крайовою задачею з інтегральною нелокальною умовою за часовою змінною і обмеженим внутрішнім керуванням. Функціонал якості визначено об'ємним інтегралом.

Ключевые слова: крайова задача, функція Гріна, нелокальна умова, оптимальне керування, функціонал якості
MSC (2000): 93C20, 93C23, 35K40, 35K60

1. Постановка задачі та основні обмеження.

Нехай D – обмежена випукла область в $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D. В області $Q = (0, T] \times D$ розглянемо задачу знаходження функцій (u, p), на яких функціонал

$$I(p) = \int_0^T dt \int_D \mathcal{F}(t, x; \overrightarrow{u}) dx \tag{1}$$

досягає мінімуму в класі функцій $p(t, x) \in V = \{p(t, x), p(t, x) \in C^\alpha(Q), \psi_1(t, x) \leq p(t, x) \leq \psi_2(t, x)\}$, із яких $u(t, x, p)$ є розв'язком рівномірно параболічної нелокальної крайової задачі

$$(Lu)(t, x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{|k| \leq 2b} A_k(t, x) \partial_x^k\right] u = f_0(t, x, p), \tag{2}$$

$$u(0, x, p) + \int_0^T \sum_{|k| \leq 2b-1} a_k(\tau, x) \partial_x^k u(\tau, x, p) d\tau = \varphi(x), \tag{3}$$

$$(B_i u)(t, x)|_\Gamma = \left[\sum_{|k| \leq r_i} b_k^{(i)}(t, x) \partial_x^k\right] u \Big|_\Gamma = f_i(t, x), \tag{4}$$

де

$$\Gamma = (0, T] \times \partial D, \ r_i \leq 2b - 1, \ i \in \{1, \dots, b\},$$

$$\overrightarrow{u} = (u, \partial_x u, \dots \partial_x^{2b-1} u, p) = (u_0, u_1, \dots, u_{2b}),$$

$$\partial_x^k = \partial_{x_1}^{k_1} \dots \partial_{x_n}^{k_n}, \ |k| = k_1 + \dots + k_n.$$

Нехай виконуються такі умови:

(а) крайова задача

$$(Lu)(t,x) = g_0(t,x), \quad u(0,x) = \varphi(x), \quad B_i u|_\Gamma = f_i(t,x) \tag{5}$$

є параболічною [2] і $A_k(t,x) \in C^\alpha(Q)$, $b_k^{(i)}(t,x) \in C^{2b-r_i+\alpha}(\Gamma)$, $\partial D \in C^{2b+\alpha}$, $a_k(\tau,x) \in C(Q)$;

(б) $\varphi(x) \in C^{2b+\alpha}(D)$, $f_i(t,x) \in C^{2b-r_i+\alpha}(\Gamma)$, $\psi_1(t,x) \in C^\alpha(Q)$, $\psi_2(t,x) \in C^\alpha(Q)$;

(в) функції $f_0(t,x,p)$, $\mathcal{F}(t,x,\overrightarrow{u})$, як функції від (t,x) належать до простору $C^\alpha(Q)$ і мають гельдерові похідні другого порядку за p і $\overrightarrow{u}$, гельдерові як функції від (t,x).

Розглянемо нелокальну крайову задачу

$$(Lu)(t,x) = g_0(t,x), \quad B_i u|_\Gamma = f_i(t,x), \tag{6}$$

$$u(0,x) + \int_0^T \sum_{|k|\le 2b-1} a_k(\tau,x)\partial_x^k u(\tau,x)d\tau = \varphi(x).$$

Нехай $G_0(t,x,\tau,\xi)$ – функції Гріна однорідної крайової задачі

$$(Lu)(t,x) = g_0(t,x), \quad u(0,x) = \varphi_0(x), \quad B_i u|_\Gamma = 0 \tag{7}$$

побудована в [2]. Позначимо

$$r(x) = \int_0^T d\tau \int_D \left| \sum_{|k|\le 2b-1} a_k(\tau,x)\partial_x^k G_0(\tau,x,0,\xi) \right| d\xi.$$

Правильна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (а), (б), $g_0(t,x) \in C^\alpha(Q)$, $r(x) \le K_0 <$ 1. Тоді існує розв'язок задачі (6) і для нього справедлива оцінка*

$$\left| t^{\frac{|k|}{2b}} \partial_x^k u \right| \le cB(\varphi, g_0, f), \tag{8}$$

де $B(\varphi,g_0,f) = |\varphi|_{C^{2b+\alpha}(D)} + |g_0|_{C^\alpha(Q)} + \sum_{i=1}^b |f_i|_{C^{2b-r_i+\alpha}(\Gamma)}$, *а c залежить від T, K_0 і норм коефіцієнтів операторів L, B_i, $i \in \{1,\dots,b\}$.*

Доведення. Розв'язок задачі (6) шукаємо у вигляді

$$u(t,x) = \int_D G_0(t,x,0,\xi)u(0,\xi)d\xi + v(t,x), \tag{9}$$

де $v(t,x)$ – розв'язок крайової задачі (5).

Згідно з теоремою 1 з праці [2] для $v(t,x)$ справедлива оцінка

$$|v|_{C^{2b+\alpha}(Q)} \leq cB(\varphi, g_0, f). \tag{10}$$

Задовольнивши нелокальну умову у задачі (6), матимемо

$$u(0,x) = -\int_0^T d\tau \int_D \sum_{|k|\leq 2b-1} a_k(\tau,x)\partial_x^k G_0(\tau,x,0,\xi)u(0,\xi)d\xi + F_1(x), \tag{11}$$

де $F_1(x) \equiv -\int\limits_0^T \sum\limits_{|k|\leq 2b-1} a_k(\tau,x)\partial_x^k v(\tau,x)d\tau.$

Враховуючи обмеження $K_0 < 1$ на функцію $r(x)$, визначаємо розв'язок інтегрального рівняння (11) у вигляді

$$u(0,x) = F_1(x) + \int_D \Phi(x,\xi)F_1(\xi)d\xi, \tag{12}$$

де $\Phi(x,\xi)$ – резольвента, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$\Phi(x,\xi) = \int_0^T \sum_{|k|\leq 2b-1} a_k(\tau,x)\partial_x^k G_0(\tau,x,0,\xi)d\tau +$$

$$+\int_0^T d\tau \int_D \sum_{|k|\leq 2b-1} a_k(\tau,x)\partial_x^k G_0(\tau,x,0,y)\Phi(y,\xi)dy, \tag{13}$$

звідки отримуємо оцінку

$$\left|\int_D \Phi(x,\xi)d\xi\right| \leq \frac{K_0}{1-K_0}. \tag{14}$$

Отже, з урахуванням (14) для розв'язку інтегрального рівняння (11) справедлива оцінка

$$|u(0,x)| \leq c|F_1|_{C(Q)}. \tag{15}$$

Підставляючи (12) у (9) і враховуючи нерівність (15) і оцінки функції Гріна $G_0(t,x,\tau,\xi)$, отримаємо, що

$$\left|t^{\frac{|k|}{2b}}\partial_x^k u\right| \leq cB(\varphi, g_0, f), \quad |k| \leq 2b.$$

Теорема 2. *Нехай виконані умови теореми 1, $f_i(t,x)=0$. Тоді існує функція Гріна (G_0,E_0) однорідної крайової задачі (6) і справедлива формула*

$$u(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D G_0(t,x,\beta,y)g_0(\beta,y)dy+\int\limits_D G_0(t,x,0,y)\varphi(y)dy+$$

$$+\int\limits_0^T d\beta\int\limits_D E_0(t,x,\beta,\xi)g_0(\beta,\xi)d\xi+\int\limits_D E_0(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)d\xi. \qquad (16)$$

Доведення. Підставляючи у (12) замість $F_1(x)$ значення

$$F_1(x)=\int\limits_0^T\sum_{|k|\le 2b-1}a_k(\tau,x)\Bigg[\int\limits_0^\tau d\beta\int\limits_D \partial_x^k G_0(t,x,\beta,\xi)g_0(\beta,\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_D \partial_x^k G_0(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)d\xi\Bigg]d\tau$$

і змінюючи порядок інтегрування, отримуємо

$$u(0,x)=\int\limits_0^T d\beta\int\limits_D \Gamma_0(T,x,\beta,y)g_0(\beta,y)dy+\int\limits_D \Gamma_0(T,x,0,y)\varphi(y)dy,$$

де

$$\Gamma_0(T,x,\beta,y)=\int\limits_\beta^T\Bigg[\sum_{|k|\le 2b-1}a_k(\tau,x)\partial_x^k G_0(\tau,x,0,\xi)+$$

$$+\int\limits_D\sum_{|k|\le 2b-1}\Phi(x,y)a_k(\tau,y)\partial_y^k G_0(\tau,y,0,\xi)d\xi\Bigg]d\tau.$$

Підставляючи значення $u(0,x)$ у поверхневий інтеграл рівності (9), одержимо зображення (16), де

$$E_0(t,x,\beta,\xi)=\int\limits_D G_0(t,x,0,y)\Gamma_0(T,y,\beta,\xi)dy.$$

Зауваження 1. Нехай виконані умови (a), $\varphi\in C^\alpha(D)$, $g_0\in C^\alpha(Q)$, $f_i=0$. Тоді класичний розв'зок однорідної задачі (6) задовольняє нерівність

$$|\partial_x^k u|\le cQ_k(t,\rho(x,\partial D))(|\varphi|_{C^\alpha(D)}+|g_0|_{C^\alpha(Q)}), \qquad (17)$$

де $Q_{2b}(t,p) = t^{-1+\frac{1}{2b}}(t^{-\frac{1}{2b}}+\rho^{-1})$, $Q_{2b-1} = t^{-1+\frac{1}{2b}} \ln \dfrac{1}{\rho}$, $Q_k(t,p) = t^{-\frac{|k|}{2b}}$, $|k| < 2b-1$, $\rho(x, \partial D)$ – відстань від точки x до межі ∂D.

Оцінка (17) одержується із формули (9) за допомогою оцінок функції Гріна $G_0(t,x,\tau,\xi)$ [2].

2. Задача оптимального керування.

Позначимо через

$$\lambda(t,x) = \int\limits_t^T d\beta \int\limits_D \sum_{j=0}^{2b-1} \partial_{u_j} \mathcal{F}(\beta, y, \overrightarrow{u}) \partial_y^j G_0(\beta,y,t,x)dy +$$

$$+ \int\limits_0^T d\beta \int\limits_D \sum_{j=0}^{2b-1} \partial_{u_j} \mathcal{F}(\beta, y, \overrightarrow{u}) \partial_y^j E_0(\beta,y,t,x)dy,$$

$$H(\overrightarrow{u}, \lambda) = \mathcal{F}(t,x,\overrightarrow{u}) + \lambda(t,x) f_0(t,x,u_{2b}).$$

Сформулюємо необхідні та достатні умови оптимальності розв'язку задачі (1) – (4).

Теорема 3. *Якщо функція $H(\overrightarrow{u}, \lambda)$ є монотонно зростаючою за аргументом u_{2b} для $u_{2b} \in V$, то оптимальним є керування $u_{2b}^{(0)} = \psi_1(t,x)$, а оптимальним розв'язком задачі (2) – (4) є $u^{(0)}(t,x,p) \equiv u(t,x,\psi_1(t,x))$.*

Якщо функція $H(\overrightarrow{u}, \lambda)$ є монотонно спадною за аргументом $u_{2b} \in V$, то оптимальним є керування $u_{2b}^{(0)} = \psi_2(t,x)$, а оптимальним розв'язком задачі (2) – (4) є $u^{(0)}(t,x,p) = u(t,x,\psi_2(t,x))$.

Доведення. Нехай Δu_{2b} – деякий допустимий приріст керування $u_{2b}^{(0)}$. Позначимо через Δu_j відповідні прирости функцій $u_j(t,x,u_{2b}^{(0)})$, $j \in \{0,1,\ldots,2b-1\}$. Тоді Δu_0 в області Q буде розв'язком крайової задачі

$$(L\Delta u_0)(t,x) = f_0(t,x,u_{2b}^{(0)} + \Delta u_{2b}) - f_0(t,x,u_{2b}^{(0)}) \equiv \Delta f_0(t,x),$$

$$\Delta u_0(0,x) + \int\limits_0^T \sum_{|k| \le 2b-1} a_k(\tau,x) \partial_x^k \Delta u_0(\tau,x) d\tau = 0, \tag{18}$$

$$(B_i \Delta u_0)(t,x)|_\Gamma = 0.$$

За допомогою формули Тейлора знаходимо приріст функціонала $I(p)$:

$$\Delta I(p) = \int\limits_0^T dt \int\limits_D \sum_{j=0}^{2b} \partial_{u_j} \mathcal{F}(t,x,\overrightarrow{\omega}) \Delta u_j dx, \tag{19}$$

де $\omega_j \in [u_j, u_j + \Delta u_j]$, $j \in \{0, \dots, 2b\}$.

Оскільки Δu_0 – розв'зок задачі (18), то використовуючи формулу (16), маємо

$$\Delta u_i = \int_0^t d\tau \int_D \partial_x^i G_0(t,x,\beta,y)\Delta f_0(\tau,y)dy+$$

$$+\int_0^T d\beta \int_D \partial_x^i E_0(t,x,\beta,y)\Delta f_0(\beta,y)dy, \tag{20}$$

$i \in \{0, 1, \dots, 2b-1\}$.

Підставляючи (20) у (19) і змінюючи порядок інтегрування, знаходимо

$$\Delta I(p) = \int_0^T d\beta \int_D \left[\partial_{u_{2b}} H(\overrightarrow{u},\lambda)\Delta u_{2b} + O(|\Delta u|^2)\right]dx. \tag{21}$$

Якщо $u_{2b}^{(0)}$ і $H(\overrightarrow{u},\lambda)$ задовольняють умови теореми 3, то при досить малих Δu_{2b} маємо, що $\Delta I > 0$.

Нехай $u_{2b}^{(0)}$ – оптимальне значення, тобто $\Delta I > 0$. Перевіримо виконання умов теореми 3. Якщо $H(\overrightarrow{u},\lambda)$ не є монотонною за аргументом u_{2b}, то $\partial_{u_{2b}} H(\overrightarrow{u},\lambda)$ – знакозмінна величина, тобто $\partial_{u_{2b}} H(\overrightarrow{u},\lambda) > 0$ в $Q^+ \subset Q$ і $\partial_{u_{2b}} H(\overrightarrow{u},\lambda) < 0$ в $Q^- = Q \setminus Q^+$. Використовуючи теорему про середнє значення, маємо

$$\Delta I = \iint_{Q^+} \partial_{u_{2b}} H(\overrightarrow{u},\lambda)\Delta u_{2b} dxdt - \iint_{Q^-} |\partial_{u_{2b}} H(\overrightarrow{u},\lambda)|\Delta u_{2b} dxdt+$$

$$+\iint_{Q} O(|\Delta u|^2)dxdt = \partial_{u_{2b}} H(\overrightarrow{u}^+,\lambda^+)\iint_{Q^+} \Delta u_{2b} dxdt-$$

$$-|\partial_{u_{2b}} H(\overrightarrow{u}^-,\lambda^-)|\iint_{Q^-} \Delta u_{2b} dxdt + \iint_{Q} O(|\Delta u|^2)dxdt.$$

При досить малому Δu_{2b} знак ΔI визначається першими двома доданками суми. Різниця перших двох членів змінює знак залежно від величини $\mathrm{mes}Q^+$, $\mathrm{mes}Q^-$, Δu_{2b}. При досить малих $\mathrm{mes}Q^+$ і $\Delta u_{2b} > 0$ маємо $\Delta I < 0$ і, навпаки, $\Delta I > 0$, якщо мала $\mathrm{mes}Q^-$ і $\Delta г_{2b} < 0$. Отже, функціонал не досягає мінімуму.

Теорема 4. *Нехай $H(\overrightarrow{u},\lambda)$ не є монотонною функцією за аргументом u_{2b}. Для того, щоб керування $u_{2b}^{(0)}$ і відповідний розв'язок $u_0(t,x;u_{2b}^{(0)})$ крайової задачі (2) – (4) були оптимальними, необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови:*

A) функція $H(\overrightarrow{u},\lambda)$ за аргументом u_{2b} досягає в точці $u_{2b}^{(0)}$ мінімального значення;

B) для довільного вектора $\overrightarrow{\nu}=(\nu_0,\dots,\nu_{2b})\neq 0$ і $(t,x)\in Q$ виконується нерівність

$$\mathcal{K}_1(t,x;\nu)=\sum_{ij=1}^{2b}\partial^2_{u_iu_j}\mathcal{F}(t,x,\overrightarrow{u})\nu_i\nu_j-\lambda(t,x)\partial^2_{u_{2b}}f_0(t,x,u_{2b}^{(0)})\nu_{2b}^2>0.$$

Доведення. Достатність. Нехай u_{2b}^0 задовольняє умови теореми 4, покажемо його оптимальність. Надамо керуванню u_{2b}^0 деякого допустимого приросту Δu_{2b} і позначимо через Δu_j відповідні прирости функцій $u_j(t,x,u_{2b}^{(0)})$. Тоді Δu_0 в області Q буде розв'язком задачі (18).

За допомогою формули Тейлора знаходимо приріст функціоналу $I(p)$:

$$\Delta I=\int_0^T dt\int_D\Bigg[\sum_{j=0}^{2b}\partial_{u_j}\mathcal{F}(t,x,\overrightarrow{u}^{(0)})\Delta u_j+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{ij=0}^{2b}\partial^2_{u_iu_j}\mathcal{F}(t,x,\overrightarrow{u}^{(0)})\Delta u_i\Delta u_j+O(|\Delta u|)^{2+\alpha}\Bigg]dx. \tag{22}$$

Підставляючи (20) у (22) і змінюючи порядок інтегрування, одержуємо, що

$$\Delta I=\int_0^T dt\int_D\left[\partial_{u_{2b}}H(\overrightarrow{u}^{(0)},\lambda)\Delta u_{2b}+\frac{1}{2}\mathcal{K}(t,x;\Delta\overrightarrow{u})+O(|\Delta u|)^{2+\alpha}\right]dx.$$

Оцінимо ΔI знизу, враховуючи, що $\partial_{u_{2b}}H(\overrightarrow{u}^{(0)},\lambda)=0$ за умовою A) теореми 4. Позначимо $\delta=\inf\limits_{|\xi|=1}\mathcal{K}(t,x;\overrightarrow{\xi})$. За умовою B) маємо, що $\delta>0$ для всіх $(t,x)\in\overline{Q}$. Тоді, очевидно

$$\mathcal{K}(t,x;\Delta\overrightarrow{u}^{(0)})\geq\delta(|\Delta u|^2).$$

Отже,

$$\Delta I\geq\frac{1}{2}\int_0^T dt\int_D(\delta+O(|\Delta u|^\alpha))|\Delta u|^2dx.$$

Враховуючи співвідношення (20), маємо, що $\Delta\overrightarrow{u}\to 0$ при $\Delta u_{2b}\to 0$. Тому при досить малих Δu_{2b} таких, що

$$O(|\Delta u|^\alpha)\leq\frac{1}{2}\delta,$$

одержуємо оцінку

$$\Delta I \geq \frac{1}{4}\int\limits_0^T dt \int\limits_D \delta|\Delta u|^2 dx > 0.$$

Необхідність. Нехай u_{2b}^0 – оптимальне, тобто $\Delta I(u_{2b}^0) > 0$. Перевіримо виконання умов A), B) теореми. Нехай $\partial_{u_{2b}} H(\overrightarrow{u}, \lambda) \neq 0$. Тоді вибираючи досить малі різні за знаком на області Q прирости Δu_{2b}, із формули (21) одержуємо, що ΔI змінює знак в залежності від знаку Δu_{2b}. Це суперечить наявності мінімуму функціонала $I(p)$ у точці u_{2b}^0. Отже, $\partial_{u_{2b}} H(\overrightarrow{u}^{(0)}, \lambda) = 0$.

Визначимо знак функції $\partial_{u_{2b}} H(\overrightarrow{u}, \lambda)$ в околі $u_{2b}^{(0)}$. Запишемо приріст ΔI у вигляді

$$\Delta I = \int\limits_0^T dt \int\limits_D \left[\partial_{u_{2b}} H(u_0^{(0)}, \ldots, u_{2b-1}^{(0)}, u_{2b}^{(0)} + \mu \Delta u_{2b}, \lambda)\Delta u_{2b} + O(|\Delta u|^2)\right] dx,$$

$\mu \in (0, 1)$.

При досить малих Δu_{2b} із умови $\Delta I > 0$ випливає, що

$$\partial_{u_{2b}} H(u_0^{(0)}, \ldots, u_{2b-1}^{(0)}, u_{2b}^{(0)} + \mu \Delta u_{2b}, \lambda)\Delta u_{2b} > 0,$$

тобто $\partial_{u_{2b}} H < 0$ при $u_{2b} < u_{2b}^{(0)}$ і $\partial_{u_{2b}} H > 0$ при $u_{2b} > u_{2b}^{(0)}$. Тому в точці u_{2b}^0 функція $H(\overrightarrow{u}^{(0)}, \lambda)$ досягає мінімуму.

Якщо $\mathcal{K}(t, x, \Delta\overrightarrow{u}) \leq 0$ в області Q, то з урахуванням умови A) одержимо $\Delta I \leq 0$, що неможливо.

Нехай $\mathcal{K}(t, x, \Delta\overrightarrow{u}) > 0$ в області Q^+ і $\mathcal{K}(t, x, \Delta\overrightarrow{u}) < 0$ в області $Q^- = Q \setminus Q^+$. Враховуючи теорему про середнє для приросту ΔI, маємо

$$\Delta I = \mathcal{K}(t^+, x^+, \Delta\overrightarrow{u}^+)\mathrm{mes}Q^+ - |\mathcal{K}(t^-, x^-, \Delta\overrightarrow{u}^-)|\mathrm{mes}Q^- +$$

$$+ \int\limits_0^T dt \int\limits_D O(|\Delta u|^{2+\alpha}) dx,$$

де $(t^\pm, x^\pm) \in Q^\pm$.

При досить малих Δu_{2b} знак ΔI визначається першими двома членами суми. Різниця цих членів змінює знак залежно від величини значень $\mathrm{mes}Q^\pm$.

Отже, при знакозмінній $\mathcal{K}(t, x; \Delta\overrightarrow{u})$ функціонал $I(p)$ не досягає мінімуму.

Існування $(u_0^{(0)}, u_{2b}^{(0)})$ встановлюється наступним чином. Нехай $u_{2b}^{(0)}$ – оптимальне керування. Тоді $\partial_{u_{2b}} H(\overrightarrow{u}^{(0)}, \lambda) = 0$ і $\partial_{u_{2b}}^2 H(\overrightarrow{u}^{(0)}, \lambda) > 0$. Застосовуючи теореми про неявну функцію [1] до рівняння $\partial_{u_{2b}} H(\overrightarrow{u}^{(0)}, \lambda) = 0$, одержуємо

$$p^{(0)} \equiv u_{2b}^{(0)} = W(u_0, u_1^{(0)}, u_{2b-1}^{(0)}, \lambda).$$

Використовуючи формулу (16), поставимо у відповідність задачі (1) – (4) систему інтегральних рівнянь

$$u_j^{(0)}(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D \partial_x^j G_0(t,x,\tau,\xi) f_0(\tau,\xi,W(u_0^{(0)},u_1^{(0)},\ldots,u_{2b-1}^{(0)},\lambda))d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D \partial_x^j E_0(t,x,\tau,\xi) f_0(\tau,\xi,W(u_0^{(0)},u_1^{(0)},\ldots,u_{2b-1}^{(0)},\lambda))d\xi +$$

$$+ \int\limits_D \partial_x^j G_0(t,x,0,\xi) \left[\varphi(\xi) - \int\limits_0^T \sum_{|k|\leq 2b-1} a_k(\beta,\xi) u_k^0(\beta,\xi) d\beta\right] d\xi + \partial_x^j \omega(t,x),$$

$$\lambda(t,x) = \int\limits_t^T d\beta \int\limits_D \sum_{j=0}^{2b-1} \partial_{u_j}\mathcal{F}(\beta,y,\overrightarrow{u}^0)\partial_y^j G_0(\beta,y,t,x)dy +$$

$$+ \int\limits_0^T d\beta \int\limits_D \sum_{j=0}^{2b-1} \partial_{u_j}\mathcal{F}(\beta,y,\overrightarrow{u})\partial_y^j E_0(\beta,y,t,x)dy, \qquad (23)$$

де $\omega(t,x)$ є розв'язком крайової задачі

$$(L\omega)(t,x) = 0, \quad \omega(0,x) = 0, \quad B_i\omega|_\Gamma = f_i(t,x).$$

Розв'язок системи (23) знаходимо методом послідовних наближень.

1. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 429 с.
2. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – К.: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
3. *Пукальський І.Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями: – Чернівці, 2008. – 253 с.
4. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.

Кафедра диференціальних рівнянь,
Чернівецький національний університет

Отримано 1.09.2008