 С. П. Дегтярев

ОБ ОДНОЙ МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ И КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе рассмотрена задача со свободной границей для общего квазилинейного параболического уравнения второго порядка с разрывными коэффициентами и правой частью. Источником такой задачи являются некоторые математические модели горения в пористой среде. Доказано наличие гладкого интерфейса в задаче и гладкость самого решения.

Ключевые слова: задача со свободной границей, квазилинейные уравнения с разрывными коэффициентами
MSC (2000): 35R35; 35K65

1. Постановка задачи и основной результат.

Рассмотрим двухсвязную область Ω в R^N с границей состоящей из двух замкнутых связных непересекающихся поверхностей Γ^+ и Γ^-, $\partial\Omega = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$, таких, что $\Gamma^\pm \in H^{4+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$. В данной работе мы пользуемся стандартными пространствами Гельдера H^l, $H^{l,\frac{l}{2}}$ из [1], а также стандартным определением поверхностей класса H^l, $H^{l,\frac{l}{2}}$. Обозначим $\Omega_T = \Omega \times [0,T]$, $T > 0$, и рассмотрим следующую начально-краевую задачу для неизвестной функции $u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial u}{\partial t} - (\nabla, A(x,t,u)\nabla)\, u = f(x,t,u,\nabla u), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{1.2}$$

$$u(x,t) = g^\pm(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_T^\pm = \Gamma^\pm \times [0,T], \tag{1.3}$$

где $u_0(x)$, $g^+(x,t)$ и $g^-(x,t)$ - заданные функции, $A(x,t,u) = \{a_{ij}(x,t,u)\}$ - матрица коэффициентов, $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})$.

При этом предполагаем функции $a_{ij}(u,x,t)$ и $f(u,\nabla u,x,t)$ имеющими разрыв при $u=0$, что является главной и существенной особенностью уравнения (1.1) в нашей постановке :

$$a_{ij}(x,t,u), \frac{\partial a_{ij}}{\partial u}, \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial u^2} \in C^2(\overline{\Omega}_T \times [0,+\infty)) \cap C^2(\overline{\Omega}_T \times (-\infty,0]), \tag{1.4}$$

$$f(x,t,u,\xi) \in C^2(\overline{\Omega}_T \times (-\infty,0] \times R^n) \cap C^2(\overline{\Omega}_T \times [0,+\infty) \times R^n). \qquad (1.5)$$

Таким образом, функции $a_{ij}(u,x,t)$ и $f(u,\xi,x,t)$ могут иметь разрыв первого рода при значении аргумента $u=0$. Мы предполагаем также выполненным условию эллиптичности при всех значениях аргументов функций $a_{ij}(u,x,t)$, то есть

$$\nu\xi^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t,u)\xi_i\xi_j \leq \nu^{-1}\xi^2, \qquad (1.6)$$

где здесь и всюду ниже мы будем использовать обозначения ν и C для всех абсолютных констант или констант, зависящих только от фиксированных исходных данных задачи (1.1)-(1.3).

Модельным случаем для уравнения (1.1) с указанными свойствами служит квазилинейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = H(u), \qquad (1.7)$$

либо уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = sign(u), \qquad (1.8)$$

где $H(u)$ - функция Хевисайда, $H(u) \equiv 1$, $u > 0$, $H(u) \equiv 0$, $u \leq 0$. Уравнение (1.7) возникает в теории горения - см. [2], [3], а также в ряде других областей - см. [4]- [6], см. также [7]. Важно отметить, что из теории локальной регулярности решений параболических уравнений следует, что если решение уравнения (1.7) непрерывно, то оно регулярно в каждой из областей $\{u > 0\}$ и $\{u < 0\}$ и, как следует из уравнения, имеет разрыв старших производных на границе раздела множеств $\{u > 0\}$ и $\{u < 0\}$. Следовательно, рассмотрение уравнения типа (1.7) влечет вопрос о нахождении неизвестных заранее областей $\{u > 0\}$ и $\{u < 0\}$, а также неизвестной границы - интерфейса $\{u = 0\}$. Следовательно, уравнения (1.1), (1.7), (1.8) фактически являются задачей со свободной границей, состоящей в нахождении неизвестного заранее интерфейса $\{u = 0\}$ и определении его свойств.

В работах [8], [9] уравнение (1.7) рассматривалось ранее в случае одной пространственной переменной, и в этих работах была получена регулярность кривой, разделяющей области знакопостоянства решения. В случае двух пространственных переменных уравнение (1.7) рассматривалось в работе [10]. В этой работе предполагалось, что $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ и, при определенных ограничениях на данные задачи, было показано, что линия уровня $\{u = 0\}$ имеет вид $y = f(x,t)$, причем функция $f(x,t)$ обладает определенной регулярностью.

В работе [11] уравнение (1.7) было рассмотрено в многомерном случае и локально по времени было получено существование решения, свободная граница которого обладает определенной регулярностью. В этой же работе указаны условия, при которых решение уравнения (1.7) и свободная граница существуют глобально по времени. В работе [12] для уравнения вида (1.7) при наличии в уравнении конвективного слагаемого вида $a\frac{\partial u}{\partial x}$ в многомерной постановке изучалась устойчивость бегущих волн.

Целью данной работы является рассмотреть не просто модельное уравнение вида (1.7), а изучить существование гладкого интерфейса упомянутого типа локально по времени для общего квазилинейного уравнения вида (1.1), имеющего разрывы не только в правой части, но и в коэффициентах. Отметим также, что во всех указанных выше работах предполагалось выполненным условие определенного знакопостоянства правой части

$$f(u,\xi,x,t)\cdot sign(u)\geq 0(\leq 0).$$

В данной работе мы покажем существование гладкого интерфейса и гладкого решения отказавшись от такого рода ограничений.

Перейдем теперь к формулировке задачи со свободной границей, порождаемой задачей (1.1)-(1.3). Так как в данной работе мы будем рассматривать случай наличия у задачи (1.1)-(1.3) гладкого интерфейса $\{u=0\}$, мы начнем с его параметризации с помощью некоторой неизвестной функции. Пусть начальная функция $u_0(x)$ в (1.3) такова, что множество $\{u_0(x)=0\}$ представляет собой гладкую замкнутую поверхность класса $H^{4+\alpha}$, лежащую между Γ^+ и Γ^- и разбивающую область Ω на две подобласти Ω^+ и Ω^-, так что $\partial\Omega^\pm=\Gamma\cup\Gamma^\pm$. Пусть $\gamma_0>0$ достаточно мало. Введем в достаточно малой окрестности $\mathcal{N}=\{x\in\Omega : dist(x,\Gamma)\leq\gamma_0\}$ поверхности Γ координаты (ω,λ), где ω - некоторые гладкие координаты на поверхности Γ, $\lambda\in R$, $|\lambda|\leq\gamma_0$, таким образом, что если $x\in\mathcal{N}$, то единственным образом

$$x=x(\omega)+\lambda\overrightarrow{n}(\omega)=x(\omega,\lambda),\tag{1.9}$$

где $x(\omega)\in\Gamma$ - точка поверхности Γ с координатами ω, λ - отклонение точки x от $x(\omega)$ по нормали $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{n}(\omega)$ к поверхности Γ в точке $x(\omega)$, направленной внутрь Ω^+. Пусть гладкая функция $\rho(\omega,t)$ определена на $\Gamma_T=\Gamma\times[0,T]$, причем $\rho(\omega,0)\equiv 0$ на Γ. Тогда уравнение

$$x=x(\omega)+\overrightarrow{n}(\omega)\rho(\omega,t),\quad t\in[0,T],$$

задает некоторую поверхность $\Gamma_{\rho,T}$ в Ω_T, которая при $|\rho(\omega,t)|\leq\gamma_0$ лежит в окрестности $\mathcal{N}_T=\mathcal{N}\times[0,T]$ поверхности Γ_T, причем $\Gamma_{\rho,T}\cap\{t=0\}=\Gamma$ так как $\rho(\omega,0)=0$. Обозначим через $\Omega^\pm_{\rho,T}$ те области, на которые $\Gamma_{\rho,T}$ разбивает область Ω_T.

Рассмотрим следующую задачу, состоящую в нахождения неизвестной функции $\rho(\omega,\tau)$, определенной на Γ_T, и неизвестных функций $u^+(y,\tau)>0$ и $u^-(y,\tau)<0$, определенных соответственно в областях $\Omega^+_{\rho,T}$ и $\Omega^-_{\rho,T}$, по соотношениям (мы изменили обозначение независимых переменных (x,t) на (y,τ) ввиду последующей замены переменных):

$$L_0^{\pm}(u^{\pm})u^{\pm}\equiv\frac{\partial u}{\partial\tau}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}^{\pm}(y,\tau,u^{\pm})\frac{\partial u^{\pm}}{\partial y_j}\right)=$$

$$=f^{\pm}(y,\tau,u^{\pm},\nabla u^{\pm}),\quad (y,\tau)\in\Omega^{\pm}_{\rho,T},\tag{1.10}$$

$$u^{\pm}(y,0)=u_0^{\pm}(y),\quad y\in\overline{\Omega}^{\pm};\quad \rho(\omega,0)=0,\quad \omega\in\Gamma,\tag{1.11}$$

$$u^{\pm}(y,\tau)=g^{\pm}(y,\tau),\quad (y,\tau)\in\Gamma_T^{\pm},\tag{1.12}$$

$$u^{+}(y,\tau)=u^{-}(y,\tau)=0,\quad (y,\tau)\in\Gamma_{\rho,T},\tag{1.13}$$

$$(\nu,A^{+}\nabla u^{+})=(\nu,A^{-}\nabla u^{-}),\quad (y,\tau)\in\Gamma_{\rho,T},\tag{1.14}$$

$$\pm u^{\pm}(y,\tau)>0,\ \ (y,\tau)\in\Omega^{\pm}_{\rho,T},\tag{1.15}$$

где мы обозначили

$$(\nu,A^{\pm}\nabla u^{\pm})=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{\pm}(y,\tau,0)\frac{\partial u^{\pm}}{\partial y_j}\nu_i(\tau),$$

где $a_{ij}^{\pm}(u,y,\tau)$ и $f^{\pm}(u,\nabla u,y,\tau)$ есть сужения функций a_{ij} и f из (1.1) на области $\{u\geq 0\}$ и $\{u\leq 0\}$ соответственно, $u_0^{\pm}(y)$, $g^{\pm}(y,\tau)$ - заданные функции, $\nu_i(\tau)$ - координаты вектора единичной нормали к поверхности $\Gamma_{\rho,T}\cap\{\tau=const\}$, направленного внутрь $\Omega^+_{\rho,T}$. Условия (1.13), (1.14) представляют собой три условия на неизвестной границе $\Gamma_{\rho,T}$, причем условия (1.13) вместе с (1.15) означают, что $\Gamma_{\rho,T}$ является интерфейсом $\{u=0\}$, а условие (1.14) означает непрерывность потока, так как уравнение (1.1) должно выполняться в обычном смысле. Таким образом, ввиду условий (1.13), (1.14), а также условия (1.15), задача (1.10) - (1.15) эквивалентна задаче (1.1)- (1.3). Отметим, что с целью удовлетворить условие (1.15) мы накладываем на данные задачи (1.10) - (1.15) следующее требование

$$\pm g^{\pm}(y,\tau)\geq\nu>0,\quad (y,\tau)\in\Gamma_T^{\pm};\quad \pm u_0^{\pm}(y)>0,\quad y\in\Omega^{\pm}.\tag{1.16}$$

Сформулируем теперь основное утверждение данной статьи.

Теорема 1.1 *Пусть кроме условий* (1.4) - (1.6), (1.16) *для задачи* (1.10) - (1.15) *выполнены условия согласования до первого порядка включительно при* $y \in \Gamma^{\pm}$, $\tau = 0$, *а также выполнено условие*

$$|\nabla u_0^{\pm}(y)| = |\frac{\partial u_0(y)}{\partial \overrightarrow{n}}| \geq \nu > 0, \quad y \in \Gamma, \tag{1.17}$$

и пусть

$$\Gamma, \Gamma^{\pm} \in H^{4+\alpha}, \quad u_0^{\pm} \in H^{4+\alpha}(\overline{\Omega}^{\pm}), \quad g^{\pm}(y,\tau) \in H^{4+\alpha, \frac{4+\alpha}{2}}(\Gamma_T^{\pm}). \tag{1.18}$$

Пусть, кроме того, выполнены условия согласования при $y \in \Gamma$, $\tau = 0$ *:*

$$(\nabla, A^{+}\nabla u_0^{+}) = (\nabla, A^{-}\nabla u_0^{-}), \tag{1.19}$$

$$\begin{gathered}\left[(\nabla, A^{+}\nabla u_0^{+}) + f^{+}(y,0,0,\nabla u_0^{+})\right] / \tfrac{\partial u_0^{+}}{\partial \overrightarrow{n}} = \\ = \left[(\nabla, A^{-}\nabla u_0^{-}) + f^{-}(y,0,0,\nabla u_0^{-})\right] / \tfrac{\partial u_0^{-}}{\partial \overrightarrow{n}}.\end{gathered} \tag{1.20}$$

(Условие (1.19) *вытекает из* (1.14)*, а условие* (1.20) *является необходимым для наличия гладкого интерфейса, как будет показано ниже.)*

Тогда на некотором интервале времени $[0,T]$ *задача* (1.10) - (1.15) *(а, тем самым, и задача* (1.1) - (1.3)*) имеет единственное гладкое решение, причем*

$$|\rho|_{H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)} + |u^{\pm}|_{H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_{\rho,T})} \leq C(T, u_0^{\pm}, g^{\pm}). \tag{1.21}$$

Доказательство этой теоремы основано на методе, аналогичном методу, примененному, например, в [13]. Опишем общую схему этого метода. Во первых, с помощью некоторой замены координат, описанной ниже и зависящей от неизвестной функции $\rho(\omega,t)$, задача (1.10) - (1.15) сводится к задаче в известных (фиксированных) областях $\Omega_T^{\pm} = \Omega^{\pm} \times [0,T]$ для набора неизвестных функций $\psi = (u^{+}, u^{-}, \rho)$ и представляется в виде уравнения в функциональных банаховых пространствах

$$A(\psi) = F \tag{1.22}$$

с некоторым гладким по ψ нелинейным оператором A (точное определение банаховых пространств и оператора A будут даны ниже). Во вторых, путем продолжения начальных данных (которые предполагаются обладающими повышенной гладкостью) в область $t > 0$ строится "начальный"элемент ψ_0 таким образом, что величина отклонения $F - A(\psi_0)$ является малой для достаточно малого интервала $[0,T]$, $\|F-A(\psi_0)\| \leq CT^\delta$. Далее, вводится новое неизвестное $\varphi = \psi - \psi_0$ и уравнение (1.22) представляется в виде

$$A'(\psi_0)\varphi = [F - A(\psi_0)] - [A(\psi_0+\varphi) - A'(\psi_0)\varphi - A(\psi_0)] \equiv F_0 - R(\varphi), \quad (1.23)$$

где $A'(\psi_0)$ - линейный оператор, являющийся производной Фреше оператора $A(\psi)$ в точке ψ_0, а оператор $R(\psi)$ содержит только "квадратичные"по ψ слагаемые, в силу гладкости оператора $A(\psi)$ по ψ, . Ниже будет показано, что оператор $A'(\psi_0)$ имеет ограниченный обратный оператор, и поэтому уравнение (1.23) может быть записано в виде

$$\varphi = [A'(\psi_0)]^{-1}F_0 - [A'(\psi_0)]^{-1}R(\varphi) \equiv K(\varphi).$$

В этом соотношении нелинейный оператор $K(\varphi)$ обладает свойствами:

$$\|K(0)\| \leq CT^\delta, \quad \|K(\varphi)\|\, C(T^\delta + \|\varphi\|^2),$$

$$\|K(\varphi_2) - K(\varphi_1)\| \leq C(T^\delta + \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|)\,\|\varphi_2 - \varphi_1\|\,.$$

Используя эти свойства, нетрудно показать, что при достаточно малом $T > 0$ оператор $K(\varphi)$ переводит шар $\{\varphi : \|\varphi\| \leq r\}$ достаточно малого радиуса r в себя и является в нем сжимающим. Так как такой оператор имеет неподвижную точку, то единственная неподвижная точка φ_0 оператора $K(\varphi)$ и дает решение исходной задачи в виде $\psi_0 + \varphi_0$.

Последующие параграфы статьи представляют собой конкретную реализацию описанной схемы.

2. Сведение задачи (1.10) - (1.15) к задаче в фиксированной области.

Прежде чем сводить задачу (1.10) - (1.15) к задаче в фиксированной области, мы, в технических целях, продолжим каждую из функций $f^{\pm}(u,\xi,y,\tau)$ и $a_{ij}^{\pm}(u,y,\tau)$ на все значения $u \in R$ с сохранением гладкости и свойства (1.6). Такое продолжение стандартно - см., например, [1]. За продолженными функциями мы сохраним те же обозначения, и, таким образом, вместо одной разрывной при $u = 0$ функции $f(u,\xi,y,\tau)$ мы теперь будем рассматривать две гладкие функции $f^+(u,\xi,y,\tau)$ и $f^-(u,\xi,y,\tau)$. То же самое касается и разрывных функций $a_{ij}(u,y,\tau)$, вместо которых мы теперь будем рассматривать гладкие функции $a_{ij}^{\pm}(u,y,\tau)$, определенные при всех значениях $u \in R$.

Пусть функция $\chi(\lambda) \in C^\infty([0,\infty))$ такова, что $\chi(0) = 1$, $\chi(\lambda) \equiv 0$ при $\lambda \geq \gamma_0$, $|\chi'(\lambda)| \leq 6/5\gamma_0$, где γ_0 - малая константа из определения окрестности $\mathcal{N}$ поверхности Γ, и пусть достаточно гладкая функция $\rho(\omega,t)$ определена на Γ_T и такова, что $\rho(\omega,0) \equiv 0$, $|\rho(\omega,t)| \leq \gamma_0/2$. Следуя [14], определим отображение

$e_\rho:\ (x,t)\to(y,\tau)$ цилиндра Ω_T на себя используя координаты (ω,λ) из (1.9) следующим образом

$$e_\rho:\begin{cases} t\to\tau=t\\ x\to y(x,t)=\overrightarrow{x}(\omega(x))+\overrightarrow{n}(\omega(x))[\lambda(x)+\chi(\lambda(x))\rho(\omega(x),t)].\end{cases}\tag{2.1}$$

Таким образом, в окрестности $\mathcal{N}_T=\mathcal{N}\times[0,T]$ координаты (ω,λ) точек x и $y=y(x,t)$ связаны следующим образом

$$\omega(y)=\omega(x),\quad \lambda(y)=\lambda(x)+\chi(\lambda(x))\rho(\omega(x),t)].\tag{2.2}$$

Нетрудно видеть, что при $|\rho|$ достаточно малых отображение e_ρ является диффеоморфизмом областей $\Omega_T^\pm$ на области $\Omega_{\rho,T}^\pm$, причем поверхность Γ_T отображается на поверхность $\Gamma_{\rho,T}$, а сужение отображения e_ρ на область $\{t=0\}$ является тождественным отображением, $e_\rho(x,0)\equiv x$, и, кроме того, e_ρ отлично от тождественного отображения только в окрестности $\mathcal{N}_T$. Чтобы не усложнять обозначения, неизвестные функции $u^\pm$ после замены переменных $(y,\tau)=e_\rho(x,t)$ мы будем обозначать тем же символом, то есть $u^\pm(x,t)=u^\pm(y,\tau)\circ e_\rho(x,t)$, причем функции $u^\pm(x,t)$ определены уже в известных фиксированных областях $\overline{\Omega_T^\pm}$.

После замены переменных (2.1) в задаче (1.10) - (1.15) эта задача примет вид (мы опускаем пока условие (1.15) - выполнение этого условия на полученном решении будет проверено отдельно):

$$L_\rho^\pm(u^\pm)u^\pm(x,t)=f_\rho^\pm(x,t,u^\pm,\nabla_\rho u^\pm),\quad (x,t)\in\Omega_T^\pm,\tag{2.3}$$

$$u^\pm(x,0)=u_0^\pm(x),\quad x\in\overline{\Omega}^\pm;\quad \rho(\omega,0)=0,\quad \omega\in\Gamma,\tag{2.4}$$

$$u^\pm(x,t)=g^\pm(x,t),\quad (x,t)\in\Gamma_T^\pm,\tag{2.5}$$

$$u^+(x,t)=u^-(x,t)=0,\quad (x,t)\in\Gamma_T,\tag{2.6}$$

$$B_\rho(u^+,u^-)u^\pm\equiv(E_\rho\overrightarrow{n},A_\rho^+E_\rho\nabla u^+)-(E_\rho\overrightarrow{n},A_\rho^-E_\rho\nabla u^-)=0,\quad (x,t)\in\Gamma_T.\tag{2.7}$$

Здесь $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{n}(x)$ - нормаль к Γ, направленная внутрь Ω^+, $E_\rho=E_\rho(x,t)$ - матрица, сопряженная и обратная к матрице Якоби преобразования $e_\rho|_{t=const}$, так что $\nabla_y u\to E_\rho\nabla_x u\equiv\nabla_\rho u$ при такой замене. Далее, $A_\rho^\pm$ - матрица с элементами $a_{ij,\rho}^\pm(u,x,t)=a_{ij}^\pm(u,y,\tau)\circ e_\rho(x,t)$, $f_\rho^\pm(u,\nabla_\rho u,x,t)=f^\pm(u,\nabla u,y,\tau)\circ e_\rho(x,t)$, $L_\rho^\pm$ - параболические операторы, в которые переходят операторы $L_0^\pm$ из (1.10) при указанной замене переменных, так что в переменных (x,t)

$$L^{\pm}_{\rho}(\theta^{\pm})u^{\pm} \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + (\overrightarrow{h}_{\rho}, \nabla_x u^{\pm}) - (E_{\rho}\nabla_x, A_{\rho}(x,t,\theta^{\pm})E_{\rho}\nabla_x)u^{\pm}, \tag{2.8}$$

где

$$\overrightarrow{h}_{\rho}(x,t) \equiv \frac{\partial}{\partial t}x(y,\tau)|_{(y,\tau)=e_{\rho}(x,t)} = -\overrightarrow{n}(\omega(x))\chi(\lambda(x))\frac{\partial \rho}{\partial t}(\omega(x),t),$$

а условие (2.7) получается при замене координат из (1.14) с учетом того, что $\overrightarrow{\nu} = E_{\rho}\overrightarrow{n}$.

Отметим, что из соотношений (2.3), в силу (2.4), определяются начальные значения $\partial u^{\pm}/\partial t(x,0)$ и $\partial \rho/\partial t(\omega,0)$. Действительно, полагая в соотношениях (2.3) $t=0$ и $x\in\Gamma$ и учитывая, что $u^{\pm}\equiv 0$ на Γ_T, получим, учитывая определение L_{ρ} в (2.8):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\omega,0) = -\frac{(\nabla, A^{\pm}\nabla)u_0^{\pm} + f^{\pm}(x,0,0,\nabla u_0^{\pm})}{\partial u_0^{\pm}/\partial n} \equiv \rho^{(1)}(\omega), \tag{2.9}$$

где мы учли, что при $t=0$ отображение e_{ρ} является тождественным, так что $E_{\rho}=I$, $\chi(0)=1$. В силу условия (1.20), соотношения (2.9) однозначно определяют некоторую функцию $\rho^{(1)}(\omega)$. (Соотношения (2.9) показывают, в частности, что условие (1.20) с необходимостью следует из предположения о наличия гладкого интерфейса.)

Теперь из соотношений (2.3) вытекает значение $\partial u^{\pm}/\partial t(x,0)$ при $t=0$, $x\in\overline{\Omega}$:

$$\frac{\partial u^{\pm}}{\partial t}(x,0) = \chi(\lambda(x))\rho^{(1)}(\omega(x))(\overrightarrow{n}(\omega(x)), \nabla u_0^{\pm}(x)) +$$

$$+(\nabla, A^{\pm}\nabla)u_0^{\pm} + f^{\pm}(x,0,u_0^{\pm}(x),\nabla u_0^{\pm}) \equiv u^{(1)\pm}(x). \tag{2.10}$$

В силу (1.18) и (1.17) нетрудно видеть, что

$$\rho^{(1)}(\omega)\in H^{2+\alpha}(\Gamma), \quad u^{(1)\pm}(x)\in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega}^{\pm}). \tag{2.11}$$

Определим еще функцию

$$\widetilde{u}^{(1)\pm}(x) \equiv (\nabla, A^{\pm}\nabla)u_0^{\pm} + f^{\pm}(x,0,u_0^{\pm}(x),\nabla u_0^{\pm}). \tag{2.12}$$

Продолжим функции $u_0^{\pm}(x)$, $u^{(1)\pm}(x)$ и $\widetilde{u}^{(1)\pm}(x)$ с областей $\overline{\Omega}^{\pm}$ на всю область $\overline{\Omega}$ с сохранением класса, сохраняя за новыми функциями те же обозначения. Построим, далее, такие функции $w^{\pm}(x,t)\in H^{4+\alpha,\frac{4+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}^{\pm}_T)$ и $\sigma(\omega,t)\in H^{4+\alpha,\frac{4+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, что

$$w^{\pm}(x,0)=u_0^{\pm}(x), \quad \frac{\partial w^{\pm}}{\partial t}(x,0)=\widetilde{u}^{(1)\pm}(x),$$

$$\sigma(\omega,0)=\rho(\omega,0)=0,\quad \frac{\partial\sigma}{\partial t}(\omega,0)=\rho^{(1)}(\omega). \tag{2.13}$$

Способ построения таких функций описан, например, в [1]. Отметим, что по построению функций $w^{\pm}$ и так как $\sigma\equiv 0$ при $t=0$, выполнено

$$\frac{\partial}{\partial t}[w^{\pm}\circ e_{\sigma}]|_{t=0}=\frac{\partial w^{\pm}}{\partial t}+\frac{\partial w^{\pm}}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial t}=\widetilde{u}^{(1)\pm}+\frac{\partial w^{\pm}}{\partial n}\frac{\partial\sigma}{\partial t}=u^{(1)\pm}(x).$$

Поэтому соотношения (2.3)-(2.7) на функциях $w^{\pm}_{\sigma}=w^{\pm}\circ e_{\sigma}]$ σ выполнены при $t=0$, то есть

$$L^{\pm}_{\sigma}(w^{\pm}\circ e_{\sigma},\sigma)w^{\pm}\circ e_{\sigma}(x,t)-f^{\pm}_{\sigma}(x,t,w^{\pm}\circ e_{\sigma},\nabla_{\sigma}w^{\pm}\circ e_{\sigma})=0,x\in\overline{\Omega},t=0. \tag{2.14}$$

Тройка $\psi_0=(w^{+}_{\sigma},w^{-}_{\sigma},\sigma)$ и является тем элементом, на котором будет произведена линеаризация задачи (2.3)-(2.7), описанная в конце параграфа 1.

3. Линеаризация задачи (2.3)-(2.7).

Отметим, во первых, что, как нетрудно проверить, для $\delta\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}$ выполнено

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{w^{\pm}\circ e_{\sigma+\varepsilon\delta}-w^{\pm}\circ e_{\sigma}}{\varepsilon}=(\frac{\partial w^{\pm}}{\partial\lambda}\circ e_{\sigma})\chi(\lambda)\delta(\omega(x),t)\equiv b^{\pm}\delta(\omega(x),t), \tag{3.1}$$

то есть правая часть последнего соотношения представляет собой главную линейную часть отображения $\rho\to w^{\pm}\circ e_{\rho}$ при $\rho=\sigma$. Обозначим коэффициент при $\delta(\omega,t)$ в правой части (3.1) через $b^{\pm}=b^{\pm}(x,t)$.

Вводя теперь в (2.3)-(2.7) новые неизвестные функции

$$\delta(\omega,t)=\rho(\omega,t)-\sigma(\omega,t),\quad v^{\pm}(x,t)=u^{\pm}(x,t)-w^{\pm}\circ e_{\sigma}-b^{\pm}\delta,$$

а также дифференциальные операторы в соответствии с обозначениями

$$w^{\pm}_{\sigma}\equiv w^{\pm}\circ e_{\sigma},\quad L^{\pm}_{0}\equiv L^{\pm}_{0}(w^{\pm}\circ e_{\sigma}),\quad L^{\pm}_{\sigma}\equiv L^{\pm}_{\sigma}(w^{\pm}\circ e_{\sigma}), \tag{3.2}$$

представим соотношения (2.3)-(2.7) в виде (ср. (1.23))

$$L^{\pm}_{0}v^{\pm}(x,t)=\big\{(L^{\pm}_{0}-L^{\pm}_{\sigma})v^{\pm}-(L^{\pm}_{0}(w^{\pm})w^{\pm}-f^{\pm}(x,t,w^{\pm},\nabla w^{\pm}))\circ e_{\sigma+\delta}-$$

$$-[L^{\pm}_{\sigma+\delta}(v^{\pm}+w^{\pm}_{\sigma}+b^{\pm}\delta)-L^{\pm}_{\sigma+\delta}(w^{\pm}_{\sigma})]w^{\pm}_{\sigma}+$$

$$+[f^{\pm}_{\sigma+\delta}(x,t,v^{\pm}+w^{\pm}_{\sigma}+b^{\pm}\delta,\nabla(v^{\pm}+w^{\pm}_{\sigma}+b^{\pm}\delta))-f^{\pm}_{\sigma+\delta}(x,t,w^{\pm}\circ e_{\sigma+\delta},\nabla w^{\pm}\circ e_{\sigma+\delta})]\big\}+$$

$$+\big\{L^{\pm}_{\sigma}(w^{\pm}\circ e_{\sigma+\delta}-w^{\pm}_{\sigma}-b^{\pm}\delta)-(L^{\pm}_{\sigma+\delta}(w^{\pm}_{\sigma})-L^{\pm}_{\sigma})(v^{\pm}+b^{\pm}\delta)+$$

$$+(L^{\pm}_{\sigma+\delta}(w^{\pm}_{\sigma})-L^{\pm}_{\sigma})(w^{\pm}\circ e_{\sigma+\delta}-w^{\pm}_{\sigma})-$$

$$-[L^{\pm}_{\sigma+\delta}(v^{\pm}+w^{\pm}_{\sigma}+b^{\pm}\delta)-L^{\pm}_{\sigma+\delta}(w^{\pm}_{\sigma})](v^{\pm}+b^{\pm}\delta)\big\}\equiv$$

$$\equiv F^{\pm}_{1}(x,t;v^{\pm},\delta)+F^{\pm}_{2}(x,t;v^{\pm},\delta),\quad (x,t)\in\overline{\Omega}^{\pm}_{T}, \tag{3.3}$$

$$v^{\pm}(x,0)=0, x\in\overline{\Omega}^{\pm},\quad \delta(\omega,0)=0,\omega\in\Gamma, \tag{3.4}$$

$$v^{\pm}(x,t)=g^{\pm}(x,t)-w^{\pm}_{\sigma}(x,t)=F^{\pm}_{3}(x,t),\quad (x,t)\in\Gamma^{\pm}_{T}, \tag{3.5}$$

$$v^{\pm}(x,t)+b^{\pm}(x,t)\delta=-w^{\pm}_{\sigma}(x,t)\equiv F^{\pm}_{4}(x,t),\quad (x,t)\in\Gamma_{T}, \tag{3.6}$$

$$(\overrightarrow{n},A^{+}(w^{+}_{\sigma})\nabla v^{+})-(\overrightarrow{n},A^{-}(w^{-}_{\sigma})\nabla v^{-})\equiv B_0 v^{\pm}\equiv B_0(w^{\pm}_{\sigma})v^{\pm}=$$

$$=\big\{(B_0-B_{\sigma}(w^{\pm}_{\sigma}))v^{\pm}-(B_0 w^{\pm})\circ e_{\sigma+\delta}\big\}+$$

$$+\big\{B_{\sigma}(w^{\pm}_{\sigma})(w^{\pm}\circ e_{\sigma+\delta}-w^{\pm}_{\sigma}-b^{\pm}\delta)-$$

$$-[B_{\sigma+\delta}(w^{\pm}_{\sigma})-B_{\sigma}(w^{\pm}_{\sigma})](v^{\pm}+b^{\pm}\delta)+$$

$$+[B_{\sigma+\delta}(w^{\pm}_{\sigma})-B_{\sigma}(w^{\pm}_{\sigma})](w^{\pm}\circ e_{\sigma+\delta}-w^{\pm}_{\sigma})\big\}\equiv$$

$$\equiv F^{\pm}_{5}(x,t;v^{\pm},\delta)+F^{\pm}_{6}(x,t;v^{\pm},\delta),\quad (x,t)\in\Gamma_{T}. \tag{3.7}$$

Заметим, что при заданных правых частях F_i в соотношениях (3.3)- (3.7) эти соотношения представляют собой некоторую линейную задачу для нахождения функций $v^{\pm}$ и δ.

Следуя [1], обозначим через $H^{l,\frac{l}{2}}_{\circ}(\overline{\Omega}^{\pm}_{T})$ подпространства пространств $H^{l,\frac{l}{2}}(\overline{\Omega}^{\pm}_{T})$, состоящие из функций, которые обращаются в ноль при $t=0$ вместе со всеми своими производными по t, которые допускаются классом, то есть до порядка $[l/2]$. Эти пространства обладают тем свойством (см. [1]), что для функций u и v из этих пространств, если $0 < l' < l$, то

$$|u|_{H^{l',\frac{l'}{2}}(\overline{\Omega}_T)} \le CT^{\frac{l-l'}{2}}|u|_{H^{l,\frac{l}{2}}(\overline{\Omega}_T)}, \tag{3.8}$$

$$|uv|_{H^{l,\frac{l}{2}}(\overline{\Omega}_T)} \le CT^{\frac{l-[l]}{2}}|u|_{H^{l,\frac{l}{2}}(\overline{\Omega}_T)}|v|_{H^{l,\frac{l}{2}}(\overline{\Omega}_T)}. \tag{3.9}$$

Отметим теперь, что функции $F_i^{\pm}(v^{\pm}, \delta, x, t)$ в правых частях соотношений (3.3)- (3.7) обладают следующими свойствами. Во первых, из способа их построения с учетом свойств $w^{\pm}$ и σ следует, что если задать в них $v^{\pm} \in \overset{\circ}{H}{}^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T^{\pm})$, $\delta \in \overset{\circ}{H}{}^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, то при $t=0$ выполнено $F_i^{\pm}(0,0,x,0) \equiv 0$. Отсюда, в частности, вытекает, что если в правых частях соотношений (3.3)- (3.7) задать некоторые $v^{\pm} \in \overset{\circ}{H}{}^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T^{\pm})$ и $\delta \in \overset{\circ}{H}{}^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, то левые части указанных соотношений определяют линейную задачу для нахождения новых $v^{\pm}$ и δ из тех же классов.

Во вторых, функции F_i в правых частях (3.3)- (3.7) определены таким образом, что удовлетворяют соотношениям (в которых $\psi = (v^+, v^-, \delta) \in \overset{\circ}{H}{}^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T^{+}) \times \overset{\circ}{H}{}^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T^{-}) \times \overset{\circ}{H}{}^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$):

$$|F_1^{\pm}(x,t,\psi)|_{H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T)} \le CT^{\frac{\alpha}{2}}(1 + \|\psi\|), \tag{3.10}$$

$$|F_1^{\pm}(x,t,\psi_2) - F_1^{\pm}(x,t,\psi_1)|_{H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T)} \le CT^{\frac{\alpha}{2}}(1 + \|\psi_1\| + \|\psi_2\|)\,\|\psi_2 - \psi_1\|, \tag{3.11}$$

$$|F_2^{\pm}(x,t,\psi)|_{H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T)} \le C\,\|\psi\|^2, \tag{3.12}$$

$$|F_2^{\pm}(x,t,\psi_2) - F_2^{\pm}(x,t,\psi_1)|_{H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T)} \le C(\|\psi_1\| + \|\psi_2\|)\,\|\psi_2 - \psi_1\|, \tag{3.13}$$

$$|F_3^{\pm}(x,t)|_{H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T^{\pm})} + |F_4^{\pm}(x,t)|_{H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)} \le CT^{\frac{\alpha}{2}}, \tag{3.14}$$

$$|F_5(x,t,\psi)|_{H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma_T)} \le CT^{\frac{\alpha}{2}}(1 + \|\psi\|), \tag{3.15}$$

$$|F_5(x,t,\psi_2) - F_5(x,t,\psi_1)|_{H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma_T)} \le CT^{\frac{\alpha}{2}}(\|\psi_1\| + \|\psi_2\|)\,\|\psi_2 - \psi_1\|, \tag{3.16}$$

$$|F_6(x,t,\psi)|_{H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma_T)} \le C\,\|\psi\|^2, \tag{3.17}$$

$$\left|F_6(x,t,\psi_2)-F_6(x,t,\psi_1)\right|_{H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma_T)} \leq C(\|\psi_1\|+\|\psi_2\|)\,\|\psi_2-\psi_1\|\,. \tag{3.18}$$

Смысл соотношений (3.10)- (3.18) состоит в том, что в левой части системы (3.3)- (3.7) стоят главные линейные по $v^{\pm}$ и δ части системы (2.3)- (2.7), а все "квадратичные"и младшие по порядку дифференцирования слагаемые, а также значения операторов системы (2.3)- (2.7) на элементах $w_{\sigma}^{\pm}$ и σ, отнесены в правую часть. При этом функции $F_1^{\pm}$ и F_5 содержат младшие по порядку или более гладкие слагаемые, так что при получении оценок (3.10), (3.11), (3.15), (3.16) мы воспользовались неравенствами (3.8), (3.9). Этими же неравенствами мы воспользовались в оценке (3.14). Оценки же (3.12), (3.13), (3.17) и (3.18) следуют из того, что функции $F_2^{\pm}$ и F_6 не зависящих от ψ или линейных по ψ слагаемых и носят квадратичный характер - при этом мы используем гладкость по своим аргументам функций $a_{ij}^{\pm}(u,x,t)$ и $f^{\pm}(u,\nabla u,x,t)$, а также гладкость поверхности Γ.

4. Линейная задача.

Как отмечено выше, при заданных правых частях F_i в соотношениях (3.3)- (3.7) левые части этих соотношений определяют следующую линейную задачу для нахождения неизвестных функций $v^{\pm}$ и δ:

$$\frac{\partial v^{\pm}}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_{ij}^{\pm}(x,t)\frac{\partial v^{\pm}}{\partial x_j}\right)=f_1^{\pm},\quad (x,t)\in\Omega_T^{\pm}, \tag{4.1}$$

$$v^{\pm}(x,0)=0,\quad \delta(\omega,0)=0, \tag{4.2}$$

$$v^{\pm}(x,t)=f_2^{\pm}(x,t),\quad (x,t)\in\Gamma_T^{\pm}, \tag{4.3}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}^{+}(x,t)\frac{\partial u^{+}}{\partial x_j}n_i-\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}^{-}(x,t)\frac{\partial u^{-}}{\partial x_j}n_i=f_3,\quad (x,t)\in\Gamma_T, \tag{4.4}$$

$$v^{\pm}(x,t)+b^{\pm}(x,t)\delta=f_4^{\pm}(x,t),\quad (x,t)\in\Gamma_T, \tag{4.5}$$

где $b_{ij}^{\pm}(x,t)=a_{ij}^{\pm}(x,t,w_{\sigma}^{\pm}(x,t))\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T^{\pm})$, $b^{\pm}(x,t)=\frac{\partial w^{\pm}}{\partial n}\in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, $b^{\pm}(x,t)\geq\nu>0$.

Особенностью данной задачи является то, что неизвестная функция δ входит только в соотношения (4.5), так что эту неизвестную функцию можно исключить умножая соотношение (4.5) для знака $+$ на b^{-}, а это же соотношение для знака $-$ на b^{+} и вычитая одно из другого. В результате вместо (4.5) получим

$$b^- v^+(x,t) - b^+ v^-(x,t) = f_4 \equiv b^- f_4^+ - b^+ f_4^-, \quad (x,t) \in \Gamma_T. \tag{4.6}$$

Полученная задача (4.1) - (4.4), (4.6) представляет собой известную задачу дифракции, или задачу сопряжения. Эта задача хорошо изучена и из результатов работ [15] - [18] следует, что при соответствующей гладкости правых частей (см. (4.7) ниже) задача (4.1) - (4.4), (4.6) однозначно разрешима в $\overline{\Omega}_T$, причем для ее решения справедлива оценка

$$|v^+|^{(2+\alpha)}_{\Omega_T^+} + |v^-|^{(2+\alpha)}_{\Omega_T^-} \le C(|f_1^+|^{(\alpha)}_{\Omega_T^+} + |f_1^-|^{(\alpha)}_{\Omega_T^-} + |f_2^+|^{(2+\alpha)}_{\Gamma_T^+} + |f_2^-|^{(2+\alpha)}_{\Gamma_T^-} +$$

$$+ |f_3|^{(1+\alpha)}_{\Gamma_T} + |f_4^+|^{(2+\alpha)}_{\Gamma_T} + |f_4^-|^{(2+\alpha)}_{\Gamma_T}) \equiv CM(T). \tag{4.7}$$

После того, когда функции $v^\pm$ найдены, функция δ легко определяется из соотношения (4.5), причем

$$|\delta|^{(2+\alpha)}_{\Gamma_T} \le CM(T). \tag{4.8}$$

Следовательно, для любых функций $f_1^\pm \in H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T^\pm)$, $f_2^\pm \in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T^\pm)$, $f_3 \in H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, $f_4^\pm \in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$ задача (4.1) - (4.5) имеет единственное решение, причем

$$|v^+|^{(2+\alpha)}_{\Omega_T^+} + |v^-|^{(2+\alpha)}_{\Omega_T^-} + |\delta|^{(2+\alpha)}_{\Gamma_T} \le CM(T). \tag{4.9}$$

5. Нелинейная задача (3.3) - (3.7).

Определим на достаточно малом шаре $\mathcal{B}_r = \mathcal{B}_r(0)$ радиуса r пространства $\mathcal{H} = H_\circ^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T^+) \times H_\circ^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T^-) \times H_\circ^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$ нелинейный оператор K, который каждой тройке $\psi = (v^+, v^-, \delta) \in \mathcal{B}_r \subset \mathcal{H}$ ставит в соответствие элемент $K(\psi) = (\widetilde{v^+}, \widetilde{v^-}, \widetilde{\delta})$ - решение линейной задачи (3.3) - (3.7) с правыми частями $F_i(v^\pm, \delta, x, t)$, в которых зафиксированы заданные $(v^+, v^-, \delta) = \psi$. На основании параграфа **??** такой оператор корректно определен из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$. Кроме того, из оценки (4.9) и из оценок (3.10) - (3.18) следует, что оператор $K(\psi)$ обладает свойствами

$$\|K(\psi)\|_H \le C[(1 + \|\psi\|_H)T^{\frac{\alpha}{2}} + \|\psi\|_H^2]; \tag{5.1}$$

$$\|K(\psi_2) - K(\psi_1)\|_H \le C(T^{\frac{\alpha}{2}} + \|\psi_1\|_H + \|\psi_2\|_H)\,\|\psi_2 - \psi_1\|_H\,. \tag{5.2}$$

Из оценок (5.1), (5.2) вытекает, что при достаточно малых $r > 0$ и $T > 0$ оператор K переводит шар $\mathcal{B}_r$ в себя и является там сжимающим. Единственная неподвижная точка этого оператора и дает, очевидно, решение нелинейной задачи (3.3) - (3.7), а, тем самым, и задачи (2.3) - (2.7) кроме.

Кроме того, из определения $v^{\pm}$ следует, что для найденных таким образом функций $u^{\pm}$ в (2.3) - (2.7) выполнено

$$|u^{\pm} - u_0^{\pm}|_{\Omega_T^{\pm}}^{(1+\alpha)} \le |v^{\pm}|_{\Omega_T^{\pm}}^{(1+\alpha)} + |b^{\pm}\delta|_{\Gamma_T}^{(1+\alpha)} + |w^{\pm} \circ e_{\sigma} - u_0^{\pm}|_{\Omega_T^{\pm}}^{(1+\alpha)} \le CT^{\frac{\alpha'-\alpha}{2}}, \alpha' \in (\alpha, 1). \tag{5.3}$$

где мы воспользовались неравенствами (3.8). Таким образом, при достаточно малом $T > 0$ сами функции $u^{\pm}(x,t)$ и их градиенты $\nabla u^{\pm}(x,t)$ мало отличаются от $u_0^{\pm}(x,t)$ и $\nabla u_0^{\pm}(x,t)$ соответственно в $\overline{\Omega_T^{\pm}}$. Учитывая условие (1.17) нетрудно показать, что если T в (5.3) достаточно мало, то, ввиду второго из условий (1.16), $\pm u^{\pm}(x,t) > 0$ при $x \in \Omega^{\pm}$ (то есть в открытых областях). Следовательно, функции $f_{\rho}^{\pm}$ и $a_{ij,\rho}^{\pm}$ в соотношениях (2.3) - (2.7) совпадают, после обратной замены переменных, с исходными функциями f и a_{ij} из уравнения (1.1) в областях $\Omega_{\rho,T}^{\pm}$. Тем самым полученные функции $u^{\pm}(x,t)$ после обратной замены переменных дают гладкое вне гладкого интерфейса $\{u = 0\}$ решение задачи (1.1)- (1.3).

Этим завершается доказательство Теоремы 1.1. □

1. *О.А.Ладыженская, В.А.Солонников, Н.Н.Уральцева.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.// М., "Наука".- 1967.
2. *J.Norburu, A.M.Stuart.* A Model for Porous Medium Combustion//Quart.J.Appl.Math. - 1989.- **42**.- P.159-178.
3. *J.Norburu, A.M.Stuart.* Parabolic Free Boundary Problems Arising in Porous Medium Combustion // IMA J.Appl.Math.-1987.-V.39.-P.241-257.
4. *A.A.Lacey.* The Spatial Dependence of Supercritical Reacting Systems//IMA J.Appl.Math.- 1981.-V.27.-P.71-84.
5. *J.Rinzel, J.B.Keller.* Traveling Wave Solutions of a Nerve Conducting Equation// Biophysics J.- 1973.-V.13.-P.1313-1337.
6. *A.Friedman, A.E.Tzavaras.* Combustion in a Porous Medium// Siam.J.Math.Anal.- 1988.- V.19(3).-P.509-519.
7. *R.Gianni, P.Manucci.* Some Existence Theorems for an N-dimensional Parabolic Equation with a Discontinuous Source Term// Preprint.- 1991.
8. *R.Gianni, J.Hulshof.* The semilinear heat equation with a Heawiside source term.// Eur. J. Appl. Math.-1992.-V.3.-№4.-P.367-379.
9. *R.Gianni, P.Manucci.* Existence theorems for a free boundary problem in combustion theory// Q.Appl.Math.- 1993.-V.51.-№1.-P.43-53.
10. *R.Gianni, P.Manucci.* Some existence theorems for n-dimensional parabolic equation with a discontinuous source term// SIAM J.Math.Anal.- 1993.-V.24.-№3.-P.618-633.
11. *R.Gianni.* Existence of the free boundary in a multi-dimensional combustion problem// Proc. R. Soc. Edinb..-Sect.A.- 1995.-V.125.-№3.-P.525-544.
12. *C.-M. Brauner, J.-M. Roquejoffre, C. Shmidt-Laine.* Stability of travelling waves in a parabolic equation with discontinuous source term// Comm.Appl.Nonl.Anal.- 1996.-V.2(4).-P.83-100.

13. *Б.В. Базалий, С.П. Дегтярев.* О классической разрешимости многомерной задачи Стефана при конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости// Матем. Сборник. - 1987. -Т.132(174). -№1. -С.3-19.
14. *E.-I. Hanzawa.* Classical solutions of the Stefan problem// Tohoku Math.Journ.- 1981.-№33.- P.297-335.
15. *Н.В.Житарашу.* Шаудеровские оценки и разрешимость общих краевых задач для общих параболических систем с разрывными коэффициентами// ДАН СССР.- 1966.-Т.169.- №3.-С.511-514.
16. *О.А.Ладыженская, В.Я.Ривкинд, Н.Н.Уральцева.* О классической разрешимости задачи дифракции// Труды мат. ин-та им.В.А.Стеклова.- 1966.-Т.92.-С.116-146.
17. *В.А.Солонников.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида// Труды мат. ин-та им.В.А.Стеклова.- 1965.-Т.83.-184 С.
18. *Ж.Я.Цаповска.* Решение параболической задачи сопряжения в нецилиндрической области методом потенциала// Мат.Методы Физ.-Мех. Поля.- 1999.-Т.42.-№2.-С.39-46.

ИПММ НАН Украины,
ул. Розы Люксембург, 74,
83114, Донецк, Украина

Получено 16.05.2009