©2009. **Н.М. Гринців**

ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

Встановлено умови існування та єдиності класичних розв'язків обернених задач визначення коефіцієнта при старшій похідній у параболічних рівняннях у припущенні, що коефіцієнт перед похідною за часом перетворюється в нуль в початковий момент часу. Досліджено випадок сильного степеневого виродження.

Ключевые слова: обернена задача, параболічне рівняння з виродженням, функція Гріна

MSC (2000): 35R30; 35K65; 45D05

Вступ.

При описі таких фізичних процесів, як рух рідин та газів у пористому середовищі, явища в плазмі, опріснення морських вод та інших, виникають прямі задачі для параболічних рівнянь з виродженням, зокрема й ті, виродження котрих спричиняє коефіцієнт перед похідною за часом.

В [1] розглянуто рівняння

$$u_{xx} - t^k d(t,x)u_t - b(x,t)u_x + c(t,x)u = f(t,x)$$

в області $Q = \{0 < t \leq T, 0 < x < \infty\}$. Показано, що у випадку слабкого $(0 < k < 1)$ виродження вказане рівняння має в Q єдиний обмежений розв'язок, що задовольняє умови $u(0,x) = \psi(x)$, $u(t,0) = \varphi(t)$. Якщо ж $k \geq 1$ (сильне виродження), то єдиний обмежений розв'язок цього рівняння визначається лише умовою $u(t,0) = \varphi(t)$. Це означає, що у випадку сильного виродження потрібно відмовитись від виконання початкових умов.

Лінійне параболічне рівняння

$$-\varphi(t,x)u_t + a^{ij}(t,x)u_{x_i x_j} + b^i(t,x)u_{x_i} + c(t,x)u = f(t,x),$$

яке вироджується на довільній підмножині шару $H = \{0 < t \leq T, x \in \mathbb{R}^n\}$, розглянуто в [2]. У роботі дано визначення слабкого та сильного виродження у вигляді інтегральної умови, а також знайдено обмеження на допустимий ріст шуканої функції, які забезпечують однозначну розв'язність задачі без початкових даних.

Умови коректності деяких крайових задач для лінійних параболічних рівнянь другого порядку у припущенні, що коефіцієнт перед u_t має нуль досить високого порядку при $t = 0$, знайдено в [3], [4].

Обернені задачі визначення коефіцієнта $a(t) > 0$, $t \in [0,T]$ в параболічному рівнянні

$$u_t = a(t)t^\beta u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t)$$

в області $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ вивчались в [5], [6]. Досліджено випадки слабкого $(0 < \beta < 1)$ та сильного $(\beta \geq 1)$ виродження. Умови існування та єдиності розв'язку встановлено також у випадку $-1 < \beta < 0$. Питання розв'язності обернених задач для параболічних рівнянь, виродження котрих спричиняє коефіцієнт при похідній за часом, залишалось відкритим.

У даній роботі досліджуються обернені задачі визначення залежного від часу коефіцієнта при старшій похідній в рівнянні теплопровідності та повному параболічному рівнянні у припущенні, що коефіцієнт перед u_t дорівнює нулю при $t = 0$. Встановлено умови існування та єдиності розв'язків таких задач у випадку сильного степеневого виродження, а також досліджено вплив молодших членів рівняння на розв'язність задачі.

1. Формулювання задач та основні результати.

В області $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглядаються обернені задачі визначення коефіцієнта $a = a(t), a(t) > 0, t \in [0,T]$ в рівнянні теплопровідності

$$t^\beta u_t = a(t)u_{xx} + f(x,t) \tag{1}$$

та в повному параболічному рівнянні

$$t^\beta u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{2}$$

з умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(h,t) = \mu_2(t),\ 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t),\ 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

де $\beta > 1$ – задане число.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $\mu_i \in C^1[0,T], i = 1,2,\ \mu_3(t) = \mu_{3,0}(t)t^\gamma,\ \mu_{3,0} \in C[0,T],\ f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$;

2) $f_x(x,t) \geq 0,\ |f(x,t)| + |f_x(x,t)| \leq A_0 t^{\beta-1+\gamma},\ (x,t) \in \overline{Q}_T,\ \mu_{3,0}(t) > 0,$ $A_1 t^{\beta+\gamma-1} \leq f(0,t) - t^\beta \mu_1'(t) \leq A_2 t^{\beta+\gamma-1},\ 0 \leq t^\beta \mu_2'(t) - f(h,t) \leq A_3 t^{\beta+\gamma-1},$ $t \in [0,T]$, *де* $\gamma > 0$ *– задане число,* $A_i, i = \overline{0,3}$ *— додатні сталі.*

Тоді існує єдиний розв'язок $(a, u_0) \in C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T),\ a(t) > 0, t \in [0,T]$ *задачі (1), (3), (4).*

Теорема 2. *Нехай виконуються умови Теореми 1, а також*

1) $b, c \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$;

2) $|b(x,t)| + |b_x(x,t)| \leq A_4 t^\alpha, |c(x,t)| \leq A_5 t^{\alpha+\gamma}$, *де* $\alpha > \beta - 1$, A_4, A_5 *— додатні сталі.*

Тоді існує єдиний розв'язок $(a,u) \in C[0,T_0] \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}\overline{Q}_{T_0},\ a(t)>0, t \in [0,T_0]$ *задачі (2) - (4), де число* $T_0,\ 0<T_0 \le T$ *визначається вихідними даними цієї задачі.*

2. Доведення Теореми 1.

Припустимо тимчасово, що функція $a=a(t)$ відома. Для побудови розв'язку $u_0=u_0(x,t)$ задачі (1), (3) використаємо метод функцій Гріна [7, с.49]. Через $G_k(x,t,\xi,\tau)$, $k=1,2$ позначимо функції Гріна відповідно першої та другої крайових задач для рівняння (1). Вони визначаються формулою

$$G_k(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \right) + \right.$$
$$\left. + (-1)^k \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \right) \right),\ k=1,2, \tag{5}$$

де $\theta(t)-\theta(\tau) = \int\limits_\tau^t \frac{a(\sigma)}{\sigma^\beta}\,d\sigma.$

Розв'язок задачі (1), (3) має вигляд

$$u_0(x,t) = \int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)\frac{a(\tau)}{\tau^\beta}\mu_1(\tau)d\tau - \int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,h,\tau)\frac{a(\tau)}{\tau^\beta}\mu_2(\tau)d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\frac{f(\xi,\tau)}{\tau^\beta}d\xi d\tau,\ (x,t) \in \overline{Q}_T. \tag{6}$$

Обчислимо похідну від функції $u_0(x,t)$ за змінною x. Для цього використаємо рівності $G_{1x} = -G_{2\xi}, G_{2\tau} = -\frac{a(\tau)}{\tau^\beta}G_{2\xi\xi}$ та інтегрування частинами:

$$u_{0x}(x,t) = \int\limits_0^t G_2(x,t,0,\tau)\left(\frac{f(0,\tau)}{\tau^\beta} - \mu_1'(\tau)\right)d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t G_2(x,t,h,\tau)\left(\mu_2'(\tau) - \frac{f(h,\tau)}{\tau^\beta}\right)d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)\frac{f_\xi(\xi,\tau)}{\tau^\beta}d\xi d\tau,\ (x,t) \in \overline{Q}_T. \tag{7}$$

Оцінимо функції $u_0(x,t)$ та $u_{0x}(x,t)$, виходячи з формул (6), (7). Оскільки

$$G_1(x,t,\xi,\tau) \le G_2(x,t,\xi,\tau)$$

та

$$\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)d\xi = 1, \tag{8}$$

то, враховуючи умови Теореми 1, отримаємо оцінки

$$\left|\int\limits_0^t \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\frac{f(\xi,\tau)}{\tau^\beta}d\xi d\tau\right| \le C_1\int\limits_0^t \tau^{\gamma-1}d\tau \le C_2 t^\gamma,$$

$$\left|\int\limits_0^t \int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)\frac{f_x(\xi,\tau)}{\tau^\beta}d\xi d\tau\right| \le C_3 t^\gamma. \tag{9}$$

При оцінюванні перших двох інтегралів правої частини рівності (6) використаємо (5):

$$\left|\int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)\frac{a(\tau)}{\tau^\beta}\mu_1(\tau)d\tau\right| \le \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\max_{[0,T]}|\mu_1(t)|\int\limits_0^t \frac{1}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{3/2}}\frac{a(\tau)}{\tau^\beta}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(x+2nh)\exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)d\tau \le C_4.$$

Аналогічно

$$\left|\int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,h,\tau)\frac{a(\tau)}{\tau^\beta}\mu_2(\tau)d\tau\right| \le C_5.$$

Таким чином, з (6) матимемо

$$|u_0(x,t)| \le C_2 t^\gamma + C_4 + C_5 \le C_6,\ (x,t)\in\overline{Q}_T. \tag{10}$$

Для оцінки перших двох інтегралів, що входять до правої частини формули (7), використаємо нерівність

$$G_2(x,t,\xi,\tau) \le C_7\left(1+\frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right). \tag{11}$$

Беручи до уваги припущення теореми 1 та означення різниці $\theta(t)-\theta(\tau)$, отримаємо

$$I_1 \equiv \int\limits_0^t G_2(x,t,0,\tau)\left(\frac{f(0,\tau)}{\tau^\beta}-\mu_1'(\tau)\right)d\tau \le C_8\int\limits_0^t\left(1+\frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right)\tau^{\gamma-1}d\tau \le$$

$$\le C_9t^\gamma + C_{10}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\gamma-1}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau \le C_9t^\gamma + C_{11}\int\limits_0^t \frac{t^{\frac{\beta-1}{2}}\tau^{\frac{\beta-3}{2}+\gamma}}{\sqrt{t^{\beta-1}-\tau^{\beta-1}}}\,d\tau. \qquad (12)$$

Після заміни $\tau = zt$, знаходимо

$$I_1 \le C_9t^\gamma + C_{11}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}\int\limits_0^1 \frac{z^{\frac{\beta-3}{2}+\gamma}}{\sqrt{1-z^{\beta-1}}}\,dz \le C_9t^\gamma + C_{12}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}.$$

Повторюючи ті ж міркування, приходимо до оцінки

$$\left|\int\limits_0^t G_2(x,t,h,\tau)\left(\mu_2'(\tau)-\frac{f(h,\tau)}{\tau^\beta}\right)d\tau\right| \le C_{13}t^\gamma + C_{14}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma}.$$

В результаті з (7) отримаємо

$$u_{0x}(x,t) \le C_{15}t^\gamma + C_{16}t^{\frac{\beta-1}{2}+\gamma} \le C_{17}t^\gamma,\ (x,t)\in\overline{Q}_T. \qquad (13)$$

Рівняння (4) подамо у вигляді

$$a(t) = \frac{\mu_3(t)}{u_{0x}(0,t)},\ t\in[0,T], \qquad (14)$$

де $u_{0x}(x,t)$ визначається формулою (7), та знайдемо апріорні оцінки розв'язків цього рівняння.

Беручи до уваги (9), (12) та припущення теореми, оцінимо функцію $a = a(t)$ знизу, виходячи з рівняння (14):

$$a(t) \ge \frac{\mu_{3,0}(t)t^\gamma}{C_{18}t^\gamma + C_{19}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\gamma-1}d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}},\ t\in[0,T]. \qquad (15)$$

Позначимо $a_{min} = \min\limits_{t\in[0,T]} a(t)$. Враховуючи умови теореми 1 та означення різниці $\theta(t)-\theta(\tau)$ для a_{min} отримаємо нерівність

$$C_{18}a_{min} + C_{20}\sqrt{a_{min}} - C_{21} \ge 0,\ t\in[0,T],$$

звідки одержуємо

$$a_{min} \geq B_0, \quad \text{або} \quad a(t) \geq B_0,\ t \in [0,T]. \tag{16}$$

Для того, щоб оцінити $a = a(t)$ зверху, знайдемо оцінку функції $u_{0x}(0,t)$ знизу. В силу припущень теореми одержимо

$$u_{0x}(0,t) \geq \int\limits_0^t G_2(0,t,0,\tau)\left(\frac{f(0,\tau)}{\tau^\beta} - \mu_1'(\tau)\right) d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{n^2h^2}{\theta(t)-\theta(\tau)}\right)\right)\left(\frac{f(0,\tau)}{\tau^\beta} - \mu_1'(\tau)\right) d\tau \equiv J_1 + J_2.$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2h^2}{z}} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_n^{n+1} e^{-\frac{s^2h^2}{z}} ds = \int\limits_1^\infty e^{-\frac{s^2h^2}{z}} ds.$$

Після заміни змінних $\sigma = \dfrac{hs}{\sqrt{z}}$, приходимо до нерівності

$$\frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2h^2}{z}} \geq \frac{1}{h} \int\limits_{h/\sqrt{z}}^\infty e^{-\sigma^2}\, d\sigma.$$

Останню нерівність та (16) використаємо для оцінки J_2:

$$J_2 \geq C_{22} \int\limits_0^t \tau^{\gamma-1}\, d\tau \int\limits_{\frac{h}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}}^\infty e^{-\sigma^2}\, d\sigma \geq C_{22} \int\limits_0^t \tau^{\gamma-1}\, d\tau \int\limits_{\frac{C_{23} t^{\frac{\beta-1}{2}} \tau^{\frac{\beta-1}{2}}}{\sqrt{t^{\beta-1}-\tau^{\beta-1}}}}^\infty e^{-\sigma^2}\, d\sigma.$$

В отриманому інтегралі проведемо заміну змінних $\tau = zt$:

$$J_2 \geq C_{22} t^\gamma \int\limits_0^1 z^{\gamma-1}\, dz \int\limits_{\frac{C_{23} t^{\frac{\beta-1}{2}} z^{\frac{\beta-1}{2}}}{\sqrt{1-z^{\beta-1}}}}^\infty e^{-\sigma^2}\, d\sigma = C_{22} t^\gamma \int\limits_0^{1/2} z^{\gamma-1}\, dz \int\limits_{\frac{C_{23} t^{\frac{\beta-1}{2}} z^{\frac{\beta-1}{2}}}{\sqrt{1-z^{\beta-1}}}}^\infty e^{-\sigma^2}\, d\sigma +$$

$$+ C_{22} t^\gamma \int\limits_{1/2}^1 z^{\gamma-1}\, dz \int\limits_{\frac{C_{23} t^{\frac{\beta-1}{2}} z^{\frac{\beta-1}{2}}}{\sqrt{1-z^{\beta-1}}}}^\infty e^{-\sigma^2}\, d\sigma \geq C_{22} t^\gamma \int\limits_0^{1/2} z^{\gamma-1}\, dz \int\limits_{C_{24} T^{\frac{\beta-1}{2}}}^\infty e^{-\sigma^2}\, d\sigma \geq C_{25} t^\gamma.$$

Оскільки згідно з умовами теореми $J_1 \geq 0$, то

$$u_{0x}(0,t) \geq C_{25}t^{\gamma},\ t \in [0,T]. \tag{17}$$

Виходячи з (14), отримуємо оцінку

$$a(t) \leq \frac{\mu_{3,0}(t)t^{\gamma}}{C_{25}t^{\gamma}} \leq B_1 < \infty,\ t \in [0,T]. \tag{18}$$

Через N позначимо множину $N = \{a \in C[0,T] : B_0 \leq a(t) \leq B_1\}$. Рівняння (14) подамо у вигляді

$$a(t) = Pa(t),$$

де P визначається правою частиною рівності (14). Те, що оператор P цілком неперервний на N, доводиться подібно як в [5] і [7, с.27]. Застосовуючи теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, отримуємо існування розв'язку задачі (1), (3), (4).

Єдиність розв'язку задачі (1), (3), (4) доводитимемо від супротивного. Припустимо, що існують два розв'язки $(a_i(t), u_i(x,t)), i = 1,2$ задачі (1), (3), (4). Різниці цих розв'язків позначимо відповідно $a(t) = a_1(t) - a_2(t), u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Ці різниці задовольняють рівняння

$$t^{\beta}u_t = a_1(t)u_{xx} + a(t)u_{2xx},\ (x,t) \in Q_T \tag{19}$$

та умови

$$u(0,t) = u(h,t) = 0,\ t \in [0,T], \tag{20}$$
$$a(t)u_{2x}(0,t) + a_1(t)u_x(0,t) = 0,\ t \in [0,T]. \tag{21}$$

За допомогою функції Гріна $G_1(x,t,\xi,\tau)$ для рівняння $t^{\beta}u_t = a_1(t)u_{xx}$ задачу (19) - (21) зведемо до інтегрального рівняння Вольтерра другого роду відносно функції $a = a(t)$:

$$a(t) = -\frac{a_1(t)}{u_{2x}(0,t)} \int\limits_0^t \frac{a(\tau)}{\tau^{\beta}} d\tau \int\limits_0^h G_{1x}(0,t,\xi,\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi,\ t \in [0,T]. \tag{22}$$

Ядро рівняння (22) має інтегровну особливість, а, отже, рівняння (22) має єдиний тривіальний розв'язок, що й завершує доведення Теореми 1.

3. Доведення Теореми 2.

Позначимо $v(x,t) \equiv u_x(x,t)$. За допомогою функції Гріна $G_1(x,t,\xi,\tau)$ задачу (2) - (4) зведемо до системи рівнянь

$$u(x,t) = u_0(x,t)+$$
$$+\int_0^t\int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\left(\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^\beta}v(\xi,\tau)+\frac{c(\xi,\tau)}{\tau^\beta}u(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau,\ (x,t)\in\overline{Q}_T, \tag{23}$$
$$v(x,t) = u_{0x}(x,t)+$$
$$+\int_0^t\int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\left(\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^\beta}v(\xi,\tau)+\frac{c(\xi,\tau)}{\tau^\beta}u(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau,\ (x,t)\in\overline{Q}_T, \tag{24}$$
$$a(t)v(0,t) = \mu_3(t),\ t\in[0,T], \tag{25}$$

в якій $u_0(x,t), u_{0x}(x,t)$ визначаються формулами (6), (7).

Позначимо $V(t) = \max\limits_{x\in[0,h]} v(x,t)$, $U(t) = \max\limits_{x\in[0,h]} u(x,t)$, $a_{min}(t) = \min\limits_{0\le\tau\le t} a(\tau)$. Враховуючи припущення на вихідні дані та нерівність

$$\int_0^h |G_{1x}(x,t,\xi,\tau)|d\xi \le \frac{C_{26}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},$$

оцінимо інтеграли, котрі містяться у правих частинах рівностей (23), (24):

$$\left|\int_0^t\int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^\beta}v(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\right| \le C_{27}\int_0^t \tau^{\alpha-\beta}V(\tau)d\tau,$$

$$\left|\int_0^t\int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\frac{c(\xi,\tau)}{\tau^\beta}u(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\right| \le C_{28}\int_0^t \tau^{\alpha-\beta+\gamma}U(\tau)d\tau,$$

$$\left|\int_0^t\int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^\beta}v(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\right| \le C_{29}\int_0^t \frac{\tau^{\alpha-\beta}V(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau, \tag{26}$$
$$\left|\int_0^t\int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\frac{c(\xi,\tau)}{\tau^\beta}u(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\right| \le C_{30}\int_0^t \frac{\tau^{\alpha+\gamma-\beta}U(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau. \tag{27}$$

Беручи до уваги (10), (13), з (23), (24) отримуємо нерівності відносно функцій $U(t), V(t)$:

$$U(t) \le C_6 + C_{27}\int_0^t \tau^{\alpha-\beta}V(\tau)d\tau + C_{28}\int_0^t \tau^{\alpha-\beta+\gamma}U(\tau)d\tau,\ (x,t)\in\overline{Q}_T, \tag{28}$$

$$V(t) \le C_{17}t^{\gamma} + C_{29}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\alpha-\beta}V(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau + C_{30}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\alpha+\gamma-\beta}U(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau,\ (x,t)\in \overline{Q}_T. \tag{29}$$

Оцінимо функцію $a = a(t)$, виходячи з рівняння (25). Для цього спочатку знайдемо оцінку $v(0,t)$ знизу. Враховуючи (17), (26), (27) , стверджуємо, що існує число $t_1, 0 < t_1 < T$, яке визначається з нерівності

$$\frac{C_{25}}{2}t_1^{\gamma} - \int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\bigg(\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^{\beta}}v(\xi,\tau) + \frac{c(\xi,\tau)}{\tau^{\beta}}u(\xi,\tau)\bigg)d\xi d\tau \ge 0,$$

що для функції $v(0,t)$ виконується оцінка

$$v(0,t) \ge \frac{C_{25}}{2}t^{\gamma}, \quad t\in[0,t_1]. \tag{30}$$

Використовуючи останню нерівність в (25), отримуємо

$$a(t) \le B_2, \quad t\in[0,t_1]. \tag{31}$$

Для оцінки $a(t)$ знизу розглянемо (28), (29). Розв'язавши нерівність (28) відносно функції $U(t)$, знаходимо

$$U(t) \le C_{31} + C_{32}\int\limits_0^t \tau^{\alpha-\beta}V(\tau)d\tau,\ t\in[0,T]. \tag{32}$$

Враховуючи (32), для $V(t)$ одержуємо нерівність

$$V(t) \le C_{33}t^{\gamma} + C_{34}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\alpha+\gamma-\beta}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau + C_{35}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\alpha-\beta}V(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau. \tag{33}$$

Розв'язуючи нерівність (33) методом, викладеним в [8], знаходимо

$$V(t) \le C_{36}t^{\gamma} + \frac{C_{37}}{\sqrt{a_{min}(t)}}t^{\alpha+\gamma-\frac{\beta-1}{2}} + \frac{C_{38}}{a_{min}(t)}t^{2\alpha+\gamma-\beta+1} + \frac{C_{39}t^{\alpha-\beta+1}}{a_{min}(t)}\bigg(C_{36}t^{\gamma} +$$
$$+ \frac{C_{37}}{\sqrt{a_{min}(t)}}t^{\alpha+\gamma-\frac{\beta-1}{2}} + \frac{C_{38}}{a_{min}(t)}t^{2\alpha+\gamma-\beta+1}\bigg)\exp\bigg(\int\limits_0^t \frac{C_{40}\sigma^{\alpha-\beta}}{a_{min}(\sigma)}d\sigma\bigg),\ t\in[0,T]. \tag{34}$$

Підставляючи (34) в (25), отримаємо

$$a(t) \geq \mu_{3,0}(t)t^{\gamma}\Bigg(C_{36}t^{\gamma} + \frac{C_{37}}{\sqrt{a_{min}(t)}}t^{\alpha+\gamma-\frac{\beta-1}{2}} + \frac{C_{38}}{a_{min}(t)}t^{2\alpha+\gamma-\beta+1} + \frac{C_{39}t^{\alpha-\beta+1}}{a_{min}(t)}\times$$

$$\times\Bigg(C_{36}t^{\gamma} + \frac{C_{37}}{\sqrt{a_{min}(t)}}t^{\alpha+\gamma-\frac{\beta-1}{2}} + \frac{C_{38}}{a_{min}(t)}t^{2\alpha+\gamma-\beta+1}\Bigg)\exp\Bigg(\int\limits_0^t \frac{C_{40}\sigma^{\alpha-\beta}}{a_{min}(\sigma)}d\sigma\Bigg)\Bigg)^{-1},$$

або, після елементарних перетворень,

$$C_{36}a_{min}(t) + C_{37}t^{\alpha-\frac{\beta-1}{2}}\sqrt{a_{min}(t)} + C_{38}t^{2\alpha-\beta+1} + C_{39}t^{\alpha-\beta+1}\Bigg(C_{36} + \frac{C_{37}}{\sqrt{a_{min}(t)}}+$$

$$+\frac{C_{38}}{a_{min}(t)}t^{2\alpha-\beta+1}\Bigg)\exp\Bigg(\int\limits_0^t \frac{C_{40}\sigma^{\alpha-\beta}}{a_{min}(\sigma)}d\sigma\Bigg) - C_{41} \geq 0. \tag{35}$$

Оскільки вираз

$$K(t) \equiv C_{37}t^{\alpha-\frac{\beta-1}{2}}\sqrt{a_{min}(t)} + C_{38}t^{2\alpha-\beta+1} + C_{39}t^{\alpha-\beta+1}\Bigg(C_{36} + \frac{C_{37}}{\sqrt{a_{min}(t)}}+$$

$$+\frac{C_{38}}{a_{min}(t)}t^{2\alpha-\beta+1}\Bigg)\exp\Bigg(\int\limits_0^t \frac{C_{40}\sigma^{\alpha-\beta}}{a_{min}(\sigma)}d\sigma\Bigg)$$

прямує до нуля при $t \to 0$, то можна вказати таке число $t_2, 0 < t_2 < T$, що

$$K(t) \leq \frac{C_{41}}{2}, \quad t \in [0, t_2].$$

Тоді з нерівності (35) отримаємо, що

$$C_{36}a_{min}(t) - \frac{C_{41}}{2} \geq 0,$$

звідки

$$a(t) \geq B_4, \quad t \in [0, t_2]. \tag{36}$$

Використовуючи оцінку (36) в нерівностях (34), (32) знаходимо

$$v(x,t) \leq C_{42}t^{\gamma}, \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,t_2], \tag{37}$$

$$u(x,t) \leq C_{43}, \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,t_2]. \tag{38}$$

Доведення існування розв'язку задачі (2) - (4) закінчуємо як і у випадку рівняння теплопровідності.

Для доведення єдиності розв'язку задачі (2) - (4) використаємо ті ж міркування, що й при доведенні єдиності розв'язку задачі (1), (3), (4). У цьому випадку для відповідних різниць $a(t) = a_1(t) - a_2(t), u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ отримаємо задачу

$$t^\beta u_t = a_1(t)u_{xx} + a(t)u_{2xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u,\ (x,t) \in Q_T, \tag{39}$$

$$u(0,t) = u(h,t) = 0,\ t \in [0,T], \tag{40}$$

$$a(t)u_{2x}(0,t) + a_1(t)u_x(0,t) = 0,\ t \in [0,T]. \tag{41}$$

Позначимо $v(x,t) \equiv u_x(x,t)$. Згідно з умовами теореми 2 $u_{2x}(0,t) > 0, t \in (0,T]$, тому рівняння (41) можемо записати у вигляді

$$a(t) = -\frac{a_1(t)v(0,t)}{u_{2x}(0,t)},\ t \in [0,T]. \tag{42}$$

Використовуючи функцію Гріна $G_1(x,t,\xi,\tau)$ для рівняння $t^\beta u_t = a_1(t)u_{xx}$, задачу (39), (40) замінимо системою рівнянь

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\left(\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^\beta}v(\xi,\tau) + \frac{c(\xi,\tau)}{\tau^\beta}u(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau +$$

$$+ \int_0^t \frac{a(\tau)}{\tau^\beta}d\tau \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi,\ (x,t) \in \overline{Q}_T, \tag{43}$$

$$v(x,t) = \int_0^t \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\left(\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^\beta}v(\xi,\tau) + \frac{c(\xi,\tau)}{\tau^\beta}u(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau +$$

$$+ \int_0^t \frac{a(\tau)}{\tau^\beta}d\tau \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi,\ (x,t) \in \overline{Q}_T. \tag{44}$$

Оскільки ядра системи інтегральних рівнянь (42) - (44) мають інтегровні особливості, то система має єдиний тривіальний розв'язок. Поклавши $T_0 = \min\{t_1, t_2\}$, приходимо до твердження Теореми 2.

1. *Смирнова Г.Н.* Линейные параболические уравнения, вырождающиеся на границе области // Сиб. мат. ж. – 1963. – Т.4, №2. – С.343-357.
2. *Калашников А.С.* О растущих решениях линейных уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Мат. заметки. – 1968. – Т.3, №2. – С.171-178.
3. *Джураев Т.Д.* О краевых задачах для линейных пераболических уравнений, вырождающихся на границе области // Мат. заметки. – 1972. – Т.12, №5. – С.643-652.
4. *Глушак А.В., Шмулевич С.Д.* О некоторых корректных задачах для параболических уравнений высокого порядка, вырождающихся по временной переменной // Дифференц. уравн. – 1986. – Т.22, №6. – С.1065-1068.

5. *Іванчов М.І., Салдіна Н.В.* Обернена задача для параболічного рівняння з сильним степеневим виродженям // Укр. мат. ж. – 2006. – Т.57, №11. – С.1563-1570.
6. *Салдіна Н.В.* Ідентифікація старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні з виродженням // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2006. – №288. – С.99-106.
7. *Ivanchov M.I.* Inverse problems for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publishers, 2003. – 240p.
8. *Гринців Н.М.* Розв'язність оберненої задачі для виродженого параболічного рівняння в області з вільною межею // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2006. – №314-315. – С.40-49.

Львівський національний університет
імені Івана Франка, Львів
hryntsiv@ukr.net

Отримано 15.02.09