 М.В. Войтович

О МНОЖЕСТВАХ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С АБСОРБЦИЕЙ И L^1-ДАННЫМИ

Рассмотрена задача Дирихле для класса нелинейных уравнений дивергентного вида четвертого порядка с условием усиленной коэрцитивности на коэффициенты, абсорбцией и L^1-данными. С использованием аналога метода Стампаккья доказано существование решений этой задачи, ограниченных на множествах, где поведение данных достаточно регулярно.

Ключевые слова: нелинейные уравнения четвертого порядка, усиленная коэрцитивность, абсорбция, L^1-данные, H – решение.
MSC (2000): 35J40; 35B45

Введение.

В статье рассматривается класс нелинейных уравнений дивергентного вида четвертого порядка с коэффициентами, удовлетворяющими условию усиленной коэрцитивности, абсорбцией и L^1-данными. Модельным представителем этого класса является уравнение

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{|\alpha|=1} D^\alpha\Big[\Big(\sum_{|\beta|=1}|D^\beta u|^2\Big)^{(q-2)/2} D^\alpha u\Big] + \\
&\sum_{|\alpha|=2} D^\alpha\Big[\Big(\sum_{|\beta|=2}|D^\beta u|^2\Big)^{(p-2)/2} D^\alpha u\Big] = -|u|^{\sigma-1}u + f \quad \text{в} \quad \Omega,
\end{aligned}
$$

где Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, $1 < p < n/2$, $2p < q < n$, $\sigma > 1$ и $f \in L^1(\Omega)$.

Существование решений задачи Дирихле для уравнений данного класса установлено в [1]. Свойства интегрируемости этих решений рассмотрены в [2]. С использованием результатов работ [1], [2] и аналога метода Стампаккья (см., например [3]–[5]), в настоящей работе доказано существование решений той же задачи, ограниченных на множествах, где поведение данных задачи достаточно регулярно.

Отметим, что для вырожденных нелинейных уравнений четвертого порядка с усиленной коэрцитивностью и L^1-данными результаты подобного типа были установлены в работах [6] и [7] с помощью некоторой модификации метода Мозера (см. [8]). При этом в [6] существенной была определенная зависимость между показателем роста коэффициентов уравнений по переменным, соответствующим производным первого порядка неизвестной функции, и показателем, характеризующим вложение используемых весовых пространств Соболева в соответствующее невесовое пространство Лебега. В работе [7] в случае $p = 2$ это ограничение было снято за счет условия на показатель абсорбции σ в соответствующем уравнении. В настоящей работе предполагается выполнение подобного условия. Однако, если говорить о невырожденном случае, то условия на локальную интегрируемость данных, накладываемые в настоящей работе, являются более слабыми по сравнению с теми, которые предполагаются в [6] и [7].

Отметим ещё, что ограниченность и непрерывность по Гельдеру обобщенных решений нелинейных эллиптических уравнений и вариационные неравенства высших порядков с коэффициентами, удовлетворяющими условию усиленной коэрцитивности, и достаточно регулярными данными уже изучены в [8] (невырожденный случай) и в [9] – [11] (вырожденный случай). Свойства интегрируемости обобщенных решений нелинейных уравнений высших порядков с усиленной коэрцитивностью и правыми частями из L^t с достаточно большим t, были установлены в [3], [4]. При этом было получено более слабое по сравнению с [8] условие на показатель суммируемости правой части уравнения, обеспечивающее ограниченность решений.

1. Исходные предположения, используемые функциональные множества и свойства их элементов.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$.

Через Λ обозначим множество всех n-мерных мультииндексов α таких, что $|\alpha| = 1$ или $|\alpha| = 2$, а через $\mathbb{R}^{n,2}$ – пространство всех отображений $\xi : \Lambda \to \mathbb{R}$. Если $u \in W^{2,1}(\Omega)$, то $\nabla_2 u : \Omega \to \mathbb{R}^{n,2}$, причем для любых $x \in \Omega$ и $\alpha \in \Lambda$ имеем $(\nabla_2 u(x))_\alpha = D^\alpha u(x)$.

Пусть $p \in (1, n/2)$ и $q \in (2p, n)$. Через $W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ обозначим множество всех функций из $W^{1,q}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные второго порядка из $L^p(\Omega)$. Множество $W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ – банахово пространство с нормой

$$\|u\| = \|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} + \left(\sum_{|\alpha|=2} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Через $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ обозначим замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в $W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$.

Для любого $b \in [1, n)$ положим $b^* = nb/(n - b)$.

Как известно (см., например [12, гл.7]),

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\Omega) \subset L^{q*}(\Omega), \tag{1}$$

и существует положительная постоянная c, зависящая только от n и q, такая, что для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\Omega)$

$$\left(\int_\Omega |u|^{q^*} dx \right)^{1/q^*} \leqslant c \left(\sum_{|\alpha|=1} \int_\Omega |D^\alpha u|^q \, dx \right)^{1/q}. \tag{2}$$

Теперь, так же, как и в работах [13], [1], введем множество функций $\overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$, более широкое, чем пространство $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$, и содержащее даже несуммируемые локально функции.

Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ $\tilde{\psi}_k$ – функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$\tilde{\psi}_k(s) = s \ - s^{\,k+2} + \frac{k+1}{k+3} s^{\,k+3}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Определим для любого $k \in \mathbb{N}$ функцию $\tilde{h}_k \in C^{\,2}(\mathbb{R})$, полагая

$$\tilde{h}_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \leqslant k, \\ \left[\tilde{\psi}_k \left(\frac{|s|-k}{k} \right) + 1 \right] k \operatorname{sign} s, & \text{если } k < |s| < 2k, \\ 2k \frac{k+2}{k+3} \operatorname{sign} s, & \text{если } |s| \geqslant 2k. \end{cases}$$

Через $\overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ обозначим множество всех функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию: $\tilde{h}_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Определение 1.1. *Если $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ и $\alpha \in \Lambda$, то $\delta^\alpha u$ – функция на Ω такая, что $\delta^\alpha u = D^\alpha \tilde{h}_1(u)$ на $\{|u| \leqslant 1\}$ и $\forall k \in \mathbb{N}$ $\delta^\alpha u = D^\alpha \tilde{h}_{2^k}(u)$ на $\{2^{k-1} < |u| \leqslant 2^k\}$.*

Это определение введено в [13] и [1] и эквивалентно определению, данному в [2] в другой форме.

Отметим, что $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega) \subset \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$, однако обратное включение, вообще говоря, не верно. Кроме того, если $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$, $\alpha \in \Lambda$, то $\delta^\alpha u = D^\alpha u$ п.в. на Ω (см. [1] и [2]).

В работе будут полезны следующие вспомогательные результаты.

Лемма 1.1. *Пусть $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда:*

1) *если α – n-мерный мультииндекс, $|\alpha| = 1$, то*

$$D^\alpha \tilde{h}_k(u) = \tilde{h}'_k(u)\, \delta^\alpha u \quad \text{п.в.} \quad \text{на} \quad \Omega;$$

2) *если α – n-мерный мультииндекс, $|\alpha| = 2$, то*

$$|D^\alpha \tilde{h}_k(u)| \leqslant |\delta^\alpha u| + 3 \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^2 \quad \text{п.в.} \quad \text{на} \quad \Omega.$$

Лемма 1.2. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$, $\lambda \in [1, q]$. *Пусть для любого* n*-мерного мультииндекса* α, $|\alpha| = 1$, *имеет место включение* $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$. *Тогда* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$.

Лемма 1.3. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$, $\lambda \in [1, p]$ *и для любого* n*-мерного мультииндекса* α, $|\alpha| = 1$, *имеет место включение* $\delta^\alpha u \in L^{2\lambda}(\Omega)$. *Пусть для любого* n*-мерного мультииндекса* α, $|\alpha| = 2$, *имеет место включение* $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$. *Тогда* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{2,\lambda}(\Omega)$.

Лемма 1.4. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$. *Пусть* α *– мультииндекс такой, что* $|\alpha| = 1$, *и пусть* $\delta^\alpha u \in L^1(\Omega)$. *Тогда существует обобщенная производная* $D^\alpha u$, *причем* $D^\alpha u = \delta^\alpha u$ *п.в. на* Ω.

Лемма 1.5. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$. *Пусть* α *– мультииндекс такой, что* $|\alpha| = 2$, *и пусть* $\delta^\alpha u \in L^1(\Omega)$. *Предположим еще, что*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\{|u|>k\}} |D^\alpha \tilde{h}_k(u)|\, dx = 0.$$

Тогда существует обобщенная производная $D^\alpha u$, *причем* $D^\alpha u = \delta^\alpha u$ *п.в. на* Ω.

Отметим, что леммы 1.1 – 1.3 доказаны в [2], а леммы 1.4 и 1.5 установлены в [1].

Введем обозначение: если $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$, то $\delta_2 u : \Omega \to \mathbb{R}^{n,2}$, причем для любых $x \in \Omega$ и $\alpha \in \Lambda$ имеем $(\delta_2 u(x))_\alpha = \delta^\alpha u(x)$.

2. Задача Дирихле с L^1-данными и соответствующие аппроксимирующие задачи.

Пусть $c_1, c_2 > 0$, g – неотрицательная суммируемая функция на Ω, и пусть $A_\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^{n,2} \to \mathbb{R}$ – функция Каратеодори для любого $\alpha \in \Lambda$. Будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^{n,2}$ справедливы неравенства

$$\sum_{|\alpha|=1} |A_\alpha(x,\xi)|^{q/(q-1)} + \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x,\xi)|^{p/(p-1)}$$

$$\leqslant c_1 \Big\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \Big\} + g(x), \tag{3}$$

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x,\xi)\,\xi_\alpha \geqslant c_2 \Big\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \Big\} - g(x). \tag{4}$$

Кроме того, будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$, имеет место неравенство

$$\sum_{\alpha\in\Lambda}[A_\alpha(x,\xi)-A_\alpha(x,\xi')](\xi_\alpha-\xi'_\alpha)>0. \tag{5}$$

Пусть еще $F:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – функция Каратеодори, такая что
a) для почти всех $x\in\Omega$ функция $F(x,\cdot)$ невозрастающая на $\mathbb{R}$;
b) для любого $s\in\mathbb{R}$ функция $F(\cdot,s)$ принадлежит $L^1(\Omega)$.
Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\sum_{\alpha\in\Lambda}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha A_\alpha(x,\nabla_2 u)=F(x,u)\quad \text{в}\quad \Omega, \tag{6}$$

$$D^\alpha u=0,\quad |\alpha|=0,1,\quad \text{на}\quad \partial\Omega. \tag{7}$$

Определение 2.1. *H-решением задачи* (6), (7) *будем называть функцию* $u\in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$, *удовлетворяющую условиям:*
1) $F(x,u)\in L^1(\Omega)$;
2) $A_\alpha(x,\delta_2 u)\in L^1(\Omega)$ *для любого* $\alpha\in\Lambda$;
3) *для любой функции* $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega\Big\{\sum_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha(x,\delta_2 u)\,\delta^\alpha\phi\Big\}dx=\int_\Omega F(x,u)\,\phi\,dx.$$

Отметим, что понятие H-решения задачи (6), (7) введено в [13] и [1]. Там же установлено существование таких решений. При этом доказательство разрешимости задачи (6), (7) было основано на рассмотрении последовательности аппроксимирующих задач для уравнений с ограниченными правыми частями, получении специальных оценок для решений этих задач и последующем предельном переходе.

Опишем рассмотренные в работе [1] аппроксимирующие задачи. С этой целью определим для каждого $i\in\mathbb{N}$ функцию $F_i:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ равенством

$$F_i(x,s)=\tilde h_i(F(x,0)-F(x,s)),\qquad (x,s)\in\Omega\times\mathbb{R}.$$

В силу свойства **a)** функции F имеем: если $i\in\mathbb{N}$, то

$$\text{для почти всех}\ \ x\in\Omega\ \ \text{функция}\ \ F_i(x,\cdot)\ \text{не убывает на}\ \mathbb{R}. \tag{8}$$

Далее, в силу свойства **b)** функции F имеем $F(\cdot,0)\in L^1(\Omega)$ и, следовательно, существует последовательность $\{f_i\}\subset C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$\lim_{i\to\infty}\|f_i-F(\cdot,0)\|_{L^1(\Omega)}=0. \tag{9}$$

Используя неравенства (2)–(5), свойство (8) и известные результаты о разрешимости уравнений с монотонными операторами (см., например [14]), получаем: если $i\in\mathbb{N}$, то существует функция $u_i\in\overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ такая, что для любой функции $v \in \mathring{W}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x,\nabla_2 u_i) D^\alpha v + F_i(x,u_i)\, v \right\} dx = \int_\Omega f_i\, v\, dx. \tag{10}$$

Другими словами, функция $u_i \in \mathring{W}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ есть обобщенное решение следующей задачи Дирихле:

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} (-1)^{|\alpha|}\, D^\alpha A_\alpha(x,\nabla_2 u) + F_i(x,u) = f_i \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{11}$$

$$D^\alpha u = 0, \quad |\alpha| = 0,1, \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{12}$$

В силу изложенного в § 7 работы [1] существуют возрастающая последовательность $\{i_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in \mathring{H}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ такие, что u есть H-решение задачи (6), (7)

$$u_{i_j} \to u \quad \text{п.в.} \;\; \text{на} \quad \Omega, \tag{13}$$

$$\forall\ \alpha \in \Lambda \quad D^\alpha u_{i_j} \to \delta^\alpha u \quad \text{п.в.} \;\; \text{на} \quad \Omega. \tag{14}$$

В настоящей работе возникает необходимость рассмотрения аппроксимирующей задачи, отличной от задачи (11), (12). Определим для любого $i \in \mathbb{N}$ функцию $\bar f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\bar f_i(x) = \begin{cases} F(x,0), & \text{если } |F(x,0)| \leqslant i, \\ 0, & \text{если } |F(x,0)| > i. \end{cases}$$

Пусть еще $\bar F : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, причем

$$\forall\ (x,s) \in \Omega\times\mathbb{R}\,, \qquad \bar F(x,s) = F(x,0) - F(x,s).$$

Зафиксируем $i \in \mathbb{N}$ и рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} (-1)^{|\alpha|}\, D^\alpha A_\alpha(x,\nabla_2 w) + \bar F(x,w) = \bar f_i \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{15}$$

$$D^\alpha w = 0, \quad |\alpha| = 0,1, \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{16}$$

Отметим, что функция $\bar F$, в отличии от функции F_i, неограничена. Поэтому, в отличии от задачи (11), (12), доказательство разрешимости задачи (15), (16) уже не укладывается в обычную схему теории монотонных операторов, а опирается на результаты работы [1] и леммы 1.1 – 1.5.

Теорема 2.1. *Пусть $i \in \mathbb{N}$. Тогда существует функция $\bar u_i \in \mathring{W}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ такая, что*

$$\bar F(x,\bar u_i) \in L^1(\Omega), \quad \bar F(x,\bar u_i)\, \bar u_i \in L^1(\Omega), \tag{17}$$

$\forall\ \phi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 \bar{u}_i) D^\alpha \phi \right\} dx + \int_\Omega \bar{F}(x, \bar{u}_i)\, \phi\, dx = \int_\Omega \bar{f}_i\, \phi\, dx. \tag{18}$$

Следующие три леммы являются последовательными этапами доказательства теоремы 2.1. В доказательствах этих лемм используются рассмотрения и построения работ [1] и [2].

Далее через c_i, $i = 3, 4, \dots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от n, p, q, c_1, c_2, $\|g\|_{L^1(\Omega)}$ и $\mathrm{meas}\Omega$.

Лемма 2.1. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем*

$$c_2 \int_\Omega \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} \tilde{h}'_k(u)\, dx \leqslant 12 \int_\Omega |F(\cdot, 0)| |\tilde{h}_k(u)|\, dx + c_3.$$

Доказательство. Пусть $\{\chi_k\} \subset C^2(\mathbb{R})$ последовательность функций такая, что для любого $k \in \mathbb{N}$,

$$\chi_k(s) = s, \quad \text{если} \quad |s| \leqslant k,$$

$$|\chi_k| \leqslant 3k \quad \text{на} \quad \mathbb{R}, \tag{19}$$

$$0 < \chi'_k \leqslant 1 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}, \tag{20}$$

$$|\chi''_k| \leqslant \frac{8}{k}\, \chi'_k \quad \text{на} \quad \mathbb{R}. \tag{21}$$

Такая последовательность построена в [1].

Зафиксируем произвольные $k, i \in \mathbb{N}$. Имеем $\chi_k(u_i) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$, причем для α с $|\alpha| = 1$ п.в. на Ω

$$D^\alpha \chi_k(u_i) = \chi'_k(u_i) D^\alpha u_i, \tag{22}$$

а для α с $|\alpha| = 2$ п.в. на Ω

$$|D^\alpha \chi_k(u_i) - \chi'_k(u_i) D^\alpha u_i| \leqslant |\chi''_k(u_i)| \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u_i|^2. \tag{23}$$

Подставляя в (10) вместо v функцию $\chi_k(u_i)$, получаем

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u_i)\, D^\alpha \chi_k(u_i) + F_i(x, u_i)\, \chi_k(u_i) \right\} dx = \int_\Omega f_i\, \chi_k(u_i)\, dx. \tag{24}$$

В силу (24), (8) и свойств функции χ_k имеем:

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u_i)\, D^\alpha \chi_k(u_i) \right\} dx \leqslant \int_\Omega f_i\, \chi_k(u_i)\, dx. \tag{25}$$

Обозначим через $I_{k,i}$ интеграл в левой части неравенства (25) и положим

$$J_{k,i} = \int_\Omega \bigg\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_i|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_i|^p \bigg\} \chi_k'(u_i)\, dx.$$

Используя (4), (22) и (23), находим, что

$$I_{k,i} \geqslant c_2\, J_{k,i} - \int_\Omega g\, \chi_k'(u_i)\, dx$$

$$- \int_\Omega \bigg\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \nabla_2 u_i)| \bigg\} \bigg\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_i|^2 \bigg\} |\chi_k''(u_i)|\, dx. \qquad (26)$$

Получим подходящую оценку для последнего интеграла в правой части неравенсва (26). Обозначим этот интеграл через $J_{k,i}'$ и положим

$$c_4 = \frac{c_2}{16}\, [c_1 n^{2p/(p-1)} + n^{q/2}]^{-1}.$$

Используя неравенство Юнга с показателями $p/(p-1)$, $q/2$, $qp/(q-2p)$ и (3), устанавливаем, что п.в. на Ω

$$\bigg\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \nabla_2 u_i)| \bigg\} \bigg\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_i|^2 \bigg\}$$

$$\leqslant \frac{c_2}{16} \bigg\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_i|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_i|^p \bigg\} + \frac{c_2}{16 c_1}\, g + c_5.$$

Тогда, принимая во внимание (20), (21), получаем

$$J_{k,\,i}' \leqslant \frac{c_2}{2}\, J_{k,\,i} + \frac{c_2}{2c_1}\, \|g\|_{L^1(\Omega)} + c_5 \operatorname{meas} \Omega. \qquad (27)$$

Из (27), (26) следует, что $I_{k,\,i} \geqslant \frac{c_2}{2}\, J_{k,\,i} - c_6$. Из этого неравенства и (25) вытекает, что

$$\frac{c_2}{2}\, J_{k,i} \leqslant \int_\Omega f_i\, \chi_k(u_i)\, dx + c_6.$$

Отсюда, учитывая (13), (14), (9), свойства функции χ_k и используя лемму Фату, выводим, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{c_2}{2} \int_{\{|u|<k\}} \bigg\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \bigg\} dx \leqslant \int_\Omega |F(\cdot, 0)||\chi_k(u)|\, dx + c_6. \qquad (28)$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Поскольку $\tilde{h}_k'(s) = 0$, если $|s| \geqslant 2k$, и $0 \leqslant \tilde{h}_k' \leqslant 1$ на $\mathbb{R}$, используя (28), получаем

$$c_2 \int_\Omega \bigg\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \bigg\} \tilde{h}_k'(u)\, dx$$

$$\leqslant c_2 \int_{\{|u|<2k\}} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} dx$$

$$\leqslant 2 \int_\Omega |F(\cdot,0)||\chi_{2k}(u)|\, dx + 2c_6. \tag{29}$$

Заметим, что в силу свойств функций χ_k и $\tilde{h}_k$ имеем $|\chi_{2k}(u)| \leqslant 6|\tilde{h}_k(u)|$ на Ω. Учитывая это, из (29) выводим требуемое неравенство. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть* $F(\cdot,0) \in L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega)$. *Тогда существует функция* $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ *такая, что* $F(x,u_0) \in L^1(\Omega)$ *и для любой функции* $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u_0) D^\alpha \phi \right\} dx = \int_\Omega F(x,u_0)\phi\, dx.$$

Доказательство. В силу выше изложенного, в частности, леммы 2.1 существует функция $u_0 \in \overset{\circ}{\tilde{H}}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ такая, что

(i) $F(x,u_0) \in L^1(\Omega)$;

(ii) для любого $\alpha \in \Lambda$, $A_\alpha(x, \delta_2 u_0) \in L^1(\Omega)$;

(iii) для любой функции $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u_0)\, \delta^\alpha \phi \right\} dx = \int_\Omega F(x,u_0)\phi\, dx;$$

(iv) для любого $k \in \mathbb{N}$

$$c_2 \int_\Omega \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u_0|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u_0|^p \right\} \tilde{h}'_k(u_0)\, dx \leqslant 12 \int_\Omega |F(\cdot,0)||\tilde{h}_k(u_0)|\, dx + 2c_6.$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и положим

$$I_k = \int_\Omega \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u_0|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u_0|^p \right\} \tilde{h}'_k(u_0)\, dx.$$

Из (iv) и неравенства Гельдера следует, что

$$c_2 I_k \leqslant 12\, \|F(\cdot,0)\|_{L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega)} \left(\int_\Omega |\tilde{h}_k(u_0)|^{q^*} dx \right)^{1/q^*} + 2c_6. \tag{30}$$

В силу неравенства (2)

$$\left(\int_\Omega |\tilde{h}_k(u_0)|^{q^*} dx \right)^{1/q^*} \leqslant c \sum_{|\alpha|=1} \left(\int_\Omega |D^\alpha \tilde{h}_k(u_0)|^q dx \right)^{1/q}. \tag{31}$$

Отсюда, учитывая лемму 1.1 и то, что $0 \leqslant \tilde{h}'_k \leqslant 1$ на $\mathbb{R}$, получаем $\forall\, \alpha$, $|\alpha| = 1$,

$$\int_\Omega |D^\alpha \tilde{h}_k(u_0)|^q dx \leqslant I_k.$$

Учитывая это, из (31) получаем

$$\left(\int_\Omega |\tilde{h}_k(u_0)|^{q^*}\, dx \right)^{1/q^*} \leqslant c\, n\, I_k^{1/q}.$$

Отсюда и из (30), используя неравенство Юнга, выводим, что

$$I_k \leqslant c_7 \left(1 + \|F(\cdot, 0)\|^{q/(q-1)}_{L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega)} \right). \tag{32}$$

Из (32) и леммы Фату, учитывая определение функции $\tilde{h}_k$, выводим, что

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u_0|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u_0|^p \right\} dx \leqslant c_7 \left(1 + \|F(\cdot, 0)\|^{q/(q-1)}_{L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega)} \right). \tag{33}$$

Отсюда и из лемм 1.2 и 1.3 следует, что $u_0 \in W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$.

Учитывая последнее включение и леммы 1.4, 1.5 и 1.1, имеем

$$\forall\ \alpha \in \Lambda, \quad D^\alpha u_0 = \delta^\alpha u_0 \quad \text{п. в.} \quad \text{на} \quad \Omega. \tag{34}$$

Отсюда и из леммы 1.1 вытекает ограниченность последовательности $\{\tilde{h}_k(u_0)\}$ в $\mathring{W}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$. Ясно, также, что последовательность $\{\tilde{h}_k(u_0)\}$ сильно сходится к u_0 в $L^q(\Omega)$. Теперь заключаем, что $u_0 \in \mathring{W}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$.

Наконец, из утверждения (iii) и (34) следует, что для любой функции $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u_0) D^\alpha \phi \right\} dx = \int_\Omega F(x, u_0) \phi\, dx.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть $F(\cdot, 0) \in L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega)$. Тогда существует функция $u_0 \in \mathring{W}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ такая, что*

(i) $F(x, u_0) \in L^1(\Omega)$;

(ii) для любой функции $\phi \in \mathring{W}^{1,q}_{2,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u_0) D^\alpha \phi \right\} dx = \int_\Omega F(x, u_0) \phi\, dx.$$

(iii) $F(x, u_0) u_0 \in L^1(\Omega)$.

Доказательство. В силу леммы 2.2 существует функция $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ такая, что $F(x,u_0) \in L^1(\Omega)$ и для любой функции $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x,\nabla_2 u_0) D^\alpha \phi \right\} dx = \int_\Omega F(x,u_0)\phi\, dx. \tag{35}$$

Пусть теперь $\phi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Возьмем последовательность $\{\phi_j\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ такую, что

$$\phi_j \to \phi \quad \text{сильно в} \quad \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega), \tag{36}$$

$$\phi_j \to \phi \quad \text{п. в.} \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{37}$$

$$\forall\, j \in \mathbb{N} \quad |\phi_j| \leqslant \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} + 1 \quad \text{на} \quad \Omega. \tag{38}$$

Используя (35), для любого $j \in \mathbb{N}$ получаем

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x,\nabla_2 u_0) D^\alpha \phi_j \right\} dx = \int_\Omega F(x,u_0)\phi_j\, dx.$$

Теперь, используя (36)–(38), в последнем равенстве перейдем к пределу при $j \to \infty$. Получим

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x,\nabla_2 u_0) D^\alpha \phi \right\} dx = \int_\Omega F(x,u_0)\phi\, dx.$$

Значит, утверждение (ii) доказано.

Докажем утверждение (iii). Пусть $k \in \mathbb{N}$. Имеем $\chi_k(u_0) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, причем для α с $|\alpha| = 1$ п. в. на Ω

$$D^\alpha \chi_k(u_0) = \chi_k'(u_0) D^\alpha u_0, \tag{39}$$

а для α с $|\alpha| = 2$ п. в. на Ω

$$|D^\alpha \chi_k(u_0) - \chi_k'(u_0) D^\alpha u_0| \leqslant |\chi_k''(u_0)| \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u_0|^2. \tag{40}$$

Из утверждения (ii) следует, что

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x,\nabla_2 u_0) D^\alpha \chi_k(u_0) \right\} dx = \int_\Omega F(x,u_0)\, \chi_k(u_0)\, dx.$$

Отсюда с помощью (39) и (40) получаем

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x,\nabla_2 u_0) D^\alpha u_0 \right\} \chi_k'(u_0)\, dx + \int_\Omega [F(\cdot,0) - F(x,u_0)] \chi_k(u_0)\, dx$$

$$\leqslant \int_{\Omega} |F(\cdot,0)||\chi_k(u_0)|\,dx + I'_k, \tag{41}$$

где

$$I'_k = \int_{\Omega} \Big\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x,\nabla_2 u_0)| \Big\} \Big\{ \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u_0|^2 \Big\} |\chi''_k(u_0)|\,dx.$$

С помощью рассуждений аналогичных доказательству (27) выводим

$$I'_k \leqslant \frac{c_2}{2} \int_{\Omega} \Big\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_0|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_0|^p \Big\} \chi'_k(u_0)\,dx$$

$$+ \frac{c_2}{2c_1} \|g\|_{L^1(\Omega)} + c_5 \operatorname{meas}\Omega. \tag{42}$$

Кроме того, в силу (4)

$$\int_{\Omega} \Big\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x,\nabla_2 u_0) D^\alpha u_0 \Big\} \chi'_k(u_0)\,dx$$

$$\geqslant c_2 \int_{\Omega} \Big\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_0|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_0|^p \Big\} \chi'_k(u_0)\,dx - \int_{\Omega} g\chi'_k(u_0)\,dx. \tag{43}$$

Положим

$$Z = \int_{\Omega} \Big\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_0|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_0|^p \Big\} \chi'_k(u_0)\,dx.$$

Теперь из (41)–(43) следует

$$\frac{c_2}{2} Z + \int_{\Omega} [F(\cdot,0) - F(x,u_0)]\,\chi_k(u_0)\,dx \leqslant c_8 + \int_{\Omega} |F(\cdot,0)||\chi_k(u_0)|\,dx$$

$$\leqslant c_8 + \|F(\cdot,0)\|_{L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega)} \Big(\int_{\Omega} |\chi_k(u_0)|^{q^*} dx \Big)^{1/q^*}. \tag{44}$$

В силу неравенства (2) имеем

$$\Big(\int_{\Omega} |\chi_k(u_0)|^{q^*} dx \Big)^{1/q^*} \leqslant c \sum_{|\alpha|=1} \Big(\int_{\Omega} |D^\alpha \chi_k(u_0)|^q\,dx \Big)^{1/q}$$

$$\leqslant c \sum_{|\alpha|=1} \Big(\int_{\Omega} |D^\alpha u_0|^q \chi'_k(u_0)\,dx \Big)^{1/q} \leqslant c\,n Z^{1/q}.$$

Отсюда и из (44) получаем

$$\frac{c_2}{2} Z + \int_{\Omega} [F(\cdot,0) - F(x,u_0)]\,\chi_k(u_0)\,dx \leqslant c_8 + c_9 Z^{\,1/q} \|F(\cdot,0)\|_{L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega)}.$$

Следовательно,

$$\int_\Omega [F(\cdot,0)-F(x,u_0)]\,\chi_k(u_0)\,dx \leqslant c_8 + c_{10}\|F(\cdot,0)\|^{q/(q-1)}_{L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega)}. \qquad (45)$$

Из условия **a)** относительно функции F и свойств функции χ_k следует, что

$$[F(\cdot,0)-F(x,u_0)]\,\chi_k(u_0) \geqslant 0 \quad \text{п. в.} \quad \text{на} \quad \Omega.$$

Отсюда и из (45) с помощью леммы Фату выводим $[F(\cdot,0)-F(x,u_0)]\,u_0 \in L^1(\Omega)$. Тогда, учитывая включение $F(\cdot,0) \in L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega)$, получаем $F(x,u_0)\,u_0 \in L^1(\Omega)$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 2.1. Определим функцию $G_i : \Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ следующим образом:

$$G_i(x,s) = \bar f_i(x) - \bar F(x,s).$$

Ясно, что функция G_i удовлетворяет условиям:

(i) для почти всех $x\in\Omega$ функция $G_i(x,\cdot)$ невозрастающая на $\mathbb{R}$;

(ii) для любого $s\in\mathbb{R}$ функция $G_i(\cdot,s)$ принадлежит $L^1(\Omega)$;

(iii) $G_i(\cdot,0)\in L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega)$.

Поэтому, в силу леммы 2.3 существует функция $\bar u_i \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ такая, что $G_i(x,\bar u_i) \in L^1(\Omega)$, $G_i(x,\bar u_i)\,\bar u_i \in L^1(\Omega)$ и для любой функции $\phi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \Big\{\sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x,\nabla_2\bar u_i)D^\alpha\phi\Big\}\,dx = \int_\Omega G_i(x,\bar u_i)\phi\,dx. \qquad (46)$$

Ясно, что $\bar F(x,\bar u_i)\in L^1(\Omega)$, $\bar F(x,\bar u_i)\,\bar u_i \in L^1(\Omega)$ и в силу (46) для любой функции $\phi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \Big\{\sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x,\nabla_2\bar u_i)D^\alpha\phi\Big\}\,dx + \int_\Omega \bar F(x,\bar u_i)\phi\,dx = \int_\Omega \bar f_i\phi\,dx.$$

Теорема 2.1 доказана.

Таким образом, зафиксирована последовательность $\{\bar u_i\}\subset \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ такая, что для каждого $i\in\mathbb{N}$ справедливы включения (17) и для любых $i\in\mathbb{N}$ и $\phi\in\overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ справедливо равенство (18).

Лемма 2.4. *Для любого $i\in\mathbb{N}$ имеем*

$$\int_\Omega |\bar F(x,\bar u_i)|dx \leqslant \bar C, \qquad (47)$$

где $\bar{C}$ *– положительная константа, зависящая только от* n, p, q, c_1, c_2, $\operatorname{meas}\Omega$ *и норм в* $L^1(\Omega)$ *функций* g, $F(\cdot,0)$ *и* $F(\cdot,\pm 1)$.

Доказательство. Зафиксируем $i,k\in\mathbb{N}$. Имеем $\chi_k(\bar{u}_i)\in \mathring{W}^{1,q}_{2,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. В силу (18)

$$\int_\Omega \Big\{\sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x,\nabla_2\bar{u}_i)D^\alpha\chi_k(\bar{u}_i)\Big\}\,dx+\int_\Omega \bar{F}(x,\bar{u}_i)\,\chi_k(\bar{u}_i)\,dx=\int_\Omega \bar{f}_i\,\chi_k(\bar{u}_i)\,dx. \tag{48}$$

Положим

$$\bar{J}_{k,i}=\int_\Omega\Big\{\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha\bar{u}_i|^q+\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha\bar{u}_i|^p\Big\}\chi_k'(\bar{u}_i)\,dx.$$

$$\bar{J}'_{k,i}=\int_\Omega\Big\{\sum_{|\alpha|=2}|A_\alpha(x,\nabla_2\bar{u}_i)|\Big\}\Big\{\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha\bar{u}_i|^2\Big\}|\chi_k''(\bar{u}_i)|\,dx.$$

Аналогично (26) и (27), имеем

$$c_2\bar{J}_{k,i}\leqslant\int_\Omega\Big\{\sum_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha(x,\nabla_2\bar{u}_i)D^\alpha\chi_k(\bar{u}_i)\Big\}\,dx+\bar{J}'_{k,i}+\int_\Omega g\,\chi_k'(\bar{u}_i)\,dx. \tag{49}$$

$$\bar{J}'_{k,i}\leqslant\frac{c_2}{2}\,\bar{J}_{k,i}+\frac{c_2}{2c_1}\,\|g\|_{L^1(\Omega)}+c_5\operatorname{meas}\Omega. \tag{50}$$

Из (48) – (50) выводим

$$\frac{c_2}{2}\,\bar{J}_{k,i}+\int_\Omega\bar{F}(x,\bar{u}_i)\,\chi_k(\bar{u}_i)\,dx\leqslant\int_\Omega\bar{f}_i\,\chi_k(\bar{u}_i)\,dx+c_{11}. \tag{51}$$

Отсюда, с учетом (19) и того, что $\bar{F}(x,\bar{u}_i)\,\chi_k(\bar{u}_i)\geqslant 0$ п. в. на Ω, следует

$$\int_{\{|\bar{u}_i|\geqslant k\}}|\bar{F}(x,\bar{u}_i)|\,|\chi_k(\bar{u}_i)|\,dx\leqslant 3k\|F(\cdot,0)\|_{L^1(\Omega)}+c_{11}.$$

Из этого неравенства, учитывая тот факт, что $|\chi_k(\bar{u}_i)|\geqslant k$ на $\{|\bar{u}_i|\geqslant k\}$, получаем

$$\int_{\{|\bar{u}_i|\geqslant k\}}|\bar{F}(x,\bar{u}_i)|\,dx\leqslant 3\|F(\cdot,0)\|_{L^1(\Omega)}+c_{11}.$$

В частности,

$$\int_{\{|\bar{u}_i|\geqslant 1\}}|\bar{F}(x,\bar{u}_i)|\,dx\leqslant 3\|F(\cdot,0)\|_{L^1(\Omega)}+c_{11}. \tag{52}$$

Легко видеть, что п. в. на $\{|\bar{u}_i|<1\}$

$$|\bar{F}(x,\bar{u}_i)|\leqslant|F(\cdot,0)|+|F(x,\bar{u}_i)|\leqslant 2|F(\cdot,0)|+|F(\cdot,1)|+|F(\cdot,-1)|.$$

Отсюда и из (52) следует (47). Лемма доказана.

Далее, аналогично изложенному в параграфах 7 и 2 работы [1] устанавливается существование H-решения $\bar{u}$ задачи (6), (7) и возрастающей последовательности $\{i_j\} \subset \mathbb{N}$, таких что

$$\bar{u}_{i_j} \to \bar{u} \quad \text{п. в. в } \Omega. \tag{53}$$

Заметим, что в силу (51) и леммы 2.5 из [1] для произвольных $k, i \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{meas}\{|\bar{u}_i| \geqslant k\} \leqslant c_{12} k^{-q^*(q-1)/q}, \tag{54}$$

где c_{12} – положительная константа, зависящая только от n, p, q, c_1, c_2, $\operatorname{meas}\Omega$ и норм в $L^1(\Omega)$ функций g и $F(\cdot, 0)$.

Из (54) и леммы 2.6 из [1] следует, что для каждого $i \in \mathbb{N}$ и любого $\lambda \in (0, q^*(q-1)/q)$

$$\int_\Omega |\bar{u}_i|^\lambda \, dx \leqslant c_{13}, \tag{55}$$

где c_{13} – положительная константа, зависящая только от тех же параметров, что и c_{12}, и λ. Отметим, также, что при $\lambda \geqslant q^*(q-1)/q$ последовательность $\{\|\bar{u}_i\|_{L^\lambda(\Omega)}\}$, вообще говоря, может быть неограниченной (по этому поводу см., например, [15]).

В дальнейшем будем использовать "локальный" аналог метода Стампаккья изучения свойств интегрируемости решений. В связи с этим возникает необходимость в выполнении неравенства (55) при $\lambda > q$. Для того, чтобы обеспечить это, не привлекая ограничение $q < q^*(q-1)/q$, сделаем следующее дополнительное предположение относительно функции F.

Предположение 2.5. Существуют $\bar{c} > 0$, $\bar{\sigma} \in (q, n)$ и $f \in L^1(\Omega)$, $f \geqslant 0$ в Ω, такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|F(x, s)| \geqslant \bar{c}|s|^{\bar{\sigma}} - f(x). \tag{56}$$

Лемма 2.6. *Для любого* $i \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega |\bar{u}_i|^{\bar{\sigma}} dx \leqslant c_{14}, \tag{57}$$

где c_{14} *– положительная константа, зависящая только от* $\bar{c}$, $\bar{C}$, $\|F(\cdot, 0)\|_{L^1(\Omega)}$ *и* $\|f\|_{L^1(\Omega)}$.

Доказательство. В силу (56) имеем

$$\bar{c}|\bar{u}_i|^{\bar{\sigma}} \leqslant |F(x, \bar{u}_i)| + f \leqslant |F(\cdot, 0)| + |\bar{F}(x, \bar{u}_i)| + f.$$

Отсюда и из (47) следует

$$\bar{c} \int_\Omega |\bar{u}_i|^{\bar{\sigma}} \, dx \leqslant \int_\Omega \Big(|F(\cdot, 0)| + f \Big) dx + \bar{C}.$$

Из последнего неравенства вытекает (57). Лемма доказана.

3. Формулировка основного результата, замечания и вспомогательные предложения.

Теорема 3.1. *Пусть Ω_1 – непустое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ такое, что $\Omega_1 \subset \Omega$. Пусть для любого непустого замкнутого множества G в $\mathbb{R}^n$ такого, что $G \subset \Omega_1$, сужения функций g и $F(\cdot, 0)$ на G принадлежат $L^r(G)$ с $r > n/q$. Тогда для любого замкнутого множества G в $\mathbb{R}^n$, обладающего свойствами $G \subset \Omega_1$ и $\operatorname{meas} G > 0$ справедливо неравенство $\operatorname{vrai}\max\limits_G |\bar{u}| < +\infty$.*

Доказательство теоремы 3.1 будет дано в п.4. Перед этим сделаем несколько замечаний и изложим ряд вспомогательных результатов.

Замечание 3.1. Пусть $p = 2$, $q < q_1 < \min(\bar{\sigma}, q^*)$ и $\tau > q^*/(q^* - q_1)$. Пусть правая часть уравнения (6) имеет модельный вид $F(x, s) = f(x) - a|s|^{\bar{\sigma}-1}s$, где $a > 0$, $f \in L^1(\Omega)$. Если, теперь, для любого непустого замкнутого множества G в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условиям теоремы 3.1, сужения функций g и $|f|^{q_1/(q_1-1)}$ на G принадлежат классу $L^\tau(G)$, то согласно основному результату работы [7] справедливо заключение теоремы 3.1. Поскольку $q^*/(q^* - q_1) > n/q$, условия относительно суммируемости функций g и $F(\cdot, 0)$ на подмножествах в Ω в теореме 3.1 слабее соответствующих условий в [7].

Замечание 3.2. Справедливость теоремы 3.1 будет следовать из равномерной ограниченности последовательности $\{\bar{u}_i\}$ на соответствующих подмножествах Ω. Отметим, что такая ограниченность была установлена в работах [6], [7] с помощью некоторой модификации метода Мозера (см. также [8]). В настоящей работе для этой же цели используется локальный аналог подхода, который применялся в работах [3] – [5]. Этот подход подобен методу Стампаккья, и использует следующие аналоги его известной леммы (см., [16] – [18]).

Лемма 3.3. *Пусть φ – невозрастающая неотрицательная функция на $[0, +\infty)$. Пусть $C > 0$, $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2$, $\gamma > 1$ и $k_0 \geqslant 0$. Пусть для любых k и l таких, что $k_0 < k < l < 2k$, справедливо неравенство*

$$\varphi(l) \leqslant \frac{Ck^{\tau_1}}{(l-k)^{\tau_2}} [\varphi(k)]^\gamma. \tag{58}$$

Пусть $\vartheta > k_0$ и

$$\vartheta^{\tau_2 - \tau_1} \geqslant 2^{\tau_1 + (2\gamma-1)\tau_2/(\gamma-1)} C [\varphi(k_0)]^{\gamma-1}. \tag{59}$$

Тогда $\varphi(k_0 + \vartheta) = 0$.

Лемма 3.4. *Пусть φ – невозрастающая неотрицательная функция на $[0, +\infty)$. Пусть $C > 0$, $\tau > 0$, $\gamma \in (0, 1)$ и $k_0 \geqslant 0$. Пусть для любого $k > k_0$ справедливо неравенство*

$$\varphi(2k) \leqslant Ck^{-\tau}[\varphi(k)]^\gamma. \tag{60}$$

Тогда для любого $k > k_0$ имеем

$$\varphi(k) \leqslant 2^{\tau/(1-\gamma)^2} \left\{ C^{1/(1-\gamma)} + \varphi(k_0)(2k_0)^{\tau/(1-\gamma)} \right\} k^{-\tau/(1-\gamma)}. \tag{61}$$

Доказательства лемм 3.3 и 3.4 даны в [3].

Роль лемм 3.3 и 3.4 в доказательстве теоремы 3.1 состоит в следующем. Пусть G – множество в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условиям теоремы 3.1. Фиксируем функцию $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ такую что, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ на Ω, $\eta = 1$ на G и $\eta = 0$ вне некоторой окрестности множества G. Подставляя в интегральное тождество (18) в качестве пробных элементов функции $\bar{u}_i \eta^{q+1} - h_k(\bar{u}_i \eta^{q+1})$, $k > 0$, где h_k – специальные срезающие функции класса $C^2(\mathbb{R})$, и оценивая подходящим образом возникающие при этом интегралы, мы приходим как раз к соотношению вида (60) с функцией φ, заданной равенством $\varphi(s) = \operatorname{meas}\{|\bar{u}_i \eta^{q+1}| \geqslant s\}$, $s \geqslant 0$, числами $\tau = q^*$, $\gamma = (1 - \frac{q}{\bar{\sigma}})\frac{q^*}{q}$ и постоянной C, не зависящей от $\bar{u}_i$. Применяя лемму 3.4 и лемму 2.6 из [1], получаем, что для любого $\lambda \in (0, \bar{\sigma}^*)$ последовательность $\{\bar{u}_i \eta^{q+1}\}$ ограничена в $L^\lambda(\Omega)$. Учитывая это и выполняя повторно, описанную выше, процедуру, устанавливаем ограниченность последовательности $\{\bar{u}_i \eta^{q+1}\}$ в $L^\lambda(\Omega)$ для любого $\lambda \in (0, \bar{\sigma}^{**})$. После конечного числа шагов мы приходим к соотношению вида (58) с той же функцией φ, что и выше, показателем $\gamma > 1$, зависящим только от n, p, q, r, $\bar{\sigma}$, и постоянной C, не зависящей от $\bar{u}_i$. Применяя затем лемму 3.3, устанавливаем равномерную ограниченность функциональной последовательности $\{\bar{u}_i \eta\}$ в Ω.

4. Доказательство теоремы 3.1.

Введем ряд вспомогательных чисел. В силу предположения относительно числа r имеем $(r-1)/r - 1/q^* > 0$. Положим

$$r_1 = \left(\frac{r-1}{r} - \frac{1}{q^*} \right)^{-1}, \tag{62}$$

$$\gamma = q^* \min \left\{ \frac{1}{r_1(q-1)}\,,\ \frac{r-1}{rq} \right\}. \tag{63}$$

В силу (62) имеем

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r} + \frac{1}{q^*} = 1. \tag{64}$$

Кроме того, из предположения $r > n/q$ и определения чисел r_1 и γ вытекает, что

$$\gamma > 1. \tag{65}$$

Поскольку $q < n$, существует число $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\tilde{n} q < n \leqslant (\tilde{n} + 1) q. \tag{66}$$

Зафиксируем σ такое, что $q < \sigma < \min(\bar{\sigma}, n/\tilde{n})$. Тогда

$$\tilde{n}\sigma < n \leqslant (\tilde{n}+1)\sigma. \tag{67}$$

Учитывая неравенства (66) и (67), положим

$$q_1 = q^*, \quad q_2 = q_1^*, \quad \dots, \quad q_{\tilde{n}} = q_{\tilde{n}-1}^*;$$

$$\sigma_1 = \sigma^*, \quad \sigma_2 = \sigma_1^*, \quad \dots, \quad \sigma_{\tilde{n}} = \sigma_{\tilde{n}-1}^*.$$

Из неравеств $q < \sigma$, (66) и (67) следует, что

$$q_\kappa < \sigma_\kappa < n, \qquad \kappa = 1,\ 2,\ \dots, \tilde{n}-1; \tag{68}$$

$$n \leqslant q_{\tilde{n}} < \sigma_{\tilde{n}}. \tag{69}$$

Используя метод индукции, построим две последовательности чисел $\{\gamma_\kappa\}_{\kappa=1}^{\tilde{n}+1}$ и $\{\nu_\kappa\}_{\kappa=0}^{\tilde{n}}$. Для этого положим $\nu_0 = \sigma$ и $\gamma_1 = (1 - \frac{q}{\nu_0})\frac{q^*}{q}$. Из неравенств $q < \sigma < n$ следует, что $0 < \gamma_1 < 1$. Учитывая (68), зафиксируем число ν_1 такое, что $q_1 < \nu_1 < \sigma_1$. Предположим, что уже построены числа γ_κ, ν_κ, $\kappa = 1, 2, ..., m$, $m \leqslant \tilde{n} - 1$ со свойствами:

$$0 < \gamma_\kappa < 1, \tag{70}$$

$$q_\kappa < \nu_\kappa < \nu_{\kappa-1}^* \leqslant \sigma_\kappa. \tag{71}$$

Теперь положим $\gamma_{m+1} = (1 - \frac{q}{\nu_m})\frac{q^*}{q}$. В силу (71) и (68) имеем $0 < \gamma_{m+1} < 1$. Опираясь на (71), фиксируем число ν_{m+1} такое, что $q_{m+1} < \nu_{m+1} < \nu_m^* \leqslant \sigma_{m+1}$. Положим еще $\nu_{\tilde{n}+1} = \infty$. Таким образом построена последовательность чисел $\{\nu_\kappa\}_{\kappa=0}^{\tilde{n}+1}$ такая, что для $\kappa = 1, 2, ..., \tilde{n}$ справедливо (71). Наконец, положим $\gamma_{\tilde{n}+1} = (1 - \frac{q}{\nu_{\tilde{n}}})\frac{q^*}{q}$. Из неравенств (69) и $q_{\tilde{n}} < \nu_{\tilde{n}}$ следует, что $\nu_{\tilde{n}} > n$ и

$$\gamma_{\tilde{n}+1} > 1. \tag{72}$$

Построена последовательность чисел $\{\gamma_\kappa\}_{\kappa=1}^{\tilde{n}+1}$ такая, что верно (72) и для $\kappa = 1, 2, ..., \tilde{n}$ справедливо (70).

Докажем следующее утверждение:

а) для любого замкнутого множества G в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условиям теоремы 3.1, и для любого $\kappa = 1, 2, ..., \tilde{n}+1$ последовательность $\{\|\bar{u}_i\|_{L^{\nu_\kappa}(G)}\}$ ограничена.

Проведём доказательство индукцией по κ. Справедливость утверждения а) для $\kappa = 0$ следует из леммы 2.6.

Предположим теперь, что утверждение а) уже доказано для $\kappa = m$, $0 \leqslant m \leqslant \tilde{n}$, и докажем его для $\kappa = m+1$.

Пусть G – произвольное замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$ со свойствами $G \subset \Omega_1$ и $\operatorname{meas} G > 0$. Положим $\rho = \operatorname{dist}(G, \partial\Omega_1)$ и

$$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, G) < \rho/2\}.$$

Ясно, что $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega_1$.

Зафиксируем функцию $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, такую что

$$0 \leqslant \eta \leqslant 1 \quad \text{на } \Omega, \tag{73}$$

$\eta = 1$ на G, $\operatorname{supp} \eta \subset \Omega_0$, и положим

$$m(\eta) = 1 + \max_{\Omega} \bigg\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha \eta|^2 + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha \eta|^2 \bigg\}.$$

Далее, зафиксируем $i \in \mathbb{N}$ и положим

$$\Phi_i = \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha \bar{u}_i|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha \bar{u}_i|^p, \qquad w_i = \bar{u}_i \eta^{q+1},$$

$$J_1 = \int_\Omega \bigg\{ \sum_{|\alpha|=1} |A_\alpha(x, \nabla_2 \bar{u}_i)| \bigg\} |\bar{u}_i| \eta^q \, dx,$$

$$J_2 = \int_\Omega \bigg\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \nabla_2 \bar{u}_i)| \bigg\} |\bar{u}_i| \eta^{q-1} \, dx,$$

$$J_3 = \int_\Omega \bigg\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \nabla_2 \bar{u}_i)| \bigg\} \bigg\{ \sum_{|\beta|=1} |D^\beta \bar{u}_i| \bigg\} \eta^q \, dx.$$

Очевидно, что $w_i \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ и справедливы утверждения:

б) для любого n-мерного мультииндекса $\alpha, |\alpha| = 1$,

$$|D^\alpha w_i - D^\alpha \bar{u}_i \eta^{q+1}| \leqslant (q+1) m(\eta) |\bar{u}_i| \eta^q \quad \text{п.в. на } \Omega;$$

в) для любого n-мерного мультииндекса $\alpha, |\alpha| = 2$,

$$|D^\alpha w_i - D^\alpha \bar{u}_i \eta^{q+1}| \leqslant 2m(\eta)(q+1) \bigg\{ \sum_{|\beta|=1} |D^\beta \bar{u}_i| \bigg\} \eta^q +$$

$$+ 2m(\eta) q(q+1) |\bar{u}_i| \eta^{q-1} \quad \text{п. в. на } \Omega.$$

Пусть M – мажоранта для $\|F(\cdot, 0)\|_{L^r(\overline{\Omega}_0)}$, $\|g\|_{L^r(\overline{\Omega}_0)}$.

Докажем сейчас следующую оценку:

$$\int_\Omega \Phi_i \eta^{q+1} dx \leqslant c_{15}, \tag{74}$$

где c_{15} – положительная константа, зависящая только от c_1, c_2, c_{14}, $m(\eta)$, n, p, q, σ, r, $\|g\|_{L^1(\Omega)}$, meas Ω и M.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Имеем $w_i \in \mathring{W}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ и $\tilde{h}_k(w_i) \in \mathring{W}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$, причем

$$\tilde{h}_k(w_i) \to w_i \quad \text{сильно в} \quad W^{1,q}_{2,p}(\Omega) \tag{75}$$

(см. лемму 2.2 в [1]).
Так как $\tilde{h}_k(w_i) \in \mathring{W}^{1,q}_{2,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, то в силу (18)

$$\int_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 \bar{u}_i) D^\alpha \tilde{h}_k(w_i) \Big\}\, dx$$

$$+ \int_\Omega \bar{F}(x, \bar{u}_i)\, \tilde{h}_k(w_i)\, dx = \int_\Omega \bar{f}_i\, \tilde{h}_k(w_i)\, dx.$$

Отсюда, переходя к пределу при $k \to \infty$, используя при этом (75) и учитывая второе из включений (17), получаем

$$\int_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 \bar{u}_i) D^\alpha w_i \Big\}\, dx + \int_\Omega \bar{F}(x, \bar{u}_i)\, w_i\, dx = \int_\Omega \bar{f}_i\, w_i\, dx. \tag{76}$$

Используя свойство **а)** функции F и (73), получаем

$$\bar{F}(x, \bar{u}_i) w_i \geqslant 0 \quad \text{п. в. на } \Omega.$$

Из (76) и последнего неравенства следует, что

$$\int_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 \bar{u}_i)\, D^\alpha w_i \Big\}\, dx \leqslant \int_\Omega \bar{f}_i\, w_i\, dx.$$

Отсюда с помощью утверждений б), в) и (4) получаем

$$c_2 \int_\Omega \Phi_i \eta^{q+1}\, dx \leqslant 2q(q+1)m(\eta)(J_1 + J_2 + J_3)$$

$$+ \int_\Omega g \eta^{q+1}\, dx + \int_\Omega |\bar{f}_i||w_i|\, dx. \tag{77}$$

Оценим подходящим образом интегралы в правой части последнего неравенства. Положим

$$c_{16} = \frac{c_2}{16 c_1 q(q+1)m(\eta)}, \qquad c_{17} = \frac{c_2}{16(nc_1 + |\Lambda|)q(q+1)m(\eta)}, \tag{78}$$

где $|\Lambda|$ – число всех n-мерных мультииндексов α таких, что $|\alpha| = 2$. Очевидно, что

$$q = \frac{q-1}{q}(q+1) + \frac{1}{q}.$$

Используя это равенство и неравенство Юнга с показателями $q/(q-1)$ и q, устанавливаем, что если α – n-мерный мультииндекс, $|\alpha| = 1$, то

$$|A_\alpha(x, \nabla_2 \bar{u}_i)||\bar{u}_i|\eta^q \leqslant c_{16}|A_\alpha(x, \nabla_2 \bar{u}_i)|^{q/(q-1)}\eta^{q+1} + c_{16}^{1-q}|\bar{u}_i|^q\eta \quad \text{на} \quad \Omega.$$

Отсюда и из (3) выводим, что

$$J_1 \leqslant c_{16}\left(c_1 \int_\Omega \Phi_i \eta^{q+1} dx \ + \int_\Omega g\eta^{q+1} dx\right) + nc_{16}^{1-q} \int_\Omega |\bar{u}_i|^q \eta \, dx. \tag{79}$$

Легко проверить, что

$$q - 1 = \frac{p-1}{p}(q+1) + \frac{1}{p}(q - 2p + 1).$$

С помощью этого равенства и неравенства Юнга с показателями $p/(p-1)$ и p находим, что если α – n-мерный мультииндекс, $|\alpha| = 2$, то

$$|A_\alpha(x, \nabla_2 \bar{u}_i)||\bar{u}_i|\eta^{q-1} \leqslant c_{16}|A_\alpha(x, \nabla_2 \bar{u}_i)|^{p/(p-1)}\eta^{q+1} + c_{16}^{1-p}|\bar{u}_i|^p\eta^{q-2p+1} \quad \text{на} \quad \Omega.$$

Отсюда и из (3) выводим, что

$$J_2 \leqslant c_{16}\left(c_1 \int_\Omega \Phi_i \eta^{q+1} dx \ + \int_\Omega g\eta^{q+1} dx\right) + nc_{16}^{1-p} \int_\Omega |\bar{u}_i|^p \eta^{q-2p+1} dx. \tag{80}$$

С помощью равенства

$$q = \frac{p-1}{p}(q+1) + \frac{1}{q}(q+1) + \frac{q-p}{pq}\left(1 + \frac{q(q-2p)}{q-p}\right)$$

и неравенства Юнга с показателями $p/(p-1)$, q, $pq/(q-p)$ устанавливаем, что если α – n-мерный мультииндекс, $|\alpha| = 2$, и β – n-мерный мультииндекс, $|\beta| = 1$, то

$$|A_\alpha(x, \nabla_2 \bar{u}_i)||D^\beta \bar{u}_i|\eta^q \leqslant c_{17}\Big(|A_\alpha(x, \nabla_2 \bar{u}_i)|\eta^{q+1} + |D^\beta \bar{u}_i|^q \eta^{q+1}\Big)$$
$$+ c_{17}^{1-pq/(q-p)}\eta^{1+q(q-2p)/(q-p)} \qquad \text{на} \quad \Omega.$$

Отсюда, а также из (3) и (73) следует, что

$$J_3 \leqslant c_{17}\left((nc_1 + |\Lambda|) \int_\Omega \Phi_i \eta^{q+1} dx \ + n \int_\Omega g\eta^{q+1} dx\right)$$
$$+ c_{17}^{1-pq/(q-p)} n|\Lambda| \operatorname{meas}\Omega. \tag{81}$$

Используя неравенство Гельдера, (64), (2), неравенство Юнга и (73), получаем

$$\int_\Omega |\bar f_i||w_i|\,dx \leqslant \left(\int_{\bar\Omega_0} |\bar f_i|^r\,dx\right)^{1/r}\left(\int_{\bar\Omega_0} |\bar u_i\eta^{q+1}|^{q^*}dx\right)^{1/q^*}(\operatorname{meas}\bar\Omega_0)^{1/r_1}$$

$$\leqslant cM(\operatorname{meas}\Omega)^{1/r_1}\left(\sum_{|\alpha|=1}\int_\Omega |D^\alpha w_i|^q\,dx\right)^{1/q}$$

$$\leqslant \frac{c_2}{2^{q+2}}\int_\Omega\left\{\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha w_i|^q\right\}dx+\left(\frac{c_2}{2^{q+2}}\right)^{1/(1-q)}\left[cM(\operatorname{meas}\Omega)^{1/r_1}\right]^{q/(q-1)}.$$

Отсюда с помощью утверждения б) выводим, что

$$\int_\Omega |\bar f_i||w_i|\,dx \leqslant \frac{c_2}{8}\int_\Omega \Phi_i\eta^{q+1}dx+\frac{c_2}{8}(q+1)m(\eta)n\int_\Omega|\bar u_i|^q\eta^{q^2}dx$$

$$+(c_2/2^{q+2})^{1/(1-q)}\left[cM(\operatorname{meas}\Omega)^{1/r_1}\right]^{q/(q-1)}. \tag{82}$$

Теперь из (77)–(82), учитывая (73) и (57) выводим (74).

Пусть теперь φ – функция на $[0,+\infty)$ такая, что для любого $s\in[0,+\infty)$

$$\varphi(s)=\operatorname{meas}\{|w_i|\geqslant s\}.$$

Получим неравенства вида (60), (58) для функции φ и затем применим леммы 3.3 и 3.4.

Положим $c_{18}=c_{12}{}^{q/(q-1)q^*}$ и заметим, что

$$\forall\, k\geqslant c_{18}+1 \qquad \varphi(k)<1. \tag{83}$$

Действительно, с помощью (73) и (54) устанавливаем, что для любого $k\in\mathbb{N}$ $\varphi(k)\leqslant c_{12}k^{-q^*(q-1)/q}$. Из последнего неравенства вытекает (83).

Далее, положим

$$t=\frac{2qpr}{q-2p}+2, \tag{84}$$

и пусть ψ – функция на $(0,+\infty)$ такая, что для любого $s\in(0,+\infty)$

$$\psi(s)=s-s^t+\frac{t-1}{t+1}\,s^{t+1}\,.$$

Положим

$$k_0=\max\{c_{19}+1,\ 24tnq(nc_1+|\Lambda|)(q+1)^2m^2(\eta)/c_2\} \tag{85}$$

и зафиксируем произвольное число $k \geqslant k_0$. Пусть h_k – функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$h_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \leqslant k, \\ \left[\psi\left(\frac{|s|-k}{k}\right) + 1\right] k \operatorname{sign} s, & \text{если } k < |s| < 2k, \\ \frac{2kt}{t+1} \operatorname{sign} s, & \text{если } |s| \geqslant 2k. \end{cases}$$

Функция h_k была введена в [3]. Имеем $h_k \in C^2(\mathbb{R})$,

$$|h_k| < 2k \quad \text{на } \mathbb{R}, \tag{86}$$

$$0 \leqslant h_k' \leqslant 1 \quad \text{на } \mathbb{R}, \tag{87}$$

$$|h_k''| \leqslant \frac{t^2}{k} \quad \text{на } \mathbb{R}. \tag{88}$$

Кроме того, справедливы следующие утверждения:

г) если $\varepsilon \in (0,1)$, $s \in \mathbb{R}$ и $k \leqslant |s| \leqslant k(1+\varepsilon)$, то

$$|h_k''(s)| \leqslant \frac{t^2}{k}\, \varepsilon^{t-2};$$

д) если $\varepsilon \in (0,1)$, $s \in \mathbb{R}$ и $k(1+\varepsilon) \leqslant |s| \leqslant 2k$, то

$$|h_k''(s)| \leqslant \frac{t}{k\varepsilon}\,(1 - h_k'(s));$$

е) если $k < l \leqslant 2k$, $s \in \mathbb{R}$ и $|s| \geqslant l$, то

$$|s - h_k(s)| \geqslant \frac{2}{t+1}\,(l-k)\left(\frac{l-k}{k}\right)^{t-1}.$$

Утверждения г) – е) доказаны в [3].

Из утверждения е) вытекает следующее утверждение:

ж) если $k < l \leqslant 2k$, то

$$\varphi(l) \leqslant \frac{t^{q^*} k^{(t-1)q^*}}{(l-k)^{tq^*}} \int_\Omega |w_i - h_k(w_i)|^{q^*}\, dx. \tag{89}$$

Далее, оценим подходящим образом интеграл в правой части неравенства (89). В результате, мы получим неравенство вида (60), если $m \leqslant \tilde{n} - 1$, и неравенство вида (58), если $m = \tilde{n}$.

Через c_i, $i = 20, 21, ...$, будем обозначать положительные числа, зависящие только от n, p, q, r, σ, $\operatorname{meas}\Omega$, c_1, c_2, $c_{14} - c_{18}$, $m(\eta)$ и M.

Используя (86)–(88), аналогично лемме 2.2 из [1] устанавливаем, что $h_k(w_i) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ и справедливы утверждения:

з) для любого n-мерного мультииндекса $\alpha, |\alpha| = 1$,

$$D^\alpha h_k(w_i) = h_k'(w_i) D^\alpha w_i \quad \text{п. в. на } \ \Omega\,;$$

и) для любого n-мерного мультииндекса $\alpha, |\alpha| = 2$,

$$|D^\alpha h_k(w_i) - h_k'(w_i) D^\alpha w_i| \leqslant |h_k''(w_i)| \sum_{|\beta|=1} |D^\beta w_i|^2 \quad \text{п. в. на } \ \Omega\,.$$

Положим

$$I_k = \int_\Omega |\bar{f}_i||w_i - h_k(w_i)|\,dx,$$

$$I_1 = \int_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha|=1} |A_\alpha(x, \nabla_2 \bar{u}_i)| \Big\} |\bar{u}_i| \eta^q (1 - h_k'(w_i))\,dx,$$

$$I_2 = \int_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \nabla_2 \bar{u}_i)| \Big\} |\bar{u}_i| \eta^{q-1} (1 - h_k'(w_i))\,dx,$$

$$I_3 = \int_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \nabla_2 \bar{u}_i)| \Big\} \Big\{ \sum_{|\beta|=1} |D^\beta \bar{u}_i| \Big\} \eta^q (1 - h_k'(w_i))\,dx,$$

$$I_4 = \int_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \nabla_2 \bar{u}_i)| \Big\} |\bar{u}_i|^2 \eta^{2q} |h_k''(w_i)|\,dx,$$

$$I_5 = \int_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \nabla_2 \bar{u}_i)| \Big\} \Big\{ \sum_{|\beta|=1} |D^\beta \bar{u}_i|^2 \Big\} \eta^{2(q+1)} |h_k''(w_i)|\,dx.$$

Поскольку $h_k(w_i) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, в силу (18) имеем

$$\int_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 \bar{u}_i) D^\alpha h_k(w_i) + \bar{F}(x, \bar{u}_i) h_k(w_i) \Big\} dx = \int_\Omega \bar{f}_i\, h_k(w_i) dx.$$

Отсюда и из (76) следует

$$\int_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 \bar{u}_i) D^\alpha (w_i - h_k(w_i)) + \bar{F}(x, \bar{u}_i)(w_i - h_k(w_i)) \Big\} dx$$

$$= \int_\Omega \bar{f}_i (w_i - h_k(w_i)) dx. \tag{90}$$

Используя условие **а)** относительно функции F, (73), а также то, что функция $s - h_k(s)$ не убывает на $\mathbb{R}$ и $h_k(0) = 0$, получаем

$$\bar{F}(x, \bar{u}_i)(w_i - h_k(w_i)) \geqslant 0 \quad \text{п. в. на } \ \Omega\,.$$

Из (90) и последнего неравенства следует, что

$$\int_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x,\nabla_2\bar u_i)\, D^\alpha(w_i - h_k(w_i))\Big\}\, dx \leqslant \int_\Omega \bar f_i(w_i - h_k(w_i))\, dx.$$

Из этого неравенства и утверждений б), в), з), и) выводим, что

$$\int_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x,\nabla_2\bar u_i) D^\alpha \bar u_i\Big\}\eta^{q+1}(1-h'_k(w_i))\, dx$$

$$\leqslant I_k + 2nq(q+1)^2 m^2(\eta)\sum_{i=1}^5 I_i\ .$$

Отсюда, используя (4), (87) и то, что $h'_k = 1$ на $(-k,k)$, получаем

$$c_2\int_\Omega \Phi_i\eta^{q+1}(1-h'_k(w_i))dx \leqslant I_k$$

$$+\int_{\{|w_i|\geqslant k\}} g\eta^{q+1}\, dx + 2nq(q+1)^2m^2(\eta)\sum_{i=1}^5 I_i\ . \qquad (91)$$

Установим подходящие оценки для слагаемых в правой части этого неравенства. Ясно, что

$$\int_{\{|w_i|\geqslant k\}} g\eta^{q+1}\, dx \leqslant M[\varphi(k)]^{(r-1)/r}. \qquad (92)$$

Оценим I_k. Используя неравенство Гельдера, (73) и утверждение а) для $\kappa = m$, получаем

$$\int_{\{|w_i|\geqslant k\}} |\bar u_i|^q\eta\, dx \leqslant \Big(\int_{\{|w_i|\geqslant k\}}|\bar u_i|^{\nu_m}\eta\, dx\Big)^{q/\nu_m}\Big(\int_{\{|w_i|\geqslant k\}}\eta\, dx\Big)^{1-q/\nu_m}$$

$$\leqslant c_{20}[\varphi(k)]^{1-q/\nu_m}. \qquad (93)$$

Далее отметим, что в силу (2), утверждений з), б), (73) и (87) справедливо неравенство

$$\Big(\int_\Omega |w_i - h_k(w_i)|^{q^*}dx\Big)^{1/q^*} \leqslant 2^{(q-1)/q}c$$

$$\times\Big(c_{21}\int_{\{|w_i|\geqslant k\}}|\bar u_i|^q\eta\, dx + \int_\Omega \Phi_i\eta^{q+1}(1-h'_k(w_i))\, dx\Big)^{1/q}.$$

Отсюда и из (93) следует, что

$$\left(\int_\Omega |w_i - h_k(w_i)|^{q^*}\,dx\right)^{1/q^*} \leqslant 2^{(q-1)/q}c$$

$$\times\left(c_{22}[\varphi(k)]^{1-q/\nu_m} + \int_\Omega \Phi_i\eta^{q+1}(1-h_k'(w_i))\,dx\right)^{1/q}. \tag{94}$$

Используя тот факт, что $h_k(s) = s$ для $s \in (-k, k)$, а также (64), неравенство Гельдера, (73) и (94), получаем

$$I_k \leqslant [\varphi(k)]^{1/r_1}\|\bar f_i\|_{L^r(\bar\Omega_0)}\left(\int_\Omega |w_i - h_k(w_i)|^{q^*}\,dx\right)^{1/q^*}$$

$$\leqslant 2^{(q-1)/q}cM[\varphi(k)]^{1/r_1}\left(c_{22}[\varphi(k)]^{1-q/\nu_m} + \int_\Omega \Phi_i\eta^{q+1}(1-h_k'(w_i))\,dx\right)^{1/q}.$$

Отсюда и из неравенства Юнга вытекает, что

$$I_k \leqslant \frac{c_2}{12}\int_\Omega \Phi_i\eta^{q+1}(1-h_k'(w_i))\,dx + c_{23}([\varphi(k)]^{q/(q-1)r_1} + [\varphi(k)]^{1-q/\nu_m}). \tag{95}$$

Оценим интегралы I_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$. С помощью рассуждений аналогичных доказательству неравенств (79)–(81), а также с помощью (87), того, что $h_k' = 1$ на $(-k, k)$, (73), (92), (93) и неравенства $\varphi(k) < 1$, устанавливаем следующие неравенства:

$$I_1 \leqslant \frac{c_2}{24nq(q+1)^2m^2(\eta)}\int_\Omega \Phi_i\eta^{q+1}(1-h_k'(w_i))\,dx$$

$$+c_{24}([\varphi(k)]^{(r-1)/r} + [\varphi(k)]^{1-q/\nu_m}). \tag{96}$$

$$I_2 \leqslant \frac{c_2}{24nq(q+1)^2m^2(\eta)}\int_\Omega \Phi_i\eta^{q+1}(1-h_k'(w_i))\,dx$$

$$+c_{25}([\varphi(k)]^{(r-1)/r} + [\varphi(k)]^{1-q/\nu_m}). \tag{97}$$

$$I_3 \leqslant \frac{c_2}{24nq(q+1)^2m^2(\eta)}\int_\Omega \Phi_i\eta^{q+1}(1-h_k'(w_i))\,dx + c_{26}[\varphi(k)]^{(r-1)/r}. \tag{98}$$

Перейдем к оценке интегралов I_4 и I_5. Предположим сначала, что $\varphi(k) > 0$. Положим

$$\varepsilon = [\varphi(k)]^{1/(t-2)}. \tag{99}$$

Поскольку $k \geqslant k_0$, в силу (85) и (83) имеем $\varphi(k) < 1$. Следовательно, $\varepsilon \in (0,1)$. Легко проверить, что

$$q = \frac{p-1}{p}(q+1) + \frac{2}{q} + \frac{q-2p}{qp}\left(1 + \frac{q(q-p)}{q-2p}\right).$$

Используя это равенство, неравенство Юнга с показателями $(p-1)/p$, $q/2$, $qp/(q-2p)$ и (73), устанавливаем, что если α – n-мерный мультииндекс, $|\alpha| = 2$, то

$$|A_\alpha(x, \nabla_2 \bar{u}_i)||\bar{u}_i|^2\eta^{2q} \leqslant \varepsilon^2 |A_\alpha(x, \nabla_2 \bar{u}_i)|^{p/(p-1)}\eta^{q+1} + \varepsilon^2 |\bar{u}_i|^q \eta + \varepsilon^{2-2qp/(q-2p)}\eta \quad \text{на} \quad \Omega.$$

Отсюда и из (4) выводим, что

$$I_4 \leqslant c_1\varepsilon^2 \int_\Omega \Phi_i \eta^{q+1}|h_k''(w_i)|\,dx + \varepsilon^2 \int_\Omega g\eta^{q+1}|h_k''(w_i)|\,dx + \varepsilon^2|\Lambda| \int_\Omega |\bar{u}_i|^q \eta |h_k''(w_i)|\,dx + |\Lambda|\varepsilon^{2-\frac{2qp}{q-2p}} \int_\Omega \eta |h_k''(w_i)|\,dx. \tag{100}$$

В силу (88), (73), (92), (93) и того, что $h_k'' = 0$ на $(-k, k)$, имеем

$$\int_\Omega g\eta^{q+1}|h_k''(w_i)|\,dx \leqslant \frac{Mt^2}{k}\,[\varphi(k)]^{(r-1)/r}, \tag{101}$$

$$\int_\Omega \eta|h_k''(w_i)|\,dx \leqslant \frac{t^2}{k}\,\varphi(k), \tag{102}$$

$$\int_\Omega |\bar{u}_i|^q \eta |h_k''(w_i)|\,dx \leqslant \frac{c_{20}t^2}{k}\,[\varphi(k)]^{1-q/\nu_m}. \tag{103}$$

Ясно также, что

$$\int_\Omega \Phi_i \eta^{q+1}|h_k''(w_i)|\,dx = \int\limits_{\{k \leqslant |w_i| < k(1+\varepsilon)\}} \Phi_i \eta^{q+1}|h_k''(w_i)|\,dx + \int\limits_{\{k(1+\varepsilon) \leqslant |w_i| \leqslant 2k\}} \Phi_i \eta^{q+1}|h_k''(w_i)|\,dx. \tag{104}$$

Из утверждения г) и (74) следует, что

$$\int\limits_{\{k \leqslant |w_i| < k(1+\varepsilon)\}} \Phi_i \eta^{q+1}|h_k''(w_i)|\,dx \leqslant \frac{c_{15}t^2}{k}\,\varepsilon^{t-2}, \tag{105}$$

а в силу утверждения д) имеем

$$\int\limits_{\{k(1+\varepsilon)\leqslant|w_i|\leqslant 2k\}} \Phi_i\eta^{q+1}|h_k''(w_i)|\,dx \leqslant \frac{t}{k\varepsilon}\int_\Omega \Phi_i\eta^{q+1}(1-h_k'(w_i))\,dx. \tag{106}$$

Из (104)–(106) вытекает неравенство

$$\int_\Omega \Phi_i\eta^{q+1}|h_k''(w_i)|\,dx \leqslant \frac{c_{15}t^2}{k}\,\varepsilon^{t-2} + \frac{t}{k\varepsilon}\int_\Omega \Phi_i\eta^{q+1}(1-h_k'(w_i))\,dx. \tag{107}$$

В свою очередь, из (100)–(103) и (107), учитывая (84), (85) и (99), выводим

$$I_4 \leqslant \frac{c_2}{24nq(q+1)^2m^2(\eta)}\int_\Omega \Phi_i\eta^{q+1}(1-h_k'(w_i))\,dx$$
$$+c_{27}([\varphi(k)]^{(r-1)/r} + [\varphi(k)]^{1-q/\nu_m}). \tag{108}$$

Далее, используя равенство

$$2(q+1) = \frac{p-1}{p}\,(q+1) + \frac{2}{q}\,(q+1) + \frac{q-2p}{qp}\left(1 + \frac{q(qp+q-p)}{q-2p}\right),$$

неравенство Юнга с показателями $(p-1)/p$, $q/2$, $qp/(q-2p)$ и (73), устанавливаем, что если α – n-мерный мультииндекс, $|\alpha|=2$, и β – n-мерный мультииндекс, $|\beta|=1$, то

$$|A_\alpha(x,\nabla_2\bar u_i)||D^\beta\bar u_i|^2\eta^{2(q+1)} \leqslant \varepsilon^2|A_\alpha(x,\nabla_2\bar u_i)|^{p/(p-1)}\eta^{q+1}$$
$$+\varepsilon^2|D^\beta\bar u_i|^q\eta^{q+1} + \varepsilon^{2-2qp/(q-2p)}\eta \quad \text{на} \quad \Omega.$$

Отсюда и из (4) выводим, что

$$I_5 \leqslant (nc_1+|\Lambda|)\varepsilon^2\int_\Omega \Phi_i\eta^{q+1}|h_k''(w_i)|\,dx + n\varepsilon^2\int_\Omega g\eta^{q+1}|h_k''(w_i)|\,dx$$
$$+n|\Lambda|\varepsilon^{2-\frac{2qp}{q-2p}}\int\limits_\Omega \eta|h_k''(w_i)|\,dx. \tag{109}$$

Из (109), (107), (101) и (102), с учетом (85), (86) и (95), следует, что

$$I_5 \leqslant \frac{c_2}{24nq(q+1)^2m^2(\eta)}\int_\Omega \Phi_i\eta^{q+1}(1-h_k'(w_i))\,dx + c_{28}[\varphi(k)]^{(r-1)/r}. \tag{110}$$

Неравенства (108) и (110) доказаны в предположении, что $\varphi(k)>0$. Однако легко видеть, что они имеют место и в случае $\varphi(k)=0$.

Из (91), (92), (95)–(98), (108) и (110) следует, что

$$c_2 \int_\Omega \Phi_i \eta^{q+1}(1 - h_k'(w_i))\,dx$$

$$\leqslant c_{29}([\varphi(k)]^{q/(q-1)r_1} + [\varphi(k)]^{(r-1)/r} + [\varphi(k)]^{1-q/\nu_m}).$$

Полученный результат, неравенство (95) и равенство (63) позволяют заключить, что

$$\int_\Omega |w_i - h_k(w_i)|^{q^*} dx \leqslant c_{30}([\varphi(k)]^{\gamma} + [\varphi(k)]^{\gamma_{m+1}}). \tag{111}$$

Из (111), утверждения ж), (70) и (65) выводим, что справедливо следующее утверждение:

к) если $0 \leqslant m \leqslant \tilde{n} - 1$, $k_0 \leqslant k$, то

$$\varphi(2k) \leqslant c_{31} k^{-q^*} [\varphi(k)]^{\gamma_{m+1}}.$$

Используя это утверждение, а также (70), равенство $q^*/(1 - \gamma_{m+1}) = \nu_m^*$, (71) и леммы 3.4 и 2.6 из [1], устанавливаем справедливость утверждения а) для $\kappa = m + 1$, $0 \leqslant m \leqslant \tilde{n} - 1$.

Из (111) и утверждения ж) вытекает следующее утверждение:

л) если $m = \tilde{n}$, $\tilde{\gamma} = \min\{\gamma, \gamma_{\tilde{n}+1}\}$, $k_0 \leqslant k < l \leqslant 2k$, то

$$\varphi(l) \leqslant \frac{c_{32} k^{(t-1)q^*}}{(l-k)^{tq^*}} [\varphi(k)]^{\tilde{\gamma}}.$$

Используя это утверждение, а также (72), (65) и лемму 3.3, устанавливаем справедливость утверждения а) для $\kappa = \tilde{n} + 1$.

Утверждение а) доказано.

Наконец, из утверждения а) для $\kappa = \tilde{n} + 1$ и (53) следует справедливость теоремы 3.1.

Теорема доказана.

Автор благодарит А.А. Ковалевского за полезные замечания.

1. *Ковалевский А.А.* Энтропийные решения задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с L^1–правыми частями // Изв. РАН. Сер. матем. – 2001. – **65**, N 2. – С. 27–80.
2. *Ковалевский А.А.* О суммируемости энтропийных решений задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка // Изв. РАН. Сер. матем. – 2003. – **67**, N 5. – С. 35–48.
3. *Ковалевский А.А., Войтович М.В.* О повышении суммируемости обобщенных решений задачи Дирихле для нелинейных уравнений четвертого порядка с усиленной эллиптичностью // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, N 11. – С. 1511–1524.

4. *Войтович М.В.* О свойствах интегрируемости обобщенных решений задачи Дирихле для нелинейных уравнений высокого порядка с усиленной эллиптичностью // Труды ИПММ НАН Украины. – Донецк, 2007. – **15**. – С. 3–14.
5. *Войтович М.В.* О повышении суммируемости минимизантов функционалов с интегрантами, удовлетворяющими условию усиленной коэрцитивности // Труды ИПММ НАН Украины. – Донецк, 2006. – **13**. – С. 19–30.
6. *Ковалевский А.А., Николози Ф.* О множествах ограниченности решений для класса вырожденных нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с L^1-данными // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – **12**, N 4. – С. 99–112.
7. *Kovalevsky A.A., Nicolosi F.* On the sets of boundedness of solutions to degenerate fourth-order equations with strengtheningly monotone principal parts, absorption and L^1-data // Le Matematiche. – 2007. – **LXII**, Fasc. II. – P. 235–253.
8. *Скрыпник И.В.* О квазилинейных эллиптических уравнениях высшего порядка с непрерывными обобщенными решениями // Дифференц. уравн. – 1978. – **14**, N 6. – С. 1104–1118.
9. *Nicolosi F., Skrypnik I. V.* Nirenberg–Gagliardo interpolation inequality and regularity of solutions of nonlinear high order equations // Topol. Methods Nonlinear Anal. – 1996. – **7**. – P. 327–347.
10. *Kovalevsky A., Nicolosi F.* Boundedness of solutions of variational inequalities with nonlinear degenerated elliptic operators of high order // Appl. Anal. – 1997. – **65**. – P. 225–249.
11. *Kovalevsky A., Nicolosi F.* On Hölder continuity of solutions of equations and variational inequalities with degenerate nonlinear high order operators // Problemi attuali dell'analisi e della fisica matematica. Atti del 2^0 Simp. Int. dedicato alla memoria del Prof. Gaetano Fichera. – Roma: Aracne Editrice, 2000. – P. 205–220.
12. *Gilbarg D., Trudinger N.S.* Elliptic partial differential equations of second order. – Berlin: Springer-Verlag, 1983. – 513 p.
13. *Kovalevsky A.* Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of nonlinear elliptic fourth-order equations with L^1-data // Nonlinear Boundary Value Problems. – 1999. – **9**. – P. 46–54.
14. *Lions J.L.* Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. – Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969. – 554 p.
15. *Kovalevsky A.* On a sharp condition of limit summability of solutions of nonlinear elliptic equations with L^1-right-hand sides // Ukrainian Mathematical Bulletin. – 2005. – **2**, N 4. – P. 507–545.
16. *Stampacchia G.* Regularisation des solutions de problemes aux limites elliptiques a donnees discontinues // Proc. Int. Symp. Linear Spaces, Jerusalem 1960. – 1961. – P. 399–408.
17. *Stampacchia G.* Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus // Seminaire de mathematiques superieures n. 16 (ete 1965). – Montreal: Les Presses de l'Universite de Montreal, 1966. – 326 p.
18. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. – Москва: Мир. – 1983. – 256 с.

ИПММ НАН Украины,
ул. Розы Люксембург, 74,
83114, Донецк, Украина
voytovich@bk.ru

Получено 7.12.09