©2009. **Н.Васильева**

О СУЩУСТВОВАНИИ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ТЕЧЕНИЯХ HELE-SHAW В НЕГЛАДКИХ ОБЛАСТЯХ

Рассмотрена нестационарная задача со свободной границей для уравнения Лапласа в случае особенностей на неизвестной границе в начальный момент времени. Доказано существование и единственность решений в весовых классах Гёльдера в малом по времени.

Ключевые слова: нелинейные задачи со свободной границей; Hele-Shaw течения, эллиптические краевые задачи в негладких областях; весовые пространства Гёльдера
MSC (2000): 35R35; 35J25; 35B40

1. Введение.

Задача Hele-Shaw является математической моделью плоского движения вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей. Впервые такая задача была поставлена английским инженером H.Hele-Shaw [1] в 1898 году. За последние полстолетия проблема о течениях Hele-Shaw интенсивно исследовалась, её библиография насчитывает сейчас более 600 робот. Такой интерес к задаче вызван ее приложениями в физике и технике. Так, например, данная математическая модель возникает при описании процессов фильтрации [2,3], изучении роста кристаллов [4], в задачах электрохимии [5], в проблеме, описывающей движение нефтеносного контура [6]. Заметим так же, что задачу Hele-Shaw можно рассматривать, как вариант известной задачи Стефана для эллиптического уравнения, поскольку условия на свободной (искомой) границе в обеих проблемах имеют одинаковую форму [7-9].

Не претендуя на полноту обзора результатов исследования в задаче о течениях Hele-Shaw, отсылаем читателя к работе [10], где собрана наиболее полная библиография по этой проблеме. Здесь мы лишь отметим результаты по разрешимости задачи Hele-Shaw в различных классах функций. Проблема существования слабых решений однофазной задачи Hele-Shaw исследована в работах С.М. Эллиота, В. Яновского [11], Де Бенедетто, А.Фридмана [12]. Классическая разрешимость задачи в малом по времени в случае регулярных начальных данных доказана Б.В. Базалием [13,15], И. Фахуи [14], Д. Эшером, Г. Симоне [16], Г. Прокетом [17], Ж-Г. Бейли [18]. При этом авторы использовали различные методы доказательств: в работах [13]-[15] применялись методы теории потенциалов, работы [16]-[18] связаны с полугрупповым подходом. Что касается вопроса существования гладких решения в случае наличия сингулярностей на искомой границе в начальный момент времени, то эта проблема исследовалась в малом по времени при наличии угловых точек на свободной границе в работах [19] (без учета кривизны свободной границы) и [20] (с учетом поверхностного натяжения), где была доказана однозначная разрешимость в весовых классах Гёльдера. Заметим, что ранее в работе [21] были построены автомодельные решения в задаче Hele-Shaw в случае, когда начальная область является бесконечным плоским углом. С помощью теорем сравнения был получен ряд качественных свойств решения, в частности, показано, что в случае расширяющихся областей тупые углы мгновенно сглаживаются, в то время как острые углы могут сохранять свою геометрию в течении некоторого времени.

В данной работе исследуется разрешимость локально по времени задачи Hele-Shaw без учета кривизны, в случае, когда свободная и фиксированная границы имеют общие точки, в окрестности которых они образуют криволинейные или прямолинейные углы. Наличие общих точек у границ отличает исследуемую нами задачу от уже изученной ранее в работе [19]. При доказательстве разрешимости используется метод, предложенный ранее Б.В. Базалием в работе [22].

Статья организована следующим образом: в пункте 1 приведены функциональные пространства и сформулирован основной результат. Далее, в п.2 с помощью преобразования типа Ханзавы [23] исходная задача с неизвестной границей сводится к нелинейной задаче в фиксированной области. Соответствующая ей линейная задача с динамическим граничным условием в области с угловыми точками изучена в п.3, где доказана её однозначная разрешимость и получены коэрцитивные оценки в весовых классах. Наконец, с помощью оценок решения линейной задачи и принципа сжатых отображений доказывается однозначная разрешимость исходной нелинейной задачи Hele-Shaw.

2. Постановка задачи и основной результат.

Пусть при каждом $\tau \in [0,T]$ односвязная область $\Omega_\tau \subset R^2$, и ее граница состоит их двух компонентов Γ_1 и Γ_τ, которые в начальный момент времени имеют две общие точки: начало координат $O=(0,0)$, и $A=(a,0)$. Γ_1- заданная фиксированная кривая, а Γ_τ- неизвестная (свободная) граница. Пусть функция $u(y_1,y_2,\tau)$ описывает давление внутри области Ω_τ. Задача Hele-Shaw заключается в нахождении функции $u(y_1,y_2,\tau)$ и свободной границы Γ_τ по условиям:

$$\Delta_y u=0, \quad y\in\Omega_\tau, \tau\in(0,T); \quad u|_{\Gamma_1}=g(y_1);$$

$$u|_{\Gamma_\tau}=0, \quad V_n|_{\Gamma_\tau}=-\mu^{-1}\frac{\partial u}{\partial n}, \quad \Gamma_\tau|_{\tau=0}=\Gamma \quad (\Omega_\tau|_{\tau=0}=\Omega); \tag{1}$$

где Δ_y- оператор Лапласа по переменным (y_1,y_2), μ- заданная положительная постоянная, n- единичный вектор внешней нормали к области Ω_τ, Ω- заданная начальная область, V_n- скорость перемещения точек границы Γ_τ в направлении вектора нормали n, $g(y_1)$- заданная неотрицательная функция.

Начальное распределение давления задается функцией $w(y_1,y_2)$, которая является решением задачи Дирихле в области Ω:

$$\Delta_y w=0, \quad y\in\Omega; \quad w|_{\Gamma_1}=g(y_1); \quad w|_{\Gamma}=0. \tag{2}$$

Условия $g(y_1) \geq 0, y \in \Gamma_1$, $g(y_1) \not\equiv 0$ обеспечивают расширение области Ω_τ по τ $(\Omega_{\tau_1} \subset \Omega_{\tau_2},\ \tau_1 < \tau_2)$, тем самым обусловлена корректная постановка задачи (1).

Пусть заданы некоторые положительные числа a, b_1, b_2: $0 < b_1 < \frac{a}{2} < b_2 < a$, углы $\omega_i \in (0, \pi/3)$, $i = 1, 2$, тогда определим границы Γ_1 и Γ следующим образом:

$$\Gamma_1 = \{(y_1, y_2) : y_2 = 0, y_1 \in [0, a]\}; \quad \Gamma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3;$$

$$\sigma_1 = \{(y_1, y_2) : y_2 = y_1 \tan\omega_1, y_1 \in [0, b_1)\}; \quad \sigma_2 = \{(y_1, y_2) : y_2 = F(y_1), y_1 \in [b_1, b_2)\},$$

$$F(y_1) \in C^{3+\alpha}((b_1, b_2)), \quad \alpha \in (0,1), \quad F(b_1) = b_1 \tan\omega_1, \quad F(b_2) = (a - b_2)\tan\omega_2;$$

$$\sigma_3 = \{(y_1, y_2) : y_2 = -(y_1 - a)\tan\omega_2, y_1 \in [b_2, a]\}. \tag{3}$$

Исследование разрешимости задачи (1) будем проводить в весовых классах Гёльдера $E^{k+\alpha,\beta,\delta}$.

Пусть D- заданная область в R^n с угловыми точками: O и A, $D_T = D \times (0, T)$. Обозначим через $|y - A|$ и $|y - O|$ расстояние от точки $y \in \overline{D}$ до точек O и A, соответственно, и положим $r(y) = \min\{|y - A|, |y - O|\}$, $y \in \overline{D}$; $r = \min\{r(y), r(x)\}$, $\forall x, y \in \overline{D}$.

Определим банахово пространство функций $v(y,t)$ $E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{D}_T)$ с конечной нормой

$$\|v\|_{E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{D}_T)} = \sum_{|l|=0}^{k} [\sup_{\overline{D}_T} r^{|l|-s}(y)|D_y^l v(y,t)| + \langle D_y^l v\rangle^{(\alpha)}_{y,s,\overline{D}_T} +$$

$$+ \left\langle D_y^l v \right\rangle^{(\beta)}_{t,s,\overline{D}_T} + \left[D_y^l v\right]^{(\delta,\beta)}_{s,\overline{D}_T}], \tag{4}$$

в правой части равенства (4) стоят следующие полунормы:

$$\left\langle D_y^l v \right\rangle^{(\alpha)}_{y,s,\overline{D}_T} = \sup_{\overline{D}_T} r^{|l|-s+\alpha} \frac{|D_y^l v(y,t) - D_x^l v(x,t)|}{|x-y|^\alpha},$$

$$\left\langle D_y^l v \right\rangle^{(\beta)}_{t,s,\overline{D}_T} = \sup_{\overline{D}_T} r^{|l|-s}(y) \frac{|D_y^l v(y,t) - D_y^l v(y,\tau)|}{|t-\tau|^\beta},$$

$$\left[D_y^l v\right]^{(\delta,\beta)}_{s,\overline{D}_T} = \sup_{\overline{D}_T} r^{|l|-s+\delta} \frac{|D_y^l v(y,t) - D_x^l v(x,t) - D_y^l v(y,\tau) + D_x^l v(x,\tau)|}{|x-y|^\delta |t-\tau|^\beta},$$

с $l = (l_1, ... l_n)$, $D_y^l = \frac{\partial^{|l|}}{\partial y_1^{l_1} ... \partial y_n^{l_n}}$, $|l| = l_1 + ... + l_n$, $\alpha, \beta, \delta \in (0,1)$, s- некоторое заданное положительное число. Аналогичным образом вводятся пространства $E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\partial D_T)$ и $E_s^{k+\alpha}(\overline{D})$.

Заметим, что если область D не содержит угловых точек, то определение пространств $E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{D}_T)$ сохраняется, если только во введенных соотношениях (4) для норм и полунорм положить $r(y) = r = 1$. В этом случае пространства $E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{D}_T)$ совпадают с обычными классами Гёльдера $\mathrm{C}^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{D}_T)$, введенными в работе [24], со следующей нормой:

$$\|v\|_{C^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{D}_T)} = \sum_{|l|=0}^{k}\left[\sup_{\overline{D}_T}|D_y^l v(y,t)| + \left\langle D_y^l v\right\rangle_{y,\overline{D}_T}^{(\alpha)} + \left\langle D_y^l v\right\rangle_{t,\overline{D}_T}^{(\beta)} + \left[D_y^l v\right]_{\overline{D}_T}^{(\delta,\beta)}\right],$$

где $\langle v\rangle_{y,\overline{D}_T}^{(\alpha)}$, $\langle v\rangle_{t,\overline{D}_T}^{(\beta)}$- постоянные Гёльдера относительно переменных y и t, соответственно, и

$$[v]_{\overline{D}_T}^{(\delta,\beta)} = \sup_{\overline{D}_T}\frac{|v(y,t) - v(x,t) - v(y,\tau) + v(x,\tau)|}{|x-y|^{\delta}|t-\tau|^{\beta}}.$$

Множество функций $v(y,t)$ из класса $E_s^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{D}_T)$ ($\mathrm{C}^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{D}_T)$), удовлетворяющих нулевому начальному условию : $v(y,0) = 0$, назовем пространством $E_{s,0}^{k+\alpha,\beta,\delta}$ $(\overline{D}_T)$ ($\mathrm{C}_0^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{D}_T)$).

Будем считать, что функция $g(y_1) = 0$, $y_1 \in [0,\varepsilon] \cup [a-\varepsilon, a]$, $0 < \varepsilon < \frac{\min\{b_1,b_2\}}{3}$ и $g(y_1) \in E_{\gamma_0}^{3+\alpha}$, $\gamma_0 = \min\{\frac{\pi}{\omega_1}, \frac{\pi}{\omega_2}\}$, $\alpha \in (0,1)$.

Для точек кривой Γ введем координату ω, натуральный параметр на кривой, $\omega \in W$, и зададим Γ в виде $y = \bar{m}(\omega)$, где $\bar{m}(\omega)$- радиус вектор: $\bar{m}(\omega) = \{m_1(\omega), m_2(\omega)\}$. Пусть $\varepsilon_0 = \varepsilon/2$, $\bar{l}(\omega)$- $C^{k+\alpha}$ $(k \geq 2)$ векторное поле на Γ, трансверсальное к Γ: $\bar{l}(\omega) = (-1,0)$ в ε_0-окрестности точки O, и $\bar{l}(\omega) = (1,0)$ в ε_0-окрестности точки А, так что если γ- достаточно мало $(0 < \gamma < \varepsilon/4)$, тогда ω-линии $\{\bar{m}(\omega) + \eta\bar{l}(\omega, |\eta| < 2\gamma)\}$ не имеют самопересечений и не пересекаются с Γ.

Будем предполагать, что выполнено условие согласования

$$V_n(y,0)|_{\Gamma} = -\mu^{-1}\partial w/\partial n. \tag{5}$$

В задаче (1) будем отыскивать неизвестную границу $\Gamma_\tau := \Gamma_{\rho,T}$ в терминах ее отклонения от начальной границы вдоль вектора $\bar{l}(\omega)$:

$$\Gamma_{\rho,T} = \{(y,\tau) : \overline{y}(\omega,\tau) = \overline{m}(\omega) + \rho(\omega,\tau)\bar{l}(\omega), \quad \tau \in [0,T]\},$$

$$|\rho(\omega,\tau)| < \gamma/4, \quad \rho(\omega,0) = 0. \tag{6}$$

Обозначим через $\Omega_{\rho,T}$ область, ограниченную поверхностями Γ_{1T} и $\Gamma_{\rho,T}$. Таким образом, задача Hele-Shaw свелась к нахождению двух неизвестных функций $u(y,\tau)$, $\rho(\omega,\tau)$ в областях $\Omega_{\rho,T}$ и $\Gamma_{\rho,T}$ по условиям (1).

Теорема 1. *Пусть выполнены указанные выше условия на данные задачи* (1), $s = \gamma_0 - 3 - \delta$, $\forall\delta \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$. *Тогда найдется такое* $T_0 > 0$, *зависящее от этих данных, что существует единственное решение нелинейной задачи (1)* $u(y,\tau) \in E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{s+2}(\bar{\Omega}_\tau)$ $\rho_\tau(\omega,\tau) \in E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{s+1}(\bar{\Gamma}_\tau)$, $\rho(\omega,0) = 0$, $\rho(\omega,\tau)r^{\gamma_0-1} \in E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{s+2}(\bar{\Gamma}_\tau)$, *функция* $\rho_\tau(\omega,0)$ *удовлетворяет условию согласования* (5)*, свободная граница задается уравнением* (6)*.*

Замечание 1. *Результаты теоремы 1 остаются справедливыми и в случае начальной области с криволинейными углами, а именно:*

$$\sigma_1 = \{(y_1,y_2) : y_2 = y_1 \tan\omega_1 + \psi_1(y_1), y_1 \in [0,b_1)\},$$

$$\sigma_2 = \{(y_1,y_2) : y_2 = -(y_1-a)\tan\omega_2 + \psi_2(y_1), y_1 \in [b_2,a]\}, \tag{7}$$

где $\psi_1(y_1) \in C^{3+\alpha}([0,b_1])$, $\psi_2(y_1) \in C^{3+\alpha}([b_2,a])$, $\psi_1(0) = \psi_1'(0) = 0$, $\psi_2(a) = \psi_2'(a) = 0$.

Доказательство этого факта полностью повторяет доказательство теоремы 1, если в последнем применить невырожденное преобразование (см. (П.13) и леммы П.2 и П.3 из работы [19]), которое преобразует область с криволинейными углами в окрестности точек O, A в область с прямолинейными сегментами в окрестности этих точек.

3. Нелинейная задача в фиксированной области.

Определим отображение $(\omega,\eta) \to y = y(\omega,\eta)$:

$$y = (y_1,y_2) = \bar{m}(\omega) + \eta\bar{l}(\omega), \tag{8}$$

которое является диффеоморфизмом из $M = W \times (-\gamma,\gamma)$ на

$$N = \{y : y = \bar{m}(\omega) + \eta\bar{l}(\omega), (\omega,\eta) \in W \times (-\gamma,\gamma)\}.$$

Поскольку между $\bar{m}(\omega)$ и ω существует взаимно однозначное соответствие, то в дальнейшем соответствующие точки в R^2 мы будем также обозначать через ω. Обратное отображение из N в M определяется так: $(y_1,y_2) \longrightarrow (\omega(y),\eta(y))$. Пусть T - некоторое положительное число, введем функцию

$$\Phi_\rho(y,\tau) = \eta(y) - \rho(\omega(y),\tau), \quad (y,\tau) \in N \times [0,T],$$

тогда поверхность $\Gamma_{\rho,\tau}$ с учетом (6) может быть определена так: $\Gamma_{\rho,\tau} = \{(y,\tau) \in N \times [0,T] : \quad \Phi_\rho(y,\tau) = 0\}$, а условие Стефана на $\Gamma_{\rho\tau}$ в исходной задаче (1) примет вид:

$$\frac{\partial\Phi_\rho}{\partial\tau} - \mu(\nabla_y u(y,\tau), \nabla_y\Phi_\rho) = 0. \tag{9}$$

Рассмотрим два экземпляра пространств $R^2 \times [0,T]$, в первом из них введем координаты $(x,t) = (x_1,x_2,t)$ и обозначим его через X_T, а во втором введем координаты $(y,\tau) = (y_1,y_2,\tau)$ и обозначим его через Y_T. Определим отображение $e_\rho : X_T \longrightarrow Y_T$ по следующему правилу. Пусть $\chi(\lambda) \in C_0^\infty(R^1)$- срезающая функция такая, что $\chi(\lambda) = 1$, при $|\lambda| \le \frac{\gamma}{4}$, $\chi(\lambda) = 0$, при $|\lambda| \ge \gamma$, $|\chi\prime(\lambda)| \le 4\gamma^{-1}/3$, тогда

$$y(y_1, y_2) = y(\omega(y), \eta(y)), \quad \omega(y) = \omega(x), \quad \eta(y) = \lambda(x) + \chi(\lambda)\rho(\omega, t),$$

$$\tau = t \quad \text{при} \quad \{x(x_1, x_2), t\} = \{x(\omega(x), \lambda(x)), t\} \in N \times [0, T];$$

$$y = x, \quad \tau = t, \quad \text{при} \quad \{x(x_1, x_2), t\} \in (R^2 \backslash N) \times [0, T]. \tag{10}$$

При отождествлении X_T и Y_T такое отображение задает диффеоморфизм $e_\rho : X_T \longrightarrow X_T$,

$$e_\rho(x, t) = (x, t) \quad \text{при} \quad \{x(x_1, x_2), t\} \in (R^2 \backslash N) \times [0, T], \quad e_\rho(x(\omega, \lambda), t) =$$

$$= (x(\omega, \lambda(x) + \chi(\lambda)\rho(\omega, t)), t) \quad \text{при} \quad \{x(x_1, x_2), t\} \in N \times [0, T];$$

при котором Ω_T и Γ_T переходят в $\Omega_{\rho,T}$ и $\Gamma_{\rho,T}$ соответственно, а так как $\rho(\omega, 0) = 0$, то $e_\rho|_{t=0}$ есть тождественное отображение.

В частности, в малой окрестности угловой точки O преобразование (10) будет иметь вид:

$$\omega = \frac{x_2}{\sin \omega_1}, \quad \lambda = x_2 \cot \omega_1 - x_1; \quad y_1 = x_1 - \chi(\lambda)\rho(\omega, t), \quad y_2 = x_2, \tag{11}$$

аналогичные представления имеют место и в окрестности точки A.

Функция $u(y, \tau)$ при замене переменных (10) преобразуется в функцию $u \circ e_\rho$, для которой мы сохраним прежнее обозначение $u(x, t)$. При этой же замене переменных вектор $\nabla_y u(y, \tau)$ переходит в вектор $(\nabla_y u(y, \tau)) \circ e_\rho = \nabla_\rho u(x, t)$, так что $\nabla_\rho = (E_\rho^\star)^{-1}\nabla$, где $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$ и E_ρ- матрица Якоби отображения $e_\rho(x, t)$ по пространственным переменным, т.е. матрица с элементами $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x, t), i, j = 1, 2$, причем $|\det E\rho| = 1 + \chi\prime(\lambda(x))\rho(\omega(x), t) \ge 2/3$. Кроме того,

$$(\nabla_y u, \nabla_y \Phi_\rho) \circ e_\rho = S(\omega, t, \rho, \rho_\omega)\frac{\partial u}{\partial \lambda} + S_1(\omega, t, \rho, \rho_\omega)\frac{\partial u}{\partial \omega}, \quad \text{при} \quad (x, t) \in \Gamma_T,$$

$$u(x, t) = 0, \quad \text{при} \quad (x, t) \in \Gamma_T, \tag{12}$$

где

$$S(\omega, t, \rho, \rho_\omega) = (\nabla_\rho \lambda, \nabla_\rho \lambda), \quad S_1(\omega, t, \rho, \rho_\omega) = (\nabla_\rho \omega, \nabla_\rho \lambda). \tag{13}$$

Таким образом, после замены переменных (10) задача (1) переходит в задачу определения функции $u(x, t)$, определенной в фиксированной области Ω_T переменных (x, t), и функции $\rho(\omega, t)$, определенной на Γ_T, по условиям:

$$\sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}(x, t, \rho, \rho_\omega) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{2} b_i(x, t, \rho, \rho_\omega, \rho_{\omega\omega}) u_{x_i} = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T,$$

$$u(y(x),t)|_{\Gamma_{1T}} = g(x_1); \quad u(y(x),t)|_{\Gamma_T} = 0, \quad u(x,0) = w(x),$$

$$\rho(\omega,0) = 0, \quad \mu\rho_t + S(\omega,t,\rho,\rho_\omega)\frac{\partial u}{\partial \lambda} + S_1(\omega,t,\rho,\rho_\omega)\frac{\partial u}{\partial \omega}|_{\Gamma_T} = 0. \qquad (14)$$

Из определения отображения $(x_1,x_2) \longrightarrow (\omega(x),\lambda(x))$ после непосредственных вычислений для коэффициентов b_{ij}, b_i, $i,j = 1,2$, следуют равенства

$$b_{ij}(x,t,\rho,\rho_\omega) = \delta^i_j,\ b_i = 0,\ \text{при}\ t = 0,\ \text{или}\ (x,t) \in \Omega_T \setminus N_T, N_T = N \times (0,T), \quad (15)$$

где δ^i_j– символ Кронекера. В дальнейшем мы проведем вычисления коэффициентов в задаче (14) лишь в окрестности угловой точки O, для точки A вычисления будут аналогичны, что касается представления для коэффициентов вне угловых точек, то они подробно описаны в [19]. Как это следует из (11), для коэффициентов задачи (14) вблизи O (там, где $\bar{l}(\omega) = \{-1,0\}$) справедливы следующие соотношения:

$$(E^*_\rho)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\chi'\rho} & 0 \\ \frac{\chi'\rho\cot\omega_1+\chi\rho'_\omega\sin^{-1}\omega_1}{1+\chi'\rho} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\nabla_\rho = \left(\frac{1}{1+\chi'\rho}\frac{\partial}{\partial x_1}; \frac{\chi'\rho\cot\omega_1 + \chi\rho'_\omega\sin^{-1}\omega_1}{1+\chi'\rho}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right),$$

$$b_{11}(x,t,\rho,\rho_\omega) = \frac{1+[\chi'\rho\cot\omega_1 + \chi\rho'_\omega\sin^{-1}\omega_1]^2}{(1+\chi'\rho)^2}, \quad b_{22}(x,t,\rho,\rho_\omega) = 1,$$

$$b_{12}(x,t,\rho,\rho_\omega) = b_{21}(x,t,\rho,\rho_\omega) = \frac{\chi'\rho\cot\omega_1 + \chi\rho'_\omega\sin^{-1}\omega_1}{1+\chi'\rho},$$

$$b_1(x,t,\rho,\rho_\omega,\rho_{\omega\omega}) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1+[\chi'\rho\cot\omega_1 + \chi\rho'_\omega\sin^{-1}\omega_1]^2}{2(1+\chi'\rho)^2}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\chi'\rho\cot\omega_1 + \chi\rho'_\omega\sin^{-1}\omega_1}{1+\chi'\rho}\right), b_2(x,t,\rho,\rho_\omega,\rho_{\omega\omega}) = 0,$$

$$S(\omega,0,0,0) = 1+\cot^2\omega_1, \quad S_1(\omega,0,0,0) = \frac{\cos\omega_1}{\sin^2\omega_1},$$

$$S(\omega,t,\rho,\rho_\omega) = S(\omega,0,0,0) - 2S_1(\omega,0,0,0)\rho_\omega + \frac{\rho^2_\omega}{\sin^2\omega_1},$$

$$S_1(\omega,t,\rho,\rho_\omega) = S_1(\omega,0,0,0) - \frac{\rho_\omega}{\sin^2\omega_1}. \qquad (16)$$

Для задачи (14) построим функцию $s(\omega,t)$, удовлетворяющую тем же начальным условиям, что и функция $\rho(\omega,t)$, а именно:

$$s(\omega,0) = 0, \quad \mu s_t(\omega,0) + S(\omega,0,0,0)\frac{\partial w}{\partial \lambda} + S_1(\omega,0,0,0)\frac{\partial w}{\partial \omega}|_{\Gamma} = 0, \qquad (17)$$

где функция $w(x)$ является решением задачи (2). Как это следует из результатов главы 6 [25] и теоремы 3.11 [26], задача (2) имеет единственное решение $w(x) \in E^{3+\alpha}_{\gamma_0}(\bar{\Omega})$, для которого имеет место представление:

$$w(x) = c_1\chi_1(r)|x-O|^{\frac{\pi}{\omega_1}} \sin\frac{\pi}{\omega_1}\varphi + c_2\chi_2(r_A)|x-A|^{\frac{\pi}{\omega_2}} \sin\frac{\pi}{\omega_2}(\pi-\varphi) + V(x), \quad (18)$$

где $V(x) \in E^{3+\alpha}_{s_1}(\bar{\Omega})$, $s_1 = 1 + \max\{\frac{\pi}{\omega_1}, \frac{\pi}{\omega_2}\}$, χ_i– срезающие функции, $i = 1,2$: $\chi_1(r) = 0$, $r > b_1/2$, $\chi_1(r) = 1$, $r < b_1/4$; $\chi_2(r_A) = 0$, $r_A \equiv |x-A| > (a-b_2)/2$, $\chi_2(r_A) = 1$, $|x-A| < (a-b_2)/4$; постоянные $c_i = c_i(g(x_1))$ $i = 1,2$, определяются однозначно по функции $g(x_1)$.

Возвращаясь к построению функции $s(\omega,t)$ с учетом (17), положим

$$s(\omega,t) = tm_0(\omega), \quad m_0(\omega) = -\frac{1}{\mu}S(\omega,0,0)\frac{\partial w}{\partial\lambda}, x(\omega) \in \Gamma, \quad (19)$$

(здесь мы воспользовались тем фактом, что $w = 0$, $x(\omega) \in \Gamma$, и, следовательно, $S_1(\omega,0,0)\frac{\partial w}{\partial\omega} = 0$, $x(\omega) \in \Gamma$), тогда из представления (18) и свойств функции $V(x)$ следует неравенство:

$$\|s\|_{E^{2+\alpha,1,\alpha}_{\gamma_0-1}(\overline{\Gamma}_T)} + \|s_t\|_{E^{2+\alpha,\beta^*,\alpha}_{\gamma_0-1}(\overline{\Gamma}_T)} \le c\|w\|_{E^{3+\alpha}_{\gamma_0}(\overline{\Omega})}, \quad 1 \ge \beta* > \beta > 0. \quad (20)$$

Продолжим преобразование задачи (1) и в соотношениях (14) вместо искомых функций введем новые неизвестные функции:

$$\rho(\omega,t) = \sigma(\omega,t) + s(\omega,t), \quad u(x,t) = \Theta(x,t) + w(x) - (\nabla_x w, \bar{e}_\sigma), \quad (21)$$

где $\bar{e}_\sigma = \frac{\partial\bar{x}(\omega,\lambda)}{\partial\lambda}\chi(\lambda(x))\sigma(\omega,t)$. Отметим, что $\bar{e}_\sigma|_{\Gamma^1_T} = 0$, $\bar{e}_\sigma|_{\Gamma_T} = \bar{l}(\omega)\sigma(\omega,t)$. Пусть $d(w(x),\omega) = -(\nabla_x w, \bar{l}(\omega))$. Подставим функции (21) в уравнение и граничные условия задачи (14) и после некоторых преобразований получим:

$$\Delta_x\Theta = -\sum_{ij=1}^{2}[b_{ij}(x,t,s,s_\omega) - b_{ij}(x,0,s,s_\omega)][\Theta_{x_ix_j} + w_{x_ix_j}] - \sum_{i=1}^{2}[b_i(x,t,s,s_\omega,s_{\omega\omega})$$

$$-b_i(x,0,s,s_\omega,s_{\omega\omega})][\Theta_{x_i} + w_{x_i}] + \sum_{ij=1}^{2}[b_{ij}(x,t,s,s_\omega) - b_{ij}(x,0,s,s_\omega)]\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(\nabla w, \bar{e}_\sigma)$$

$$+\Delta_x(\nabla w, \bar{e}_\sigma) + \sum_{i=1}^{2}[b_i(x,t,s,s_\omega,s_{\omega\omega}) - b_i(x,0,s,s_\omega,s_{\omega\omega})]\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla w, \bar{e}_\sigma)]$$

$$-\sum_{ij=1}^{2}[b_{ij}(x,t,\rho,\rho_\omega) - b_{ij}(x,t,s,s_\omega)][\Theta_{x_ix_j} + w_{x_ix_j} - \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(\nabla w, \bar{e}_\sigma)]$$

$$-\sum_{i=1}^{2}[b_i(x,t,\rho,\rho_\omega,\rho_{\omega\omega})-b_i(x,t,s,s_\omega,s_{\omega\omega})][\Theta_{x_i}+w_{x_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla w,\bar{e}_\sigma)]$$

$$\equiv F_l^0(x,t,\sigma,\sigma_\omega,\Theta_{x_i},\Theta_{x_ix_j})$$
$$+F_n^0(x,t,\sigma,\sigma_\omega,\Theta_{x_i},\Theta_{x_ix_j}):=F^0(x,t,\sigma,\Theta_{x_i}),\ (x,t)\in\Omega_T, \tag{22}$$

$$\Theta(y(x),t)|_{\Gamma_{1T}}=0;\quad \Theta(y(x),t)+d(w(x),\omega)\sigma(\omega,t)|_{\Gamma_T}=0; \tag{23}$$

$$\mu\sigma_t+S(\omega,0,s,s_\omega)\tfrac{\partial\Theta}{\partial\lambda}-2S_1(\omega,0,s,s_\omega)\tfrac{\partial w}{\partial\lambda}\sigma_\omega=-\mu s_t-S(\omega,0,s,s_\omega)\tfrac{\partial w}{\partial\lambda}$$

$$-S(\omega,t,s,s_\omega)\tfrac{\partial d(w(x),\omega)}{\partial\lambda}\sigma-[S(\omega,t,\rho,\rho_\omega)-S(\omega,t,s,s_\omega)+2S_1(\omega,0,s,s_\omega)\sigma_\omega]\tfrac{\partial w}{\partial\lambda}$$

$$-[S(\omega,t,s,s_\omega)-S(\omega,0,s,s_\omega)]\tfrac{\partial(\Theta+w)}{\partial\lambda}-[S(\omega,t,\rho,\rho_\omega)-S(\omega,t,s,s_\omega)]\tfrac{\partial d(w(x),\omega)}{\partial\lambda}\sigma$$

$$-[S(\omega,t,\rho,\rho_\omega)-S(\omega,t,s,s_\omega)]\tfrac{\partial\Theta}{\partial\lambda}\equiv F_l^1(x,t,\sigma,\sigma_\omega,\Theta_\lambda)+F_n^1(x,t,\sigma,\sigma_\omega,\Theta_\lambda)$$

$$:=F^1(x,t,\sigma,\Theta),\quad (x(\omega),t)\in\Gamma_T, \tag{24}$$

$$\Theta(x,0)=0,\quad x\in\bar{\Omega},\quad \sigma(\omega,0)=0,\quad \sigma_t(\omega,0)=0,\quad x(\omega)\in\Gamma, \tag{25}$$

здесь функции F_l^i содержат линейные слагаемые относительно σ,Θ и их производных, а F_n^i состоит из нелинейных слагаемых относительно σ,Θ и их производных, $i=0,1$. Кроме того, заметим, что из свойств функций $s(\omega,t)$ и $\rho(\omega,t)$ следуют равенства: $F_l^i=0$, $F_n^i=0$, при $t=0$, $i=0,1$.

4. Исследование линейной задачи: оценки, разрешимость.

Пусть $\partial/\partial l$- производная по направлению вектора $\bar{l}(\omega)$, заданного в пункте 2. Предметом наших исследований в этом пункте является линейная краевая задача с переменными коэффициентами, в которой требуется найти функции $\Theta(y,t)$ и $\sigma(\omega,t)$, удовлетворяющие условиям:

$$\Delta_x\Theta=F_0(x,t),(x,t)\in\Omega_T;\quad \Theta|_{\Gamma_{1T}}=F_1(x_1,t); \tag{26}$$

$$\Theta(x,t)+w_l(x)\sigma|_{\Gamma_T}=F_2(x,t),$$
$$\sigma_t+S(\omega,0,s,s_\omega)\tfrac{\partial\Theta}{\partial\lambda}-2S_1(\omega,0,s,s_\omega)\tfrac{\partial w}{\partial\lambda}\sigma_\omega|_{\Gamma_T}=F_3(x,t); \tag{27}$$

$$\Theta(x,0)=0, \quad x\in\overline{\Omega}, \quad \sigma(\omega,0)=0, \quad \sigma_t(\omega,0)=0, \quad x(\omega)\in\overline{\Gamma}. \tag{28}$$

Заметим, что задача (26)-(28) при $F_i(y,t)=0$, $i=1,2$, получается из задачи (22)-(25), если в правых частях последней заморозить функциональные аргументы при $t=0$.

Теорема 2. *Пусть* $F_0\in E^{\alpha,\beta,\alpha}_{s,0}(\bar\Omega_T)$, $F_1\in E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{s+2,0}(\bar\Gamma_{1T})$, $F_2\in E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{s+2,0}(\bar\Gamma_T)$, $\partial F_2/\partial t\in E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{s+\gamma_0,0}(\bar\Gamma_T)$, $F_3\in E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{s+1,0}(\bar\Gamma_T)$, *где* $s=\gamma_0-3-\delta$, $\alpha,\delta\in(0,1)$, $0<\beta<1$, *функция* $w(x)$ *удовлетворяет соотношению* (18). *Тогда задача* (26)-(28) *при* $T\le T_0$ *имеет единственное решение* $\Theta(y,t),\sigma(\omega,t)$, *где* T_0 *зависит от коэффициентов задачи и не зависит от правых частей, такое что* $\Theta(y,t)\in E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{s+2}(\overline{\Omega}_T)$, $r^{\gamma_0-1}\sigma(\omega,t)\in E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{s+2}(\overline{\Gamma}_T)$, $\sigma_t(\omega,t)\in E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{s+1,0}(\overline{\Gamma}_T)$, *и справедлива оценка*

$$\|\Theta\|_{E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{s+2}(\overline{\Omega}_T)}+\|\sigma r^{\gamma_0-1}\|_{E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{s+1}(\overline{\Gamma}_T)}+\|\sigma_t\|_{E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{s+1}(\overline{\Gamma}_T)}\le c(\|F_0\|_{E^{\alpha,\beta,\alpha}_{s}(\overline{\Omega}_T)}+$$

$$\|F_1\|_{E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{s+2}(\overline{\Gamma}_{1T})}+\|F_2\|_{E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{s+2}(\overline{\Gamma}_T)}+\|\partial F_2/\partial t\|_{E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{s+\gamma_0}(\overline{\Gamma}_T)}+\|F_3\|_{E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{s+1}(\overline{\Gamma}_T)}), \tag{29}$$

где c*- положительная постоянная, которая зависит от коэффициентов соотношений* (26)-(28) *и гладкости кривых* Γ *и* Γ_1.

Доказательство. Вначале докажем теорему в случае $F_i(x,t)\equiv 0$, $i=\overline{0,2}$. Сведём систему (26)-(28) к граничной задаче для функции $\Theta(x,t)$. Для этих целей из первого соотношения в (27) выразим $\sigma(\omega,t)$ через $\Theta(x,t)$:

$$\sigma|_{\Gamma_T}=-\tfrac{1}{\partial w/\partial l}\Theta, \tag{30}$$

тогда с учетом этого равенства задача (26)-(28) преобразуется к виду:

$$\Delta_x\Theta=0,(x,t)\in\Omega_T; \quad \Theta|_{\Gamma_{1T}}=0;$$

$$-\tfrac{1}{\partial w/\partial l}\Theta_t+S(\omega,0,s,s_\omega)\tfrac{\partial\Theta}{\partial\lambda}+2S_1(\omega,0,s,s_\omega)\tfrac{\partial\Theta}{\partial\omega}|_{\Gamma_T}=F_3(x,t);$$

$$\Theta(x,0)=0, \quad x\in\overline{\Omega}, \qquad \Theta_t(x,0)=0, \quad x(\omega)\in\overline{\Gamma}. \tag{31}$$

Таким образом, доказательство теоремы 2 для системы (26)-(28) (в случае $F_i(x,t)\equiv 0$, $i=\overline{0,2}$) сводится к получению аналогичного утверждения для краевой задачи (31). Это доказательство разобьём на два этапа. На первом шаге, в предположении существования и единственности слабого решения задачи (31), покажем справедливость оценки (29) для функции Θ. Второй шаг состоит из доказательства существования и единственности слабого решения в задаче (31).

Пусть $0<\delta_1<\min\{\varepsilon_0,1/4\}$, $B_{\delta_1}(O)$- шар с центром в точке O радиуса δ_1, $\xi_1\in C_0^\infty(R^2)$: (supp $\xi_1)\cap\Omega\subset B_{\delta_1}(O)$, $0\le\xi_1\le 1$, $\frac{\partial\xi_1}{\partial\lambda}=0$ на Γ, и рассмотрим функцию $\Theta_1=\Theta\xi_1$. Из соотношений (31) с учетом представлений (16) имеем:

$$\Delta_x\Theta_1=f_0, \quad (x,t)\in G_T; \quad \Theta_1(x,t)|_{\Gamma_{1T}}=0;$$

$$\Theta_1(x,0)=0 \quad x\in\bar{G}, \quad \frac{\partial\Theta_1}{\partial t}(x,0)=0, \quad x\in\bar{b}$$

$$c_1^{-1}r^{1-\frac{\pi}{\omega_1}}\frac{\partial\Theta_1}{\partial t}+\frac{\partial\Theta_1}{\partial n}-h\frac{\partial\Theta_1}{\partial r}=f_3(y,t), \quad (y,t)\in\overline{b}_T, \quad h=\cot(\pi-\omega_1), \tag{32}$$

где $c_1=c_1(g(x_1))-$ постоянная из представления (18) для функции $w(x)$,

$$G=\{(x_1,x_2):0<x_2<x_1\tan(\omega_1/2), \quad x_1>0\}, \quad G_T=G\times(0,T),$$

$$b=\{(x_1,x_2):x_2=x_1\tan(\omega_1/2), \quad x_1>0\}, \quad b_T=b\times[0,T];$$

$$f_0=-\Theta\Delta_x\xi_1-2\nabla\xi_1\nabla\Theta, \quad f_3=\left(c_1^{-1}r^{1-\frac{\pi}{\omega_1}}-\frac{1}{\partial w/\partial l}\right)\xi_1\Theta_t+h\Theta\frac{\partial\xi_1}{\partial r}+F_3\xi_1; \tag{33}$$

$$f_0(x,0)=0, \quad f_3(x,0)=0.$$

Задача (32) является частным случаем проблемы исследованной в весовых классах Гёльдера $E^{k+\alpha,\beta,\alpha}$ в работе [27], откуда следует справедливость утверждения.

Теорема 3. [27]*Пусть* $\omega_1\in(0,\pi/2)$, $s=\frac{\pi}{\omega_1}-3-\delta$, $\alpha,\beta,\delta\in(0,1)$, $f_0(x,t)\in E_{s,0}^{\alpha,\beta,\alpha}(\overline{G}_T)$, $f_3(x,t)\in E_{s+1}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{b}_T)$. *Тогда существует единственное решение задачи* (32) $\Theta_1(x,t)\in E_{2+s}^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{G}_T)$, *для которого справедлива оценка*

$$\|\Theta_1\|_{E_{s+2}^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{G}_T)}+\left\|r^{1-\pi/\omega_1}\partial\Theta_1/\partial t\right\|_{E_{s+1}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\bar{b}_T)}\le$$

$$\le const.(\|f_0\|_{E_s^{\alpha,\beta,\alpha}(\overline{G}_T)}+\|f_3\|_{E_{s+1}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\bar{b}_T)}). \tag{34}$$

С учетом представлений (33) для f_0 и f_3, получим оценки для правой части в неравенстве (34). Из свойств функции $w(x)$ (см. (18)) следует:

$$\left\|\left(c_1^{-1}r^{1-\frac{\pi}{\omega_1}}-(\frac{\partial w}{\partial l})^{-1}\right)\xi_1\Theta_t\right\|_{E_{s+1}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\bar{b}_T)}=$$

$$=\left\|\frac{V_r\xi_1}{c_1r^{-1+\frac{\pi}{\omega_1}}[c_1+V_rr^{1-\frac{\pi}{\omega_1}}]}r^{1-\frac{\pi}{\omega_1}}\Theta_t\right\|_{E_{s+1}^{1+\alpha,\beta,\alpha}((\overline{\Gamma\cap B_{\delta_1}(O)})_T)}$$

$$\le\delta_1^{s_1-\pi/\omega_1}\left\|r^{1-\pi/\omega_1}\partial\Theta/\partial t\right\|_{E_{s+1}^{1+\alpha,\beta,\alpha}((\overline{\Gamma\cap B_{\delta_1}(O)})_T)} \tag{35}$$

где $s_1-\pi/\omega_1\ge1$. Поскольку $\Theta(x,0)=0$, то

$$\max_{\bar{\Omega}_T}|r^{-s-2}\Theta(x,t)|\le\max_{\bar{\Gamma}_T}|r^{-s-2}\Theta(x,t)|\le T\frac{\max\limits_{\bar{\Gamma}_T}|r^{-s-\pi/\omega_1}\frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial t}|}{(\mathrm{diam}\ \Omega)^{2-\pi/\omega_1}} \tag{36}$$

и, следовательно,

$$\|h\Theta\tfrac{\partial\xi_1}{\partial r}\|_{E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{s+1}(\bar{b}_T)} \le const.|h|\delta_1^{\pi/\omega_1}T\left\|r^{1-\pi/\omega_1}\partial\Theta/\partial t\right\|_{E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{s+1}((\overline{\Gamma\cap B_{\delta_1}(O)})_T)}. \quad (37)$$

Что касается слагаемых, входящих в определение для f_0, то их оценки получаются после последовательного применения интерполяционного неравенства и (36).

Таким образом, из представлений (33) и оценок (34)-(37) имеем:

$$\|f_3\|_{E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{s+1}(\bar{b}_T)} \le (\delta_1^{s_1-\pi/\omega_1}+|h|\delta_1^{\pi/\omega_1}T)\left\|r^{1-\pi/\omega_1}\partial\Theta/\partial t\right\|_{E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{s+1}((\overline{\Gamma\cap B_{\delta_1}(O)})_T)}$$

$$+\|F_3\|_{E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{s+1}((\overline{\Gamma\cap B_{\delta_1}(O)})_T)}, \quad (38)$$

$$\|f_0\|_{E^{\alpha,\beta,\alpha}_{s}(\overline{G}_T)} \le T(\delta_1^{-1+\pi/\omega_1}+\delta_1^{\pi/\omega_1}\tilde{\delta}_2^{-1})\left\|r^{1-\pi/\omega_1}\partial\Theta/\partial t\right\|_{E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{s+1}((\overline{\Gamma\cap B_{\delta_1}(O)})_T)}$$

$$+\delta_1\tilde{\delta}_2\|\Theta\|_{E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{s+2}((\overline{\Omega\cap B_{\delta_1}(O)})_T)}. \quad (39)$$

Далее, выбирая постоянные δ_i, $i=1,2$ из условий:

$$\delta_1^{s_1-\pi/\omega_1}+T(|h|\delta_1^{\pi/\omega_1}+\delta_1^{-1+\pi/\omega_1}+\delta_1^{\pi/\omega_1}\tilde{\delta}_2^{-1})<\tfrac{1}{2N}, \quad \delta_1\tilde{\delta}_2<\tfrac{1}{2N}, \quad (40)$$

где, N некоторое фиксированное число, которое мы выбираем ниже, получаем:

$$\|\Theta\|_{E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{s+2}((\overline{\Omega\cap B_{\delta_1}(O)})_T)}+\left\|r^{1-\pi/\omega_1}\partial\Theta/\partial t\right\|_{E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{s+1}((\overline{\Gamma\cap B_{\delta_1}(O)})_T)} \le$$

$$\le const.\|F_3\|_{E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{s+1}((\overline{\Gamma\cap B_{\delta_1}(O)})_T)}. \quad (41)$$

Наконец, отметим, что оценка (29) получается с помощью разбиения единицы: $\xi_i \in C_0^\infty(R^2), i=\overline{1,N}$: $(\mathrm{supp}\ \xi_i)\cap\Omega \subset B_{\delta_i}(x_i)$, $\Theta_i=\Theta\xi_i$, $\Theta=\sum_{i=1}^{N}\Theta_i$, $x_i \in \bar{\Omega}$, где δ_i удовлетворяют неравенствам (40); и рассмотрения соответствующих модельных задач в полупространстве, для которых будут иметь место оценки вида (41).

Доказательство существования и единственности слабого решения в задаче (31) проводится стандартным образом, поэтому его детали мы опускаем. Заметим лишь, что для этого достаточно с помощью преобразования Лапласа по переменной t свести задачу (31) к эллиптической задаче с комплексным параметром в граничном условии. Далее с помощью известной техники (см., например, глава 3 в [28], §2.1.2 в [29] и [30]) доказывается однозначная разрешимость эллиптической задачи в классах Соболева и получаются соответствующие коэрцитивные оценки. Наконец, равенство Парсеваля и эквивалентность норм в пространствах L_2 позволяют получить существование и единственность слабого решения в задаче (31): $\Theta \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega\cup\Gamma))$, $\Theta_t r^{\frac{1-\gamma_0}{2}} \in L_2(0,T;W_2^{1/2}(\Gamma))$.

Таким образом, теорема 2 для случая $F_i = 0$, $i=\overline{0,2}$ доказана. Для того чтобы снять это ограничение, достаточно рассмотреть следующие эллиптические задачи:

$$\Delta_x\tilde{\Theta} = F_0, \quad (x,t)\in\Omega_T; \quad \tilde{\Theta}|_{\Gamma_{1T}} = F_1, \quad \tilde{\Theta}|_{\Gamma_T} = 0, \quad \tilde{\Theta}(x,0)=0, \quad x\in\bar{\Omega}; \tag{42}$$

$$\Delta_x\Theta^* = 0,\ (x,t)\in\Omega_T;\ \Theta^*|_{\Gamma_{1T}} = 0,\ \Theta^*|_{\Gamma_T} = F_2,\ \Theta^*(x,0)=0,\ x\in\bar{\Omega}. \tag{43}$$

Из результатов главы 6 в [25] и теоремы 3.11 в [26] с учетом гладкости по t функций F_i следует однозначная разрешимость (42) и (43) и оценки:

$$\|\tilde{\Theta}\|_{E_{s+2}^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{\Omega}_T)} \le const.(\|F_0\|_{E_s^{\alpha,\beta,\alpha}(\overline{\Omega}_T)} + \|F_1\|_{E_{s+2}^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{\Gamma}_{1T})}), \quad \frac{\partial\tilde{\Theta}}{\partial t}|_{\Gamma_T} = 0;$$

$$\|\Theta^*\|_{E_{s+2}^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{\Omega}_T)} + \|\Theta_t^*\|_{E_{s+\gamma_0}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{\Gamma}_T)} \le$$
$$\le const.(\|F_2\|_{E_{s+2}^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{\Gamma}_T)} + \|\partial F_2/\partial t\|_{E_{s+\gamma_0}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{\Gamma}_T)}),$$

что и завершает доказательство теоремы 2. □

5. Доказательство Теоремы 1.

Для завершения доказательства теоремы 1 вернемся к рассмотрению нелинейной задачи (22)-(25). Пусть H_Ψ пространство элементов $\Psi=(\Theta,\sigma)$ с нормой

$$\|\Psi\|_{H_\Psi} = \|\Theta\|_{E_{s+2}^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{\Omega}_T)} + \left\|\sigma r^{\gamma_0-1}\right\|_{E_{s+2}^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{\Gamma}_T)} + \|\rho_\tau\|_{E_{s+1}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{\Gamma}_T)}.$$

Введем также пространство H_h с элементами $h=(F^0,F^1)$ и нормой

$$\|h\|_{H_h} = \left\|F^0\right\|_{E_s^{\alpha,\beta,\alpha}(\overline{\Omega}_T)} + \left\|F^1\right\|_{E_{s+1}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{\Gamma}_T)}.$$

В рамках введенных обозначений задачу (22)-(25) можно записать в виде

$$A\Psi = f(x,t) + F(\Psi), \tag{44}$$

где A- линейный оператор, определяемый левыми частями соотношений (22)-(25), $A: H_\Psi \longrightarrow H_h$, вектор $f(x,t)$ строится только по начальным условиям, $F(\Psi) = F_l(\Psi) + F_n(\Psi)$, где $F_n(\Psi)$ содержит элементы Ψ, начиная с квадратичных членов, а $F_l(\Psi)$ является линейной частью вектора $F(\Psi)$ (см. представления для $F^i(x,t,\sigma,\Theta)$ в (22), (24)).

Поскольку оператор A удовлетворяет условиям теоремы 2, то нелинейную задачу (44) можно записать в виде:

$$\Psi = A^{-1}f(x,t) + A^{-1}F_l(\Psi) + A^{-1}F_n(\Psi) \equiv P(\Psi).$$

Очевидно, что неподвижная точка нелинейного оператора $P(\Psi)$ дает решение исходной задачи.

Лемма 1. *Пусть B_d- шар радиуса d с центром в нуле, $B_d \subset H_\Psi$. При $\Psi \in B_d$ имеют место оценки:*

$$\|F(0)\|_{H_h} \le C_1(w(x), s(\omega, t), T), \tag{45}$$

$$\|F(\Psi_1) - F(\Psi_2)\|_{H_h} \le C_2(w(x), s(\omega, t), T, d)||\Psi_1 - \Psi_2||_{H_\Psi}, \tag{46}$$

где $C_1(w(x), s(\omega, t), T) \to 0$, $C_2(w(x), s(\omega, t), T, d) \to 0$, при $d \to 0$, $T \to 0$, и

$$||\Psi_1 - \Psi_2||_{H_\Psi} = \|\Theta_1 - \Theta_2\|_{E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{s+2}(\overline{\Omega}_T)} + \left\|(\sigma_1 - \sigma_2) r^{\gamma_0 - 1}\right\|_{E^{2+\alpha,\beta,\alpha}_{s+2}(\overline{\Gamma}_T)} +$$
$$+ \left\|(\sigma_1 - \sigma_2)_t\right\|_{E^{1+\alpha,\beta,\alpha}_{s+1}(\overline{\Gamma}_T)}.$$

Доказательство. Оценка (45) следует из представления для $F(\Psi)$ (см. (22), (24), (15), (16)) и более высокой гладкости по t элементов: $f(x,t)$, $F_l(\Psi)$, которые определяются функциями $w(x)$ и $s(\omega, t)$ (см. (20)). При доказательстве оценки (46) нам потребуются следующие свойства весовых пространств, которые следуют непосредственно из определений классов $E^{k+\alpha,\beta,\delta}_s$ и $C^{k+\alpha,\beta,\delta}$ (доказательство этих фактов можно найти в работе [19]).

Предложение 1. [19]*Пусть Ω- ограниченная область в R^n, $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $\alpha, \beta \in (0,1)$ $s > 0$, k- целое неотрицательное.*

1) Пусть $\Psi(x,t) \in E^{k+\alpha,\beta,\delta}_s(\overline{\Omega}_T)$ и $\Phi(x,t) \in C^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)$, тогда

$$||\Psi\Phi||_{E^{\alpha,\beta,\delta}_s(\overline{\Omega}_T)} \le c_1 ||\Psi||_{E^{\alpha,\beta,\delta}_s(\overline{\Omega}_T)} ||\Phi||_{C^{\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)},$$

$$||\Psi\Phi||_{E^{k+\alpha,\beta,\delta}_s(\overline{\Omega}_T)} \le c_1 (||\Psi||_{E^{k+\alpha,\beta,\delta}_s(\overline{\Omega}_T)} ||\Phi||_{C^{k-1+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)} +$$
$$+ ||\Psi||_{E^{k-1+\alpha,\beta,\delta}_s(\overline{\Omega}_T)} ||\Phi||_{C^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)}), \quad k \ne 0.$$

2) Пусть $\Psi(x,t), \quad \Phi(x,t) \in E^{k+\alpha,\beta,\delta}_s(\overline{\Omega}_T)$, тогда

$$||\Psi\Phi||_{E^{\alpha,\beta,\delta}_s(\overline{\Omega}_T)} \le c_2 ||\Psi||_{E^{\alpha,\beta,\delta}_s(\overline{\Omega}_T)} ||\Phi||_{C^{\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)} \le$$
$$\le c_3 ||\Psi||_{E^{\alpha,\beta,\delta}_s(\overline{\Omega}_T)} ||\Phi||_{E^{\alpha,\beta,\delta}_s(\overline{\Omega}_T)},$$

$$||\Psi\Phi||_{E^{k+\alpha,\beta,\delta}_s(\overline{\Omega}_T)} \le c_4 (||\Psi||_{E^{k+\alpha,\beta,\delta}_s(\overline{\Omega}_T)} ||\Phi||_{E^{k-1+\alpha,\beta,\delta}_s(\overline{\Omega}_T)} +$$
$$+ ||\Psi||_{E^{k-1+\alpha,\beta,\delta}_s(\overline{\Omega}_T)} ||\Phi||_{E^{k+\alpha,\beta,\delta}_s(\overline{\Omega}_T)}) \le$$
$$\le c_5 ||\Psi||_{E^{k+\alpha,\beta,\delta}_s(\overline{\Omega}_T)} ||\Phi||_{E^{k+\alpha,\beta,\delta}_s(\overline{\Omega}_T)}, \quad k \ne 0,$$

здесь c_i,$i = \overline{1,5}$,$-$ положительные постоянные.

Предложение 2. [19]*Пусть функции* $\Psi(y,t)$ *и* $\Psi_t(y,t)$ *определены в ограниченной области* $\overline{\Omega}_T$, $\Psi_t(y,t) \in E_s^{1+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)$ *и* $D_t^m \Psi_t(y,0) = 0$, $y \in \overline{\Omega}$, $m = 0,1$, *тогда* $\Psi(y,t) \in E_s^{1+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)$ *и справедливы неравенства:*

$$||\Psi||_{E_s^{1+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)} \leq c_1 T ||\Psi_t||_{E_s^{1+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)},$$

$$||\Psi||_{E_{s-1}^{1+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)} \leq c_2 d_0^{1-\alpha} T^{1-\beta} ||\Psi_t||_{E_s^{1+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)},$$

где c_i, $i = 1,2-$ *положительные постоянные,* $d_0 = diam\Omega$.

Вернемся к доказательству неравенства (46). Отметим, что оно в случае $F_n(\Psi)$ есть следствием того обстоятельства, что $F_n(\Psi)$ не содержит линейных слагаемых относительно Ψ. Таким образом, используя представления (22)-(25) и (16), оценку (29) с $F_i(y,t) = 0, \quad i = 1,2$, и результаты предложений 1, 2, можно показать справедливость неравенства (46) для $F_n(\Psi)$.

Что касается линейной части $F_l(\Psi)$, то оценка (46) следует из более высокой гладкости по t функции $s(\omega,t)$ и предложений 1, 2. Так, например, покажем справедливость (46) для функции $[b_{ij}(x,t,s,s_\omega) - b_{ij}(x,0,s,s_\omega)]\ [\Theta_{1x_ix_j} - \Theta_{2x_ix_j}]$ из представления для F_l^0 (см. (22)).

$$\|[b_{ij}(x,t,s,s_\omega) - b_{ij}(x,0,s,s_\omega)][\Theta_{1x_ix_j} - \Theta_{2x_ix_j}]\|_{E_s^{\alpha,\beta,\alpha}(\bar{\Omega}_T)} \leq$$

$$\leq \|b_{ij}(x,t,s,s_\omega) - b_{ij}(x,0,s,s_\omega)\|_{C^{\alpha,\beta,\alpha}(\bar{\Omega}_T)} \|\Theta_1 - \Theta_2\|_{E_{s+2}^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\bar{\Omega}_T)}. \tag{47}$$

Вначале оценим величину $\|b_{ij}(x,t,s,s_\omega) - b_{ij}(x,0,s,s_\omega)\|_{C^{\alpha,\beta,\alpha}(\bar{\Omega}_T)}$ в окрестности угловой точки O. Из представлений (16) для $b_{ij}(x,t,s,s_\omega)$ следует:

$$b_{22}(x,t,s,s_\omega) - b_{22}(x,0,s,s_\omega) = 0,$$

$$b_{11}(x,t,s,s_\omega - b_{11}(x,0,s,s_\omega) = \frac{[\chi' s \cot\omega_1 + \chi s'_\omega \sin^{-1}\omega_1]^2 - 2\chi' s - \chi^2 s^2}{(1+\chi' s)^2},$$

$$b_{12}(x,t,s,s_\omega) - b_{12}(x,0,s,s_\omega) =$$

$$= b_{21}(x,t,s,s_\omega) - b_{21}(x,0,s,s_\omega) = \frac{\chi' s \cot\omega_1 + \frac{\chi s'_\omega}{\sin\omega_1}}{1+\chi' s}. \tag{48}$$

Таким образом, из представлений (48), неравенства (20) и предложений 1,2 следует оценка

$$\|b_{ij}(x,t,s,s_\omega) - b_{ij}(x,0,s,s_\omega)\|_{C^{\alpha,\beta,\alpha}((\overline{\Omega \cap B_{\delta_1}(O)})_T)} \leq T^{\beta^* - \beta} c(s,w), \tag{49}$$

где $c(s,w)$- постоянная, зависящая от норм функций $w(x)$ и $s(\omega,t)$. Заметим, что неравенства аналогичные (49) будут иметь место и вне окрестности точки O. Возвращаясь к (47), получим

$$\|[b_{ij}(x,t,s,s_\omega) - b_{ij}(x,0,s,s_\omega)][\Theta_{1x_ix_j} - \Theta_{2x_ix_j}]\|_{E_s^{\alpha,\beta,\alpha}(\bar{\Omega}_T)} \leq$$

$$\leq T^{\beta^*-\beta} c(s,w) \|\Theta_1 - \Theta_2\|_{E_{s+2}^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\bar{\Omega}_T)}.$$

Для остальных слагаемых в F_l^0 и F_l^1 оценки получаются аналогично, что и завершает доказательство леммы. □

Таким образом, вследствие оценок (45) и (46) и ограниченности оператора A^{-1}, отображение P переводит B_d в себя и при достаточно малых d и T является сжимающим. Справедливость теоремы 1 следует тогда из принципа сжимающих отображений.

Из теорем 1, 2 следует, что для функции $\rho(y_1,t)$ из задачи (1) справедлива оценка с ограниченной постоянной $c(T)$:

$$|\rho_{y_1}(y_1,t)| \leq c(T)|y_1|^{\gamma_0-3-\delta}.$$

Из которой следует, что при $\omega_i < \pi/3$, $i = 1, 2$, $\rho_{y_1}(y_1,t) \longrightarrow 0$, когда $y_1 \longrightarrow 0$. Это означает, что геометрия угла в задаче Hele-Shaw в этом случае не разрушается. Более того, т.к. $\rho_t \in E_{s+1}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{\Gamma}_t)$, $\forall t \in (0,T_0)$, то в случае углов $\omega_i < \pi/3$ имеем $\rho_t(y_1,t) \longrightarrow 0$ при $y_1 \longrightarrow 0$, $t \in (0,T_1)$, $T_1 < T_0$, а это означает, что в течении некоторого времени угловая точка остается неподвижной. Таким образом, для задачи (1) при выполнении условий теоремы 1 имеет место феномен "времени ожидания."

Замечание 2. *Теорема 1 остается справедливой если в граничном условии на фиксированной границе* $\Gamma_1 T$ *функцию* $g(y_1)$ *заменить на* $g(y_1,t)$*:* $g(y_1,0) \geq 0, y \in \Gamma_1$, $g(y_1,t) \not\equiv 0$, $g(y_1,0) = 0$, $y_1 \in [0,\varepsilon] \cup [a-\varepsilon,a]$, $0 < \varepsilon < \frac{\min\{b_1,b_2\}}{3}$ *и* $g(y_1,t) \in E_{\gamma_0}^{3+\alpha,\beta^*,\alpha}(\Gamma_{1T})$, $g_t(y_1,t) \in E_{\gamma_0-1}^{2+\alpha,\beta^*,\alpha}(\Gamma_{1T})$, $\gamma_0 = \min\{\frac{\pi}{\omega_1}, \frac{\pi}{\omega_2}\}$, $\alpha, \beta^* \in (0,1)$, $t \in [0,T]$.

1. *Hele-Shaw H.S.* The flow of water // Nature.- 1898. - v.58.- P.34-36.
2. *Polubarinova-Kochina P.Ya.* On the motion of the oil contour// Dokl. Akad. Nauk SSSR.- 1945. - v.47.- P.254-257.
3. *Galin L.A.* Unsteady filtration with a free surface// Dokl. Akad. Nauk SSSR.- 1945. - v.47.- P.246-249.
4. *Pamplin B.R.* Crystal growth.-Oxford.–Pergamon.– 1975. 450P.
5. *Lacey A.A.* IMAJ // Appl.Math.- 1985. - v.35.- P.357-364.
6. *Howard G.C.* Hydraulic Fracturing.-Dallas,TX.–Soc.Petrol.Eng. AIME.– 1970. 500P.
7. *Rubinstein L.I.* The Stefan problem.-AMS.–Providence.– 1971. 430P.
8. *Elliot J.M., Ockendon J.R.* Weak and variational methods for moving boundary problem.– London.–Pitman– 1982. 350P.
9. *Richardson S.* Hele-Shaw flow with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel// J. Fluid Mech.- 1972. - v.56. - P.609-618.
10. *Howison S.D.* Hele-Shaw // http://www.maths.ox.ac.uk/howison/Hele-Shaw–2009.
11. *Elliot J.M., Janovsky V.A.* A variational inequality approach to the Hele-Shaw flow with a moving boundary// Proc. Royal Soc. Edinburgh.- 1981. - sect A.88. - P.93-107.
12. *Di Benedetto E., Friedman A.* The ill-possed Hele-Shaw and Stefan problem for suprecoold water// Trans. Amer. Math. Soc.- 1984. - 282, N.**3**. - P.183-203.
13. *Базалий Б.В.* О задаче Стефана для уравнения Лапласа// Доповіді АН України.- 1997. - N.**1**. - C.11-16.

14. *Fahuai Y.* Classical solution of quasi-stationary Stefan problem// Chin. Ann. of Math.- 1996. - v. 17 B., N.**2**. - P.175-186.
15. *Базалий Б.В.* О классической разрешимости задачи Hele-Shaw со свободной границей// Укр. мат. журнал.- 1998. - т. 50, N.**11**. - C.1452-1462.
16. *Escher J., Simonett G.* Classical solutions for Hele-Shaw models// SIAM J. MATH. Anal.- 1997. - v. 28, N.**5**. - P.1028-1047.
17. *Procert G.* Existence results for Hele-Shaw flow driven by surface tension// Euro. J. of Appl. Math.- 1998. - v.9. - P.195-224.
18. *Bailly S-H.* Local existence of classical solutions to the first-order parabolic equations describing free boundaries// Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications.- 1998. - v.32, N.**5**. - P.583-599.
19. *Vasylyeva N.* On the solvability of the Hele-Shaw problem in the case of nonsmooth initial data in weighted Hölder classes// Ukr. Math. Bulletin.- 2005. - v.2, N.**3**. - P.323-349.
20. *Bazaliy, B.V. and Friedman A.* The Hele-Shaw problem with surface tension in a half-plane// J. Differential Equations.- 2005. - v. 216. - P. 387-438.
21. *King J.R., Lacey A.A., Vazquez J.L.* Persistence of corners in free boundaries in Hele-Shaw flow// Euro. J. of Appl. Math.- 1995. - v.6. - P.445-490.
22. *Базалий Б.В.* Задача Стефана// Докл. АН УССР.- 1986. - сер. А, N.**11**. - P.3-7.
23. *Hanzava E.* Classical solutions of the Stefan problem// Tohoku Math.J.- 1981. - v.33, N.**3**. - P.297-335.
24. *Солонников В.А.* О разрешимости второй начально-краевой задачи для линейной нестационарной системы уравнений Навье-Стокса// Зап. научн. семинара ЛОМИ.- 1977. - т. 69. - C.200-218.
25. *Grisvard P.* Elliptic problems in nonsmooth domains.- London.–Pitman.–1985. 600C.
26. *Borsuk M., Kondratiev V.* Elliptic boundary value problems of second order in piecewise smooth domains.- Amsterdam: Elsevier Science B.V.–North-Holland Mathematical Library, 69.–1985. 534P.
27. *Vasylyeva N.* On the solvability of some nonclassical boundary-value problem for the Laplace equation in the plane corner// Advances in Differential Equations.- 2007. - v.12, N.**10**. - P.1167-1200.
28. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.- М.–Наука.–1973. 654С.
29. *Nicaise S.* Polygonal interface problems. -Franfurt am Main.– Lang.–1993. 251 P.
30. *Фролова Е.В.* Об одной нестационарной задаче в двугранном угле. I.// Зап. научн. семинара ЛОМИ.- 1991. - т. 69. - C.159-177.

ИПММ НАН Украины,
ул. Розы Люксембург, 74,
83114, Донецк, Украина
vasylyeva@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 14.12.2009