©2008. **И.Д. Пукальский**

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕРАВНОМЕРНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При помощи принципа максимума и априорных оценок исследуются задачи Дирихле, с косой производной и односторонняя краевая задача для неравномерно эллиптических уравнений второго порядка без ограничения на степенной порядок вырождения коэффициентов, но со знаковым неравенством на коэффициент при нулевой производной.

Ключевые слова: принцип максимума, краевая задача, априорная оценка, теорема Рисса, интеграл Стильтьеса
MSC (2000): 35J70, 35J25, 35J65

Постановка задачи и основной результат. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\dim\Omega \le n-1$, D – ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^n$ с границей ∂D, $\bar{\Omega} \subset \bar{D}$. Рассмотрим в области D задачу нахождения функции $u(x)$, удовлетворяющей при $x \in D$ эллиптическому уравнению

$$(Lu)(x) \equiv$$
$$\equiv \left[\sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(x)D_{x_i}D_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(x)D_{x_i} + A_0(x)\right]u(x) = f(x), \tag{1}$$

а на границе ∂D одному из граничных условий:

$$u|_{\partial D} = \varphi(x); \tag{2}$$

$$(\mathcal{B}u)(x)|_{\partial D} \equiv \left[\sum_{k=1}^{n} b_k(x)D_{x_k} + b_0(x)\right]u\Bigg|_{\partial D} = g(x); \tag{3}$$

$$u|_{\partial D} \ge 0, \quad (\mathcal{B}u-g)|_{\partial D} \ge 0, \quad u\,(\mathcal{B}u-g)|_{\partial D} = 0. \tag{4}$$

Порядок особенности коэффициентов операторов L и $\mathcal{B}$ будет характеризовать функция $a(k,x)$: $a(k,x) = \rho^k(x)$, если $\rho(x) \le 1$; $a(k,x) \equiv 1$, если $\rho(x) \ge 1$, $\rho(x)$ – расстояние от $x \in D\backslash\bar{\Omega}$ до $\partial\Omega$.

Пусть $P(x)$, $P_1(x^{(1)})$, $B_k(x^{(2)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_{k-1}^{(1)}, x_k^{(2)}, x_{k+1}^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ – любые точки из $\overline{D}$, $k = \overline{1,n}$. Определим функциональные пространства, в которых будут исследоваться краевые задачи:

$*)$ $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; q; D)$ – пространство функций $u(x)$, определенных в $\overline{D}$ и имеющих непрерывные частные производные до второго порядка в области $D \setminus \bar{\Omega}$ с конечной нормой

$$|u; \gamma, \beta; q; D|_{2+\alpha} = \sum_{j=0}^{2} |u; \gamma, \beta; q; D|_j + [u; \gamma, \beta; q; D]_{2+\alpha},$$

где

$$|u; \gamma, \beta; q; D|_0 = \sup_{P \in \overline{D}} a(q, x)|u(P)|,$$

$$|u; \gamma, \beta; q; D|_1 = |u; \gamma, \beta; q; D|_0 + \sum_{k=1}^{n} \sup_{P \in \overline{D}} a(q + \gamma - \beta_k, x)|D_{x_k} u(P)|,$$

$$|u; \gamma, \beta; q; D|_2 = \\ = \sum_{j=0}^{1} |u; \gamma, \beta; q; D|_j + \sum_{ij=1}^{n} \sup_{P \in \overline{D}} a(q + 2\gamma - \beta_i - \beta_j, x)|D_{x_i} D_{x_j} u(P)|,$$

$$|u; \gamma, \beta; q; D|_{2+\alpha} = \\ = \sum_{i,j,k=1}^{n} \sup_{P_1, B_k \in \overline{D}} \Big(a(q + 2\gamma - \beta_i - \beta_j + \alpha(\gamma - \beta_k); \tilde{P})|x_k^{(1)} - x_k^{(2)}|^{-\alpha} \times \\ \times |D_{x_i} D_{x_j} u(P_1) - D_{x_i} D_{x_j} u(B_k)| \Big),$$

$$|u; \gamma, \beta; 0; D|_0 = \sup_{P \in \overline{D}} |u(P)| \equiv |u|_D,$$

$$a(q, \tilde{P}) = \min\left(a(q; P_1), a(q; B_k)\right),$$

$$\gamma \geq 0, \beta_i \in (-\infty, \infty), \alpha \in (0, 1), q \geq 0;$$

$*)$ $C^m(r; D)$ – множество функций $u(x)$, определенных в $\overline{D}$, для которых конечна норма

$$\|u; r; D\|_m = \sum_{|j| \leq [m]} \sup_{P \in \overline{D}} a(r + |j|, x)|D_x^j u(P)| +$$

$$+ \sum_{|j|=[m]} \sum_{k=1}^{n} \sup_{P_1, B_k \in \overline{D}} a(r + m, \tilde{P})|x_k^{(1)} - x_k^{(2)}||D_x^j u(P_1) - D_x^j u(B_k)|,$$

$[m]$ – целая часть числа m, $\{m\} = m - [m]$.

Относительно задач (1) - (4) предполагаем выполнение условий:

а) коэффициенты $A_i(x) \in C^{\alpha}(r_i; D)$, $A_0(x) \in C^{\alpha}(\delta; D)$, $A_0(x) < 0$, $r_i \geq 0$, $\delta \geq 0$, $A_{ij}(x) \in C^{\alpha}(\beta_i + \beta_j; D)$ и выполняется условие равномерной эллиптичности ([7], стр. 36) для уравнения

$$\sum_{ij=1}^{n} a(\beta_i + \beta_j; x) A_{ij}(x) D_{x_i} D_{x_j} u = f_1(x);$$

б) векторы $\vec{b}^{(a)} \equiv \{b_1^{(a)}, \ldots, b_n^{(a)}\}$, $b_k^{(a)} \equiv a(\beta_k, x) b_k(x)$ и $\vec{e} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $e_k^{(a)} = b_k(x)|\vec{b}|^{-1}$, $|\vec{b}| = \left[\sum_{k=1}^{n} b_k^2(x)\right]^{1/2}$ образуют с направлением внешней нормали $\vec{n}$ к ∂D в той же точке $P \in \partial D$ угол, не превосходящий $\frac{\pi}{2}$, $b_k(x) \in C^{1+\alpha}(\beta_k; D)$, $b_0(x) \in C^{1+\alpha}(\nu; D)$, $b_0(x) > 0$, $\nu \geq 0$;
в) поверхность ∂D принадлежит $C^{2+\alpha}$.

Сформулируем основные результаты о разрешимости соответствующих задач.

Теорема 1. *Пусть для задачи (1), (2) выполнены условия а), в), $f(x) \in C^{\alpha}(\gamma, \beta; \delta; D)$, $\varphi(x) \in C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; D)$. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) в классе $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; D)$, $\gamma = \max\left(\max_i(1+\beta_i), \max_i(r_i - \beta_i), \frac{\delta}{2}\right)$ и для него справедлива оценка*

$$|u; \gamma, \beta; 0; D|_{2+\alpha} \leq c\left(|f; \gamma, \beta; \delta; D|_{\alpha} + |\varphi; \gamma, \beta; 0; D|_{2+\alpha}\right), \qquad (5)$$

c – зависит от n, α и нормы коэффициентов оператора L.

Теорема 2. *Предположим, что для задачи (1), (3) выполнены условия а) - в), функция $g(x) \in C^{1+\alpha}(\gamma, \beta; \nu; D)$, $f(x) \in C^{\alpha}(\gamma, \beta; \delta; D)$, $\gamma = \max\left(\max_i(1+\beta_i), \max_i(r_i - \beta_i), \frac{\delta}{2}, \nu\right)$. Тогда существует единственное решение задачи (1), (3) в классе $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; D)$ и для него справедлива оценка*

$$|u; \gamma, \beta; 0; D|_{2+\alpha} \leq c\left(|f; \gamma, \beta; \delta; D|_{\alpha} + |g; \gamma, \beta; \nu; D|_{1+\alpha}\right), \qquad (6)$$

c – зависит от n, α и нормы коэффициентов операторов L и $\mathcal{B}$.

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы 2, то единственное решение задачи (1), (4) из класса $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; D)$,*

$\gamma = \max\left(\max_i(1+\beta_i), \max_i(r_i-\beta_i), \dfrac{\delta}{2}, \nu\right)$ *удовлетворяет оценке (6).*

Оценка решений краевых задач с гладкими коэффициентами. Пусть $D_m = \{x, x \in D, a(1,x) \geq m^{-1}, m > 1\}$ последовательность областей с гладкой границей ∂D_m, которая при $m \to \infty$ сходится к D.

Рассмотрим в области D задачу нахождения решения уравнения

$$(Lu_m(x)) = \left[\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x) D_{x_i} D_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) D_{x_i} + a_0(x)\right] u_m(x) = f_m(x), \tag{7}$$

удовлетворяющего на границе области одному из условий:

$$u_m|_{\partial D} = \varphi_m|_{\partial D}\,; \tag{8}$$

$$(\mathcal{B}u_m)(x)|_{\partial D} \equiv \left[\sum_{k=1}^{n} l_k(x) D_{x_k} + l_0(x)\right] u_m \bigg|_{\partial D} = g_m(x)|_{\partial D}\,; \tag{9}$$

$$u_m|_{\partial D} \geq 0, \quad (\mathcal{B}u_m - g_m)u_m|_{\partial D} \geq 0, \quad u_m(\mathcal{B}u_m - g_m)u_m|_{\partial D} = 0. \tag{10}$$

Здесь $a_{ij}(x) = A_{ij}(x)$, $a_i(x) = A_i(x)$, $a_0(x) = A_0(x)$, $l_k(x) = b_k(x)$, $l_0(x) = b_0(x)$, $\varphi_m(x) = \varphi(x)$, $f_m(x) = f(x)$, $g_m(x) = g(x)$, если $x \in D_m$. Для $x \notin D_m$ коэффициенты $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$, $a_0(x)$, $l_k(x)$, $l_0(x)$, функции $f_m(x)$, $\varphi_m(x)$, $g_m(x)$ есть решения краевых задач вида

$$\Delta v = 0, v|_{\partial D_m} = \psi(\xi).$$

в области $x \in (\mathbb{R}^n \setminus D_m)$, ([9]). Где, например, для $a_{ij}(x)$, $\psi(\xi) \equiv A_{ij}(x)\mid_{\partial D_m}$.

Изложим принцип максимума для задач (7) - (10) в том виде, который понадобится в дальнейшем.

Теорема 4. *Пусть $u_m(x)$ – классическое решение задачи (7), (8) в области $\overline{D}$, $f(x) \in C^0(\gamma, \beta; \delta; D)$, $\varphi(x) \in C(D)$ и выполнены условия а), в). Тогда для $u_m(x)$ справедливо неравенство*

$$|u_m| \leq \max\left(|f_m a_0^{-1}|_D, |\varphi_m|_D\right). \tag{11}$$

Доказательство. Возможны три случая: или $u_m(x)$ неположительно в $\overline{D}$, или свое наибольшее в $\overline{D}$ положительное значение $u_m(x)$ принимает на границе ∂D, или наибольшее в $\overline{D}$ значение принимается в точке $P_1 \in D$. В первом случае $\max_{\overline{D}} u_m(x) \le 0$, во втором – $0 < \max_{\overline{D}} u_m(x) = \max_{\partial D} \varphi_m(x)$. В третьем случае – $0 < \max_{\overline{D}} u_m(x) = u_m(P_1)$, причем в точке P_1 выполнены соотношения

$$D_{x_i} u_m = 0, \quad \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1) D_{x_i} D_{x_j} u_m \le 0 \tag{12}$$

и равенство (7).

Последнее из соотношений имеет место благодаря тому, что в точке максимума вторые производные $D_{x_k} D_{x_k} u_m$ по любому направлению

$$z_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} a(\beta_i, x^{(1)})(x_i - x_i^{(1)}), \quad (\det \|\alpha_{ki}\| \ne 0)$$

неположительны,

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1) D_{x_i} D_{x_j} u_m =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} \left(\sum_{ij=1}^{n} a(\beta_i + \beta_j, x^{(1)}) a_{ij}(P_1) \alpha_{ki} \alpha_{lj} \right) D_{y_k} D_{y_l} u_m =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mu_k D_{z_k} D_{z_k} u_m,$$

причем, по условию а), характеристические числа $\mu_1, \dots, \mu_n$ квадратичной формы $\sum_{ij=1}^{n} a(\beta_i + \beta_j, x^{(1)}) a_{ij}(P_1) \alpha_{ki} \alpha_{lj}$ положительны. Учитывая (12) и уравнение (7), в точке P_1 имеет место неравенство

$$u_m(P_1) \le f_m(P_1) a_0^{-1}(P_1).$$

Аналогично, рассматривая точку наименьшего неположительного значения функции $u_m(x)$, находим

$$u_m(x) \ge \min\{0, \min_{\overline{D}} f_m(x) a_0^{-1}(x), \min_{\overline{D}} \varphi_m(x)\}.$$

Таким образом, для решения задачи (7), (8) справедлива оценка (11).

Теорема 5. *Если $u_m(x)$– классическое решение задачи (7), (9), $f(x) \in C^0(\gamma, \beta; \delta; D)$, $g(x) \in C^0(\gamma, \beta; \nu; D)$ и выполнены условия а) - в), то для $u_m(x)$ справедлива оценка*

$$|u_m| \leq \max\left(|f_m a_0^{-1}|_D, |l_0^{-1} g_m|_D\right). \tag{13}$$

Доказательство. Неравенство (13) устанавливается так же, как и (11). Отличие в получающейся оценке имеется только для случая, когда

$$0 < \max_{\overline{D}} u_m(x) = \max_{\partial D} u_m(x) = u_m(P_3).$$

В точке P_3 имеем $\dfrac{du_m}{d\vec{e}} \geq 0$ (вектор $\vec{e}$ удовлетворяет условию б)), и поэтому, ввиду граничного условия (9),

$$u_m(P_3) \leq l_0^{-1}(P_3) g_m(P_3).$$

Аналогично, если P_4 точка минимума для $u_m(x)$ попадает на ∂D, то в ней $\dfrac{du_m}{d\vec{e}} \leq 0$, и потому, в силу (9)

$$u_m(P_4) \geq l_0^{-1}(P_4) g_m(P_4).$$

Теорема 6. *Предположим, что $u_m(x)$– классическое решение задачи (7), (10), $f(x) \in C^0(\gamma, \beta; \delta; D)$, $g(x) \in C^0(\gamma, \beta; \nu; D)$ и выполнены условия а) - в). Тогда для $u_m(x)$ справедлива оценка (13).*

Доказательство. Оценка для решения задачи (7), (10) устанавливается так же, как и (11). Отличие в получающейся оценке имеется только для случая, когда

$$0 < \max_{D} u_m(x) = \max_{\partial D} u_m(x) = u_m(P_5).$$

Учитывая условие (10), имеем

$$u_m(\mathcal{B} u_m - g_m)|_{P_5} = 0.$$

Поскольку $u_m(P_5) > 0$, то $(\mathcal{B} u_m - g_m)|_{P_5} = 0$. Повторяя рассуждения доказательства теоремы 5, находим

$$u_m \leq l_0^{-1}(P_5) g_m(P_5).$$

Аналогично, рассматривая точку наименьшего неположительного значения функции $u_m(x)$, получим

$$u_m \geq \min_{\partial D} \left(l_0^{-1}(x) g_m(x) \right).$$

Введем в пространстве $C^{2+\alpha}(D)$ норму $|u_m;\gamma,\beta;q;D|_{2+\alpha}$, эквивалентную при каждом фиксированном m гельдеровой норме, которая определяется так же, как $|u;\gamma,\beta;q;D|_{2+\alpha}$, только вместо функции $a(k,x)$ берем $d(k,x)$ такую, что $d(k,x) = a(k,x)$, если $\rho(x) \geq m^{-1}$; $d(k,x) = m^{-k}$, если $\rho(x) \leq m^{-1}$.

При налагаемых условиях на гладкость коэффициентов операторов L, $\mathcal{B}$ существует единственное решение задач (7) - (10), которое принадлежит пространству $C^{2+\alpha}(D)$ и имеет при каждом m конечную норму $|u_m;\gamma,\beta;0;D|_{2+\alpha}$.

Установим оценку нормы $|u_m;\gamma,\beta;0;D|_{2+\alpha}$.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для решения задачи (7), (8) справедлива оценка*

$$|u_m;\gamma,\beta;0;D|_{2+\alpha} \leq c\left(|f;\gamma,\beta;\delta;D|_\alpha + |\varphi;\gamma,\beta;0;D|_{2+\alpha}\right). \tag{14}$$

Постоянная c не зависит от m.

Доказательство. В задаче (7), (8) сделаем замену $u_m(x) = v_m(x) + \varphi_m(x)$, тогда $v_m(x)$ будет решением однородной задачи

$$(Lv_m)(x) = f_m(x) - (L\varphi_m)(x) \equiv F(x), \tag{15}$$

$$v_m|_{\partial D} = 0. \tag{16}$$

Используя определение нормы $|v_m;\gamma,\beta;0;D|_{2+\alpha}$ и интерполяционные неравенства ([9, стр. 104]), имеем

$$|v_m;\gamma,\beta;0;D|_{2+\alpha} \leq (1+\varepsilon^\alpha)[v_m;\gamma,\beta;0;D|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)|v_m|_D.$$

Поэтому достаточно оценить $[v_m;\gamma,\beta;\delta;D|_{2+\alpha}$. Из определения полунормы следует существование в $\overline{D}$ точек P_1 и B_k, для которых выполнено неравенство:

$$\frac{1}{2}[v_m;\gamma,\beta;0;D|_{2+\alpha} \leq E(v_m) \equiv$$

$$\equiv \sum_{i,j,k=1}^{n} d(2\gamma - \beta_i - \beta_j + \alpha(\gamma-\beta_k);\tilde{P})|x_k^{(1)} - x_k^{(2)}|\times$$

$$\times|D_{x_i}D_{x_j}v_m(P_1)-D_{x_i}D_{x_j}v_m(B_k)|. \tag{17}$$

Если $|x_k^{(1)}-x_k^{(2)}|\geq 4^{-1}\eta d(\gamma-\beta_k,\tilde{P})n^{-1}\equiv T$, $\eta\in(0,1)$, то используя интерполяционные неравенства, находим

$$E(v_m)\leq 2\varepsilon^{\alpha}[v_m;\gamma,\beta;0;D]_{2+\alpha}+c(\varepsilon)|v_m|_D. \tag{18}$$

Пусть $|x_k^{(1)}-x_k^{(2)}|\leq T$. Будем считать, что $d(\gamma,\tilde{P})\equiv d(\gamma,x^{(1)})$, $|x^{(1)}-y|\geq 2Tn$ или $|x_n^{(1)}-y_n|\geq 2T$, $y\in\partial D$. Запишем задачу (15), (16) в виде

$$\begin{aligned}
&(L_0v_m)(x)\equiv\\
&\equiv\left(\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(P_1)D_{x_i}D_{x_j}+\lambda\right)v_m=\\
&=F(x)++\left[\sum_{ij=1}^{n}(a_{ij}(P_1)-a_{ij}(x))D_{x_i}D_{x_j}-\right.\\
&\left.-\sum_{i=1}^{n}a_i(x)D_{x_i}-a_0(x)+\lambda\right]v_m\equiv F_1(x),\ v_m|_{\partial D}=0,
\end{aligned} \tag{19}$$

где λ – произвольное число, $\lambda\leq\sup\limits_{\overline{D}}a_0(x)$.

В задаче (19) сделаем замену $v_m=\omega_m(z)$, $z_i=d(\beta_i,x^{(1)})x_i$, $i=\overline{1,n}$. Получим

$$(L_1\omega_m)(z)\equiv\left[\sum_{ij=1}^{n}d(\beta_i+\beta_j,x^{(1)})D_{z_i}D_{z_j}+\lambda\right]\omega_m=F_1(Z),$$

$$\omega_m|_{\partial D}=0,$$

где $Z=(d^{-1}(\beta_1,x^{(1)})z_1,\ldots,d^{-1}(\beta_n,x^{(1)})z_n)$.

Обозначим через $H_\rho=\{z:|z_i-z_i^{(1)}|\leq 4^{-1}\rho\eta d(\gamma,z^{(1)})n^{-1},\ i=\overline{1,n},\ z_i^{(1)}=d(\beta_i,x^{(1)})x_i^{(1)}\}$ и возьмем трижды дифференцируемую функцию $\mu(z)$:

$$\mu(z)=\begin{cases}1, & z\in H_{1/4},\quad 0\leq\mu(z)\leq 1;\\ 0, & z\notin H_{3/4},\quad |D_z^k\mu(z)|\leq c_kd^{-1}(k\gamma,x^{(1)}).\end{cases}$$

Тогда функция $V_m(z)\equiv\omega_m(z)\mu(z)$ удовлетворяет задаче Дирихле

$$(L_1V_m)(z)=\sum_{ij=1}^{n}d(\beta_i+\beta_j,x^{(1)})a_{ij}(x^{(1)})[D_{z_i}\omega_mD_{z_j}\mu+D_{z_i}\mu D_{z_j}\omega_m]+$$

$$+\omega_m(z)\left[\sum_{ij=1}^{n} d(\beta_i+\beta_j, x^{(1)})D_{z_i}D_{z_j}\mu(z)\right]+\mu F_1 \equiv F_2(z).$$

$$V_m|_{\partial D}=0.$$

Используя теорему 1.1 ([7, стр. 145]) и оценки 1.11 ([7, стр. 148]), для произвольных точек $M_1(\xi^{(1)})$ и $M_2(\xi^{(2)}) \in H_{1/4}$ убедимся в справедливости неравенства

$$|\xi^{(1)}-\xi^{(2)}|^{-\alpha}|D^2_\xi\omega_m(M_1)-D^2_\xi\omega_m(M_2)| \le$$
$$\le c\left(|F_2|_{C^\alpha(H_{3/4})}+|\omega_m|_{H_{3/4}}\right). \tag{20}$$

Учитывая свойства функции $\mu(z)$ и неравенство

$$d(\gamma,\xi) \ge \frac{1}{4} d(\gamma, x^{(1)})$$

для $\xi \in H_{3/4}$, имеем

$$|F_2|_{C^\alpha(H_{3/4})} \le c d^{-1}((2+\alpha)\gamma, x^{(1)})\times$$
$$\times\left(|F_1;\gamma,0;2\gamma,H_{3/4}|_\alpha+|\omega_m;\gamma,0;0;H_{3/4}|_2+|\omega_m|_{H_{3/4}}\right). \tag{21}$$

Из определения пространства $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;D)$ следует справедливость неравенств

$$c_1|\omega_m;\gamma,0;0;H_{3/4}|_r \le |v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}|_r \le c_2|\omega_m;\gamma,0;0;H_{3/4}|_r,$$

$$V_\rho=\{x, x\in D, |x_i-x_i^{(1)}| \le 4\rho T\}.$$

Подставляя (21) в (20) и возвращаясь к переменным x, находим

$$E(v_m) \le$$
$$\le c_3\left(|F_1;\gamma,\beta;2\gamma,V_{3/4}|_\alpha+|v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}|_2+|v_m|_{V_{3/4}}\right). \tag{22}$$

Установим оценку нормы $|F_1;\gamma,\beta;2\gamma,V_{3/4}|_\alpha$. Пусть $M(\tau^{(1)})$, $N_k(\tau^{(2)})$ – любые две точки из $V_{3/4}$. Учитывая интерполяционные неравенства, достаточно оценить полунорму каждого слагаемого функции $F_1(x)$. Например,

$$[a_i(B)D_{x_i}v_m(B);\gamma,\beta;2\gamma;V_{3/4}]_\alpha \le \sum_{i,k=1}^{n}\sup_{M,N_k}[d(\gamma-\beta_i;\tilde{M})|D_{\tau_i}v_m(M)|\times$$

$$\times d(\gamma+\beta_i+\alpha(\gamma-\beta_k);\tilde{M})|\tau_k^{(1)}-\tau_k^{(2)}|^{-\alpha}|a_i(M)-a_i(N_k)|+d(\gamma+\beta_i;\tilde{M})\times$$
$$\times|a_i(N_k)|d(\gamma-\beta_i+\alpha(\gamma-\beta_k),\tilde{M})|D_{\tau_i}v_m(M)-D_{\tau_i}v_m(N_k)|]\leq$$
$$\leq c\left(|v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}|_2+|v_m|_{V_{3/4}}\right).$$

Аналогично получаем оценки остальных слагаемых функции $F_1(x)$:

$$|F_1;\gamma,\beta;2\gamma;V_{3/4}|_\alpha\leq\varepsilon_1[v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}]_{2+\alpha}+$$
$$+c_4\left(|v_m|_{V_{3/4}}+|F;\gamma,\beta;2\gamma;V_{3/4}|_\alpha\right), \tag{23}$$

где $\varepsilon_1=n^2\nu^2c_1+(n+2)\varepsilon^\alpha$, ν, ε – произвольные числа $\nu\in(0,1)$, $\varepsilon\in(0,1)$.

Подставляя (23) в (22), находим

$$E(v_m)\leq(\varepsilon_1+\varepsilon^\alpha)[v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}]_{2+\alpha}+$$
$$+c_5\left(|v_m|_{V_{3/4}}+|F;\gamma,\beta;2\gamma;V_{3/4}|_\alpha\right). \tag{24}$$

Пусть $|x^{(1)}-y|<2Tn$ и $|x_n^{(1)}-y_n|<2T$, $y\in\partial D$. Рассмотрим шар $K(R,P)$ радиуса $R\geq 4Tn$, содержащий точки P_1 и B_k с центром в некоторой точке $P\in\partial D$. Используя ограничение на гладкость поверхности ∂D, можно распрямить $\partial D\cap K(R,P)$ с помощью взаимно однозначного преобразования $x=\psi(z)$ ([9], стр. 126), в результате чего область $\Pi\equiv D\cap K(R,P)$ переходит в Π_1, для точек которой $z_n\geq 0$. Если положить $v_m(x)\equiv\omega_m(z)$, $P_1=M_1$, $B_k=N_k$ и коэффициенты оператора L при этом преобразовании обозначить через $k_{ij}(z)$, $k_i(z)$, $k_0(z)$, то $\omega_m(z)$ в Π_1 будет решением задачи

$$\left(\sum_{ij=1}^n k_{ij}(M_1)D_{z_i}D_{z_j}+\lambda\right)\omega_m(z)=\sum_{ij=1}^n[k_{ij}(M_1)-k_{ij}(z)]D_{z_i}D_{z_j}\omega_m-$$
$$-\sum_{i=1}^n k_i(z)D_{z_i}\omega_m-(k_0(z)-\lambda)\omega_m+F(\psi(z))\equiv F_3(z),$$
$$\omega_m|_{z_n=0}=0.$$

Повторяя рассуждения, приведенные при оценке решения задачи (19), используя при этом теорему 7.1 ([10], стр. 71) и в этом случае получаем оценку (24).

Учитывая неравенства (24), (18) и выбирая ε, η достаточно малыми, из неравенства (17), находим

$$|v_m;\gamma,\beta;0;D|_{2+\alpha}\le c\left(|F;\gamma,\beta;2\gamma;D|_\alpha+|v_m|_D\right). \qquad (25)$$

Применяя теорему 4 к решениям задачи (15), (16), имеем

$$|v_m|_D\le c|Fa_0^{-1}|_D.$$

Поскольку

$$|F;\gamma,\beta;2\gamma;D|_\alpha\le c_6\left(|f;\gamma,\beta;\delta;D|_\alpha+|\varphi;\gamma,\beta;0;D|_{2+\alpha}\right),$$

то из неравенства (25), учитывая замену $u_m=v_m+\varphi_m$, получаем оценку (14).

Теорема 8. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения задачи (7), (9) справедлива оценка*

$$|u_m;\gamma,\beta;0;D|_{2+\alpha}\le c\left(|f;\gamma,\beta;\delta;D|_\alpha+|g;\gamma,\beta;\nu;D|_{1+\alpha}\right). \qquad (26)$$

Постоянная c не зависит от m.

Доказательство. Оценка (26) устанавливается так же, как и неравенство (14). Приведем наиболее существенные детали доказательства. Пусть $|x_k^{(1)}-x_k^{(2)}|\le T$. Рассмотрим случай $|x^{(1)}-y|\le 2Tn$ и $|x_n^{(1)}-y_n|\le 2T$, $y\in\partial D$. Сделаем преобразование $x=\psi(z)$ области $\Pi\equiv K(R,P)\cap D$ и обозначим коэффициенты операторов L и $\mathcal{B}$ в области Π_1 через $k_{ij}(z)$, $k_0(z)$, $h_k(z)$, $h_0(z)$. При этом преобразовании величины $E(u_m)$, $d(\gamma,x^{(1)})$, точки P_1 и B_k перейдут соответственно в E_1, $d_1(\gamma,z^{(1)})$, точки M_1 и N_k. Тогда $u_m(x)=\omega_m(z)$ будет решением задачи

$$\left(\sum_{ij=1}^n k_{ij}(M_1)D_{z_i}D_{z_j}+\lambda\right)\omega_m(z)=\sum_{ij=1}^n\left(k_{ij}(M_1)-k_{ij}(z)\right)D_{z_i}D_{z_j}\omega_m-$$

$$\sum_{i=1}^n k_i(z)D_{z_i}\omega_m-(k_0(z)-\lambda)\omega_m+f_m(\psi(z))\equiv F_3(z), \qquad (27)$$

$$\sum_{i=1}^n h_i(M_1)D_{z_i}\omega_m(z)\Big|_{z_n=0}=\Big[\sum_{i=1}^n(h_i(M_1)-h_i(z))D_{z_i}\omega_m-$$

$$-h_0(z)\omega_m+g_m(\psi(z))\Big]\Big|_{z_n=0}\equiv G_1(z)\big|_{z_n=0}.$$

В задаче (27) сделаем замену $\omega_m(z) = W_m(\tau)$, $\tau_i = d_i(\beta_i, z^{(1)})z_i$, $i = \overline{1, n}$. Тогда $W_m(\tau)$ будет решением задачи

$$(L_2 W_m)(\tau) =$$

$$= \left(\sum_{ij=1}^{n} d_1(\beta_i + \beta_j, z^{(1)}) k_{ij}(M_1) D_{\tau_i} D_{\tau_j} + \lambda \right) W_m(\tau) = F_3(\tilde{\tau}),$$

$$(B_0 W_m)(\tau) = \sum_{i=1}^{n} d_1(\beta_i, z^{(1)}) h_i(M_1) D_{\tau_i} W_m \Big|_{\tau_n=0} = G_1(\tilde{\tau})|_{\tau_n=0},$$

где $\tilde{\tau} = \left(d_1^{-1}(\beta_1, z^{(1)})z_1, \ldots, d_1^{-1}(\beta_n, z^{(1)})z_n\right)$.

Обозначим через $\tau_i^{(1)} = d_1(\beta_i, z^{(1)})z_i^{(1)}$, $H_\rho^{(1)} = \{\tau, |\tau_i - \tau_i^{(1)}| \leq 4^{-1}\eta\rho d_1(\beta_i, z^{(1)})n^{-1}, i = \overline{1, n}, \tau_n \geq 0, \rho \in (0, 1)\}$ и возьмем трижды дифференцируемую функцию $\mu_1(\tau)$:

$$\mu_1(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in H_{1/4}^{(1)}, \quad 0 \leq \mu_1(\tau) \leq 1; \\ 0, & \tau \notin H_{3/4}^{(1)}, \quad |D_\tau^k \mu_1(\tau)| \leq c_k d_1^{-k}(\gamma, z^{(1)}). \end{cases}$$

Тогда произведение $W_m(\tau)\mu_1(\tau)$ удовлетворяет следующей краевой задаче

$$(L_2(W_m \mu_1))(\tau) =$$

$$= \sum_{ij=1}^{n} d_1(\beta_i + \beta_j, z^{(1)}) k_{ij}(M_1) [D_{\tau_i} W_m D_{\tau_j} \mu_1 + D_{\tau_j} W_m D_{\tau_i} \mu_1] +$$

$$+ W_m \left[\sum_{ij=1}^{n} d(\beta_i + \beta_j, z^{(1)}) k_{ij}(M_1) D_{\tau_i} D_{\tau_j} \mu_1 \right] + \mu_1(\tau) F_3(\tilde{\tau}) \equiv F_4(\tau),$$

$$(B_0(W_m \mu_1))(\tau) =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} d_1(\beta_i, z^{(1)}) h_i(M_1) W_m D_{\tau_i} \mu_1 + \mu_1(\tau) G_1(\tilde{\tau}) \right] \Bigg|_{\tau_n=0} \equiv$$

$$\equiv G_2(\tau)|_{\tau_n=0}. \tag{28}$$

Коэффициенты уравнения и краевого условия задачи (28), в силу сделанных ранее предположений, ограничены постоянными, не зависящими от $M_1(z^{(1)})$. Поэтому, используя теорему 3.2

([7, стр. 179]), для произвольных точек $S_1(s^{(1)})$ и $S_2(s^{(2)}) \in H^{(1)}_{1/4}$, имеем

$$|s^{(1)} - s^{(2)}|^{-\alpha} |D_{s_i} D_{s_j} W_m(S_1) - D_{s_i} D_{s_j} W_m(S_2)| \leq c \left(|F_4|_{C^\alpha(H^{(1)}_{3/4})} + \right.$$

$$\left. + |G_2|_{C^{1+\alpha}(H^{(1)}_{3/4} \cap \tau_n = 0)} + |W_m|_{H^{(1)}_{3/4}} \right). \qquad (29)$$

Учитывая свойства функции $\mu_1(\tau)$, неравенство $d_1(\gamma, s) \geq \frac{1}{4} d_1(\gamma, z^{(1)})$ для $S(s) \in H^{(1)}_{3/4}$, находим

$$|F_4|_{C^\alpha(H^{(1)}_{3/4})} \leq c d_1^{-1}((2+\alpha)\gamma, z^{(1)}) \times$$

$$\times \left(|F_3; \gamma, 0; 2\gamma, H^{(1)}_{3/4}|_\alpha + |W_m; \gamma, 0; 0; H^{(1)}_{3/4}|_2 + |W_m|_{H^{(1)}_{3/4}} \right), \qquad (30)$$

$$|G_2|_{C^{1+\alpha}(H^{(1)}_{3/4} \cap (\tau_n = 0))} \leq c d_1^{-1}((2+\alpha)\gamma, z^{(1)}) \times$$

$$\times \left(|G_1; \gamma, 0; \gamma, H^{(1)}_{3/4}|_{1+\alpha} + |W_m; \gamma, 0; 0; H^{(1)}_{3/4}|_2 + |W_m|_{H^{(1)}_{3/4}} \right).$$

Повторяя рассуждения доказательства теоремы 7 и возвращаясь к переменным z, получим

$$E_1 \leq c \left(|F_3; \gamma, \beta; 2\gamma, \Pi_1|_\alpha + \right.$$

$$\left. + |\omega_m; \gamma, \beta; 0; \Pi_1|_2 + |G_1; \gamma, \beta; \gamma, \Pi_1|_{1+\alpha} + |\omega_m|_{\Pi_1} \right).$$

Далее установим оценку нормы $|G_1; \gamma, \beta; \gamma; \Pi_1|_{1+\alpha}$. Для этого, в силу интерполяционных неравенств, достаточно оценить полунорму каждого слагаемого функции $G_1(z)$. Например,

$$[h_0 \omega_m; \gamma, \beta; \gamma; \Pi_1]_{1+\alpha} \leq$$

$$\leq \sum_{i,k=1}^{n} \sup_{Q_1, S_k \in \Pi_1} (d_1(\gamma; \tilde{Q}))(|h_0(Q_1)| + |h_0(S_k)|) \times$$

$$\times |t_k^{(1)} - t_k^{(2)}|^{-\alpha} |D_{t_i} \omega_m(Q_1) - D_{t_i} \omega_m(S_k)| d_1((1+\alpha)(\gamma - \beta_k); \tilde{Q}) +$$

$$+ (|\omega_m(Q_1)| + |\omega_m(S_k)|) \times$$

$$\times |t_k^{(1)} - t_k^{(2)}|^{-\alpha} |D_{t_i} h_0(Q_1) - D_{t_i} h_0(S_k)| d_1(2\gamma - \beta_i + \alpha(\gamma - \beta_k); \tilde{Q}) \leq$$

$$\leq c \left(|\omega_m; \gamma, \beta; 0; \Pi_1|_2 + |\omega_m|_{\Pi_1} \right).$$

Аналогично получаются оценки других слагаемых функции $G_1(z)$. Оценка функции $F_3(z)$ получается так же, как и оценка (23). Следовательно, для $E(u_m)$ справедливо неравенство

$$E(u_m) \le (c_7\varepsilon_1 + c_8\varepsilon_2)\,[u_m;\gamma,\beta;0;\Pi]_{2+\alpha} +$$

$$+c\left(|\omega_m|_\Pi + |f_m;\gamma,\beta;2\gamma,\Pi|_\alpha + |g_m;\gamma,\beta;\gamma;\Pi|_{1+\alpha}\right), \tag{31}$$

где $\varepsilon_1 = n^2\eta^\alpha + n\varepsilon^\alpha$, $\varepsilon_2 = n^3\eta^\alpha + \varepsilon^\alpha (n=2)$.

Рассмотрим случай $|x^{(1)} - y| \ge 2Tn$ или $|x_n^{(1)} - y_n| \ge 2T$, $y \in \partial D$. Пусть $d(\gamma,\tilde{P}) = d(\gamma, x^{(1)})$. Запишем задачу (7), (9) в виде

$$\begin{gathered}
(L_0 u_m)(x) \equiv \left[\sum_{ij=1}^n a_{ij}(P_1) D_{x_i} D_{x_j} + \lambda\right] u_m = \\
= f_m(x) + \sum_{ij=1}^n (a_{ij}(P_1) - a_{ij}(x)) D_{x_i} D_{x_j} u_m - \\
- \sum_{i=1}^n a_i(x) D_{x_i} u_m - (a(x)+\lambda) u_m \equiv F_5(x),
\end{gathered} \tag{32}$$

$$(\mathcal{B}_1 u_m)(x) \equiv \left.\sum_{i=1}^n l_i(P_1) D_{x_i} u_m\right|_{\partial D} =$$

$$= \left.\left[\sum_{i=1}^n (l_i(P_1) - l_i(x)) D_{x_i} u_m - l_0(x) u_m + g_m(x)\right]\right|_{\partial D} = G_3(x)|_{\partial D}\,.$$

В задаче (32) сделаем замену $u_m(x) = \omega_m(z)$, $z_i = d(\beta_i, x^{(1)}) x_i$, $i = \overline{1,n}$. Получим

$$(L_1\omega_m)(z) \equiv \left(\sum_{ij=1}^n d(\beta_i+\beta_j, x^{(1)}) a_{ij}(P_1) D_{z_i} D_{z_j} + \lambda\right)\omega_m(z) = F_5(Z),$$

$$(\mathcal{B}_1\omega_m)(z) \equiv \left.\left(\sum_{i=1}^n d(\beta_i, x^{(1)}) l_i(P_1) D_{x_i}\omega_m\right)\right|_{\partial D} \equiv G_3(Z)|_{\partial D}\,. \tag{33}$$

Коэффициенты уравнения и краевого условия задачи (33), в силу сделанных ранее предположений, ограничены постоянными, не зависящими от P_1. Обозначим через

$$\begin{gathered}
H_\rho = \{z, |z_i - z_i^{(1)}| \le \rho\eta d(\gamma, z^{(1)}) 4^{-1} n^{-1}, i = \overline{1,n}, \\
z_i^{(1)} = d(\beta_i, x^{(1)}) x_i^{(1)}\}.
\end{gathered}$$

Тогда функция $V_m(z) = \omega_m(z)\mu(z)$ удовлетворяет задаче

$$(L_1 V_m)(z) = \sum_{ij=1}^{n} d(\beta_i + \beta_j, x^{(1)}) a_{ij}(P_1)[D_{z_i}\mu D_{z_j}\omega_m + D_{z_i}\omega_m D_{z_j}\mu] +$$

$$+\omega_m(z)\left[\sum_{ij=1}^{n} d(\beta_i + \beta_j, x^{(1)}) a_{ij}(P_1) D_{z_i} D_{z_j}\mu(z)\right] + \mu F_5 \equiv F_6(z),$$

$$(\mathcal{B}_1 V_m)(z) \equiv \left.\left(\sum_{i=1}^{n} d(\beta_i, x^{(1)}) l_i(P_1)\omega_m D_{z_i}\mu - \mu G_3(Z)\right)\right|_{\partial D} = 0,$$

поскольку $D^k_{z_i}\mu(z)\big|_{\partial D} \equiv 0$, $k = \overline{0,3}$.

Поэтому используя теорему 7.1 ([10, стр. 71]) и повторяя рассуждения доказательства оценки (24), получим

$$E(u_m) \leq c_8\varepsilon_2[u_m; \gamma, \beta; 0; D]_{2+\alpha} + c\left(|u_m|_D + |f_m; \gamma, \beta; 2\gamma; D|_\alpha\right). \quad (34)$$

В случае $|x^{(1)}_k - x^{(2)}_k| \geq T$ для $E(u_m)$ справедлива оценка (18), то есть

$$E(u_m) \leq 2\varepsilon^\alpha[u_m; \gamma, \beta; 0; D]_{2+\alpha} + c(\varepsilon)|u_m|_D. \quad (35)$$

Учитывая неравенства (35), (34), (31) и выбирая ε и η достаточно малыми, из неравенства

$$\frac{1}{2}[u_m; \gamma, \beta; 0; D]_{2+\alpha} \leq E(u_m),$$

находим

$$\begin{aligned} &|u_m; \gamma, \beta; 0; D|_{2+\alpha} \leq \\ &\leq c\left(|f_m; \gamma, \beta; 2\gamma; D|_\alpha + |g_m; \gamma, \beta; \gamma; D|_{1+\alpha} + |u_m|_D\right). \end{aligned} \quad (36)$$

Применяя теорему 5 к решениям задачи (7), (9), имеем

$$|u_m|_D \leq c\left(|f_m; \gamma, \beta; \delta; D|_0 + |g_m; \gamma, \beta; \nu; D|_0\right).$$

Поскольку

$$|f_m; \gamma, \beta; 2\gamma; D|_\alpha \leq c|f; \gamma, \beta; \delta; D|_\alpha,$$
$$|g_m; \gamma, \beta; \gamma; D|_{1+\alpha} \leq c|g; \gamma, \beta; \nu; D|_{1+\alpha},$$

из неравенства (36) получаем оценку (26).

Теорема 9. *Если выполнены условия теоремы 3, то для решения задачи (7), (10) справедлива оценка (26).*

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теорем 7, 8. Пусть $|x_k^{(1)} - x_k^{(2)}| \leq 2T$, $y \in \partial D$ в области Π_1 функция $\omega_m(z)$ будет решением уравнения

$$(L_1\omega_m)(z) = \left(\sum_{ij=1}^{n} k_{ij}(M_1)D_{z_i}D_{z_j} + \lambda\right)\omega_m(z) = F_3(z) \tag{37}$$

и удовлетворяет краевому условию

$$(\mathcal{B}_2\omega_m)(z) \equiv \sum_{i=1}^{n} h_i(M_1)D_{z_i}\omega_m\Bigg|_{z_n=0} \geq G_1(z)|_{z_n=0}\,,$$

$$\omega_m(z)|_{z_n=0} \geq 0, \omega_m\left(\mathcal{B}_2\omega_m - G_1\right)|_{z_n=0} = 0. \tag{38}$$

Возможны два случая: либо существуют точки границы $(\Pi_1 \cap z_n = 0)$, в которых выполняется условие

$$(\mathcal{B}_2\omega_m - G_1))|_{z_n=0} = 0; \tag{39}$$

либо таких точек не существует, то есть $\mathcal{B}_2\omega_m > G_1$, тогда из краевого условия (38), имеем

$$\omega_m|_{z_n=0} = 0 \tag{40}$$

для точек границы области $(\Pi_1 \cap z_n = 0)$

Если имеет место первый случай, то исследуем задачу (37), (39), повторяя рассуждения доказательства оценки (31).

Если имеет место второй случай, то исследуем задачу (37), (40), повторяя рассуждения доказательства теоремы 7.

Рассмотрим случай $|x_n^{(1)} - y_n| \geq 2T$, или $|x-y| \geq 2Tn$, $y \in \partial D$. Пусть $d(\gamma, \tilde{P}) \equiv d(\gamma, x^{(1)})$. Запишем задачу (7), (10) в виде

$$(L_0u_m)(x) = f_m(x) + \left(\sum_{ij=1}^{n}(a_{ij}(P_1) - a_{ij}(x))D_{x_i}D_{x_j} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{n} a_i(x)D_{x_i} - a_0(x) + \lambda\right) u_m = F_7(x), \tag{41}$$

$$u_m|_{\partial D} \geq 0, \quad (\mathcal{B}u_m - g_m)|_{\partial D} \geq 0, \quad u_m(\mathcal{B}u_m - g_m)|_{\partial D} = 0.$$

В задаче (41) сделаем замену $u_m(x) = \omega_m(z)$, $z_i = d(\beta_i, x^{(1)})x_i$, $i = \overline{1, n}$. Получим

$$(L_1\omega_m)(z) = F_7(Z), \quad \omega_m|_{\partial D} \geq 0,$$
$$(\mathcal{B}\omega_m - g_m)|_{\partial D} \geq 0, \omega_m(\mathcal{B}u_m - g_m)|_{\partial D} = 0.$$

Поскольку $|x_k^{(1)} - x_k^{(2)}| \leq T$, функция $\omega_m(z)\mu(z)$ в области H_ρ удовлетворяет краевой задаче

$$(L_2(\omega_m\mu))(z) = \sum_{ij=1}^{n} d(\beta_i+\beta_j, x^{(1)})a_{ij}(P_1)[D_{z_i}\omega_m D_{z_j}\mu + D_{z_i}\mu D_{z_j}\omega_m] +$$

$$+\omega_m\left[\sum_{ij=1}^{n} d(\beta_i + \beta_j, x^{(1)})a_{ij}(P_1)D_{z_i}D_{z_j}\mu(z)\right] + \mu F_7 \equiv F_8(z),$$

$$(\omega_m\mu)|_{\partial D} = 0.$$

Далее, повторяя рассуждения доказательства теоремы 7, получим нужную оценку.

В случае $|x_k^{(1)} - x_k^{(2)}| \geq T$ для $E(u_m)$ справедлива оценка (35).

Применяя теорему 6 к решениям задачи (7), (10) и повторяя рассуждения доказательства теоремы 8, получаем оценку (26).

Доказательство теоремы 1. Поскольку правая часть неравенства (14) не зависит от m, а последовательности

$$\{V_m^{(0)} = |u_m(P)|\}, \ \{V_m^{(1)} = d(\gamma - \beta_i, x)|D_{x_i}u_m(P)|\},$$

$$\{V_m^{(2)} = d(2\gamma - \beta_i - \beta_j, x)|D_{x_i}D_{x_j}u_m(P)|\}, \ P(x) \in D,$$

равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, то по теореме Арцела существуют подпоследовательности $\{V_{m(k)}^{(0)}\}$, $\{V_{m(j)}^{(1)}\}$, $\{V_{m(r)}^{(2)}\}$ равномерно сходящиеся в D. Переходя к пределу при $m(k) \to \infty$, $m(j) \to \infty$, $m(r) \to \infty$ в задаче (7), (8), получим, что единственное решение задачи (1), (2) принадлежит $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; D)$ и справедлива оценка (5).

Теорема 10. *Пусть $f(x) \in C^\alpha(\gamma, \beta; 0; D)$ и выполнены условия теоремы 1. Тогда единственное решение задачи (1), (2) в пространстве $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; D)$ определяется интегралами Стильтьеса с борелевской мерой*

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) = \int_D \Gamma_1(x, d\xi)f(\xi) + \int_{\partial D} \Gamma_2(x, d_\xi S)\varphi(\xi) \quad (42)$$

и компоненты (Γ_1, Γ_2) *удовлетворяют неравенствам*

$$\left|\int\limits_D \Gamma_1(x, d\xi)\right| \leq \sup_{\overline{D}} |A_0^{-1}(x)|, \quad \left|\int\limits_{\partial D} \Gamma_2(x, d_\xi S)\right| \leq 1. \tag{43}$$

Доказательство. Благодаря тому, что

$$C^\alpha(\gamma, \beta; 0; D) \subset C^\alpha(\gamma, \beta; \delta; D),$$

для $f(x) \in C^\alpha(\gamma, \beta; 0; D)$ справедлива оценка

$$|f; \gamma, \beta; \delta; D|_\alpha \leq C|f; \gamma, \beta; 0; D|_\alpha,$$

где c зависит от $\operatorname{diam} D$.

Учитывая теорему 1, для решения задачи (1), (2) справедлива оценка

$$|u; \gamma, \beta; 0; D|_{2+\alpha} \leq C(|f; \gamma, \beta; 0; D|_\alpha + |\varphi; \gamma, \beta; 0; D|_{2+\alpha}). \tag{44}$$

Рассматриваем $u(x)$ при фиксированных x, как линейный непрерывный функционал $\mathcal{L}(f, \varphi)$ на нормированном пространстве $C^\alpha(\gamma, \beta; 0; D)$ с нормой, равной правой части неравенства (44). В силу вложения $C^\alpha(\gamma, \beta; 0; D) \subset C$ и теоремы Рисса, можно считать, что $u(x)$ порождает борелевскую меру $\Gamma(x, \Omega)$, которая определена на σ-алгебре подмножеств Ω области D, включая D и все ее открытые подмножества, такие, что значения данного функционала определяются формулой (42).

Из теорем 1, 4 следует справедливость для решения задачи (1), (2) неравенств

$$|u_1|_D \leq |fA_0^{-1}|_D, \quad |u_2|_D \leq |\varphi|_D, \tag{45}$$

где $u_1(x)$ – решение однородной задачи (1), (2) ($\varphi(x) \equiv 0$), а $u_2(x)$ – решение задачи (1), (2) при $f(x) \equiv 0$.

Подставив в неравенства (45) $\varphi(x) \equiv 1$, $f(x) \equiv 1$, получим неравенства (43).

Доказательство теоремы 2. Поскольку правая часть неравенства (26) не зависит от m и множества $\{V_m^{(k)}\}$, $k = 0, 1, 2$, равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в D, то по теореме Арцела существуют подпоследовательности $\{V_{m(k)}^{(0)}\}$, $\{V_{m(j)}^{(1)}\}$, $\{V_{m(r)}^{(2)}\}$, равномерно сходящиеся в D. Поэтому переходя к пределу при $m(k) \to \infty$, $m(j) \to \infty$, $m(r) \to \infty$ в задаче (7), (9), получим, что единственное решение задачи (1), (3) принадлежит $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;D)$ и справедива оценка (6).

Теорема 11. *Предположим, что* $f(x) \in C^{\alpha}(\gamma,\beta;0;D)$, $g(x) \in C^{1+\alpha}(\gamma,\beta;0;D)$ *и выполнены условия теоремы 2. Тогда единственное решение задачи (1), (3) в пространстве* $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;D)$ *определяется интегралами Стильтьеса с борелевской мерой*

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x) = \int\limits_D G_1(x,d\xi)f(\xi) + \int\limits_{\partial D} G_2(x,d_\xi S)g(\xi) \quad (46)$$

и компоненты (G_1, G_2) *удовлетворяют неравенствам*

$$\left|\int\limits_D G_1(x,d\xi)\right| \le |A_0^{-1}(x)|_D, \qquad \left|\int\limits_{\partial D} G_2(x,d_\xi S)\right| \le |b_0^{-1}(x)|_{\partial D}. \quad (47)$$

Доказательство. Поскольку $C^{\alpha}(\gamma,\beta;0;D) \subset C^{\alpha}(\gamma,\beta;\delta;D)$, $C^{1+\alpha}(\gamma,\beta;\nu;D) \subset C^{1+\alpha}(\gamma,\beta;\delta;D)$, то для функций

$$f(x) \in C^{\alpha}(\gamma,\beta;0;D) \text{ и } g(x) \in C^{1+\alpha}(\gamma,\beta;0;D)$$

выполняются неравенства

$$\begin{gathered} |f;\gamma,\beta;\delta;D|_\alpha \le C|f;\gamma,\beta;0;D|_\alpha, \\ |g;\gamma,\beta;\nu;D|_{1+\alpha} \le C|g;\gamma,\beta;0;D|_{1+\alpha}, \end{gathered}$$

где c зависит от $\operatorname{diam} D$.

Учитывая теорему 2, для решения задачи (1), (3) имеет место оценка

$$|u;\gamma,\beta;0;D|_{2+\alpha} \le C(|f;\gamma,\beta;0;D|_\alpha + |g;\gamma,\beta;0;D|_{1+\alpha}). \quad (48)$$

Ввиду того, что пространство $C^{\alpha}(\gamma,\beta;0;D)$ вложено в C, повторяя рассуждения доказательства теоремы 10, получим формулу (46).

Используя теоремы 2, 5, находим оценки (47) для компонент (G_1, G_2).

Доказательство теоремы 3. Благодаря тому, что для решения задачи (7), (10) справедлива оценка (26), повторяя рассуждения доказательства теоремы 2 получим, что единственное решение задачи (1), (4) принадлежит пространству $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;D)$ и для него справедлива оценка (6).

Замечание. Задачи для уравнений с вырождениями различного вида исследовались многими математиками, в частности, в работах [1-8].

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. - М.: Гос. изд. физ.-мат лит., 1963. - 702 с.
2. Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г. Об общих эллиптических задачах с сильным вырождением // Докл. АН СССР. - 1980. - 254, N 6. - С. 1336 - 1342.
3. Никольский С.М. О краевой задачи первого рода с сильными вырождениями // Докл. АН СССР. - 1975. - 222, N 2. - С. 281 - 283.
4. Жислин Г.И. О конечности дискретного спектра операторов энергии квантовых систем многих частиц // Докл. АН СССР. - 1972. - 207, N 1. - С. 25 - 28.
5. Пукальский И.Д. Задача с косой производной для неравномерного параболического уравнения // Дифф. уравнения. - 2001. - 37, N 12, - с. 1637 - 1645.
6. Пукальський І.Д. Одностороння нелокальна крайова задача для сингулярних параболічних рівнянь // Укр. матем. журн. - 2001. - 53, N 11, - с. 1521 - 1531.
7. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. - М.: Наука, 1973. - 576 с.
8. Матійчук М.І. Параболічні сингулярні крайові задачі. - Київ: Інститут математики НАН України, 1999. - 176 с.
9. Шишмарев И.А. Введение в теорию эллиптических уравнений. - М.: Издат. Московского ун-та, 1979. - 189 с.
10. С.Агмон, А.Дуглис, Л.Ниренберг. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. - М.: Иностр. л-ра, 1962. - 208 с.

Кафедра дифференциальных уравнений,
Черновецкий национальный университет
им. Ю.Федьковича,
ул.Коцюбинского 2,
58012, г. Черновцы, Украина

Получено 5.08.08