 О. Т. Панат

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОЙ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

Исследовано смешанную задачу для некоторой гиперболо-параболической системы в неограниченной области. Получены условия на коэффициенты системы и начальные данные, что гарантируют однозначную разрешимость такой задачи в обобщенных пространствах Лебега.

Ключевые слова: гиперболо-параболическая система, смешанная задача, обобщенные пространства Лебега
MSC (2000): 35G25, 35M10

Введение.

В настоящей работе рассматривается вопрос о существовании, а также и единственности решения начально-краевой задачи для некоторой полулинейной гиперболо-параболической системы уравнений в частных производных. Наша цель – построение классов однозначной разрешимости такой задачи в неограниченной цилиндрической области. Система содержит два уравнения: гиперболическое уравнение третьего порядка и параболическое уравнение второго порядка. Нелинейную часть системы составляют степени неизвестных функций, причем показатели этих степеней зависят от пространственных переменных. Поэтому задача исследуется в специальных для этого случая функциональных пространствах, а именно в обобщенных пространствах Лебега ([1]).

Смешанные задачи для нелинейных гиперболических уравнений третьего порядка рассматривались в работах [2]-[5].

Некоторые задачи для гиперболо-параболических систем исследовано в [6], [7].

1. Функционально-аналитическая постановка задачи.

Пусть Ω – неограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega \in C^1$, $n \in \mathbb{N}$; $\Omega = \bigcup\limits_{R\in\mathbb{N}} \Omega^R$, где $\Omega^R = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, регулярная по Кальдерону ([8], с. 45) для каждого $R \in \mathbb{N}$. Обозначим $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $Q_\tau^R = \Omega^R \times (0,\tau)$,

$\Omega_\tau = Q_T \cap \{t=\tau\}$, $\Omega_\tau^R = Q_T^R \cap \{t=\tau\}$, $0 \le \tau \le T$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$, $S_T^R = \partial\Omega^R \times (0,T)$.

Пусть $H_0^1(\Omega^R)$ означает семейство всех измеримых на Ω^R и равных нулю на $\partial\Omega^R$ функций, которые вместе со своими производными первого порядка принадлежат пространству $L^2(\Omega^R)$.

Под $L^{p(x)}(\Omega^R)$ понимаем обобщенное пространство Лебега ([1]), то есть пространство измеримых на Ω^R функций u, которые удовлетворяют условию $\int\limits_{\Omega^R} |u|^{p(x)}dx < +\infty$. Норма в этом пространстве задается по формуле

$$||u; L^{p(x)}(\Omega^R)|| = \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_{\Omega^R} |u/\lambda|^{p(x)}dx \le 1\right\}.$$

Введем также пространства

$$H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}) = \{u : u \in H_0^1(\Omega^R) \text{ для всех } R \in \mathbb{N}\},$$

$$L^{p(x)}_{loc}(\overline{\Omega}) = \{u : u \in L^{p(x)}(\Omega^R) \text{ для всех } R \in \mathbb{N}\},$$

$$L^{p(x)}_{loc}(\overline{Q}_T) = \{u : u \in L^{p(x)}(Q_T^R) \text{ для всех } R \in \mathbb{N}\},\ p \in L^\infty(\Omega^R).$$

С целью упрощения записи обозначим

$$V(\Omega^R) = H_0^1(\Omega^R) \cap L^{p_0(x)}(\Omega^R) \cap L^{p_1(x)}(\Omega^R) \cap L^{q(x)}(\Omega^R),$$

$$V(Q_T^R) = H_0^1(Q_T^R) \cap L^{p_0(x)}(Q_T^R) \cap L^{p_1(x)}(Q_T^R) \cap L^{q(x)}(Q_T^R).$$

Рассмотрим в области Q_T систему уравнений

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_1(u,v) \equiv u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x,t)u_{tx_i})_{x_j} - \sum_{i,j=1}^n (b_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} - \\ - \sum_{i,j=1}^n (b^1_{ij}(x,t)v_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n C_i(x,t)u_{x_i} + C_0(x,t)u_t + \\ + + \sum_{i=1}^n C^1_i(x,t)v_{x_i} g_1(x,t)|u|^{p_0(x)-2}u + \\ + h(x,t)|u_t|^{p_1(x)-2}u_t = f_1(x,t,u,v),\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_2(u,v) \equiv v_t - \sum_{i,j=1}^n (a^1_{ij}(x,t)v_{x_i})_{x_j} - \sum_{i,j=1}^n (c_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \\ + \sum_{i=1}^n A_i(x,t)v_{x_i} + \sum_{i=1}^n B_i(x,t)u_{x_i} + \\ + g_2(x,t)|v|^{q(x)-2}v = f_2(x,t,u,v)\end{aligned}$$

с граничными

$$u\Big|_{S_T} = v\Big|_{S_T} = 0 \tag{2}$$

и начальными

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\Big|_{t=0} = u_1(x), \quad v\Big|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in \Omega \tag{3}$$

условиями.

Предполагаем, что коэффициенты системы удовлетворяют условиям:

(**A**): $a_{ij}, a^1_{ij}, A_i \in L^\infty(Q_T)\ i,j \in \{1,...,n\}$;
$a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t),\ a^1_{ij}(x,t) = a^1_{j\,i}(x,t)$ почти всюду в Q_T;
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2$, $a_0 > 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $(x,t) \in Q_T$;
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} a^1_{ij}(x,t)\eta_i\eta_j \geq a^1_0|\eta|^2$, $a^1_0 > 0$ для всех $\eta \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $(x,t) \in Q_T$;

(**B**): $b_{ij}, b_{ij\,t}, b^1_{ij}, B_i \in L^\infty(Q_T),\ \ i,j \in \{1,...,n\}$;
$b_{ij}(x,t) = b_{ji}(x,t),\ b^1_{ij}(x,t) = b^1_{j\,i}(x,t)$ почти всюду в Q_T;
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq b_0|\xi|^2$, $b_0 > 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $(x,t) \in Q_T$;
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} b^1_{ij}(x,t)\eta_i\eta_j \geq b^1_0|\eta|^2$, $b^1_0 > 0$ для всех $\eta \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $(x,t) \in Q_T$;

(**C**): $c_{ij}, C_0, C_i, C^1_i \in L^\infty(Q_T),\ \ i,j \in \{1,...,n\}$;
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2$, $c_0 > 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $(x,t) \in Q_T$; $C_0 \geq \widetilde{c}_0$, $\widetilde{c}_0 \in \mathbb{R}$.

(**GH**): $g_1, g_{1t}, g_2, h \in L^\infty(Q_T)$;
$g_1(x,t) \geq \gamma_1 > 0,\ g_2(x,t) \geq \gamma_2 > 0,\ g_{2t} \geq \gamma^1_2 > 0,\ h(x,t) \geq h^0 > 0$ почти всюду в Q_T;

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{PQ}):\ & p_j, q:\ \Omega \to (1,+\infty),\ \ p_j, q \in L^{\infty}(\Omega),\\
& 1<\overline{p}_j=\operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} p_j(x) \le p_j(x) \le \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} p_j(x)=\widehat{p}_j < +\infty,\ \ j=0,1,\\
& 1 < \overline{q} = \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} q(x) \le q(x) \le \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} q(x) = \widehat{q} < +\infty.
\end{aligned}
$$

$(\mathbf{F})$: $f_i : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, i=1, 2;
функции $f_i(\cdot,\cdot,y_1,y_2)$ измеримые в Q_T для всех $(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$;
функции $f_i(x,t,\cdot,\cdot)$ непрерывные в $\mathbb{R}^2$ для почти всех $(x,t) \in Q_T$;
$|f_i(x,t,y_1,y_2)| \le d_i(x,t) + a_i(x,t)|y_1|^{\alpha(x)}|y_2|^{\beta_i(x)}$,
где $\alpha, \beta_i:\ \Omega \to [0,+\infty),\ \alpha, \beta_i \in L^{\infty}(\Omega)$,
$0 \le \overline{\alpha} = \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} \alpha(x) \le \alpha(x) \le \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} \alpha(x) = \widehat{\alpha} < +\infty$,
$d_i \in L^2(Q_T),\ a_i \in L^{\infty}(Q_T),\ i = 1, 2.$

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1)-(3) назовем пару функций (u, v),

$$u \in L^{\infty}(0,T; H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}) \cap L^{p_0(x)}_{loc}(\overline{\Omega})) \cap C([0,T]; H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})),$$

$$u_t \in L^2(0,T; H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})) \cap L^{p_1(x)}_{loc}(\overline{Q}_T) \cap C([0,T]; L^2_{loc}(\overline{\Omega})),$$

$$v \in L^2(0,T; H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})) \cap L^{q(x)}_{loc}(\overline{Q}_T) \cap C([0,T]; L^2_{loc}(\overline{\Omega})),$$

которая удовлетворяет интегральным равенствам

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{\Omega_T} u_t w\, dx - \int\limits_{\Omega_0} u_1(x) w\, dx + \int\limits_{Q_T} \Bigg[-u_t w_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{tx_i} w_{x_j} + \\
+ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t) u_{x_i} w_{x_j} + \\
+ \sum_{i,j=1}^{n} b^1_{ij}(x,t) v_{x_i} w_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x,t) u_{x_i} w + \\
+ C_0(x,t) u_t w + \sum_{i=1}^{n} C^1_i(x,t) v_{x_i} w + g_1(x,t)|u|^{p_0(x)-2} u w + \\
+ h(x,t)|u_t|^{p_1(x)-2} u_t w \Bigg]\, dx\, dt = \int\limits_{Q_T} f_1(x,t,u,v) w\, dx\, dt,
\end{gathered}
$$

$$\int\limits_{\Omega_T} v\tilde{w}\,dx - \int\limits_{\Omega_0} v_0(x)\tilde{w}\,dx + \int\limits_{Q_T}\Bigg[-v\tilde{w}_t + \sum_{i,j=1}^{n} a^1_{ij}(x,t)v_{x_i}\tilde{w}_{x_j} +$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x,t)u_{x_i}\tilde{w}_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(x,t)v_{x_i}\tilde{w} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x,t)u_{x_i}\tilde{w} +$$
$$+g_2(x,t)|v|^{q(x)-2}v\tilde{w}\Bigg]\,dx\,dt = \int\limits_{Q_T} f_2(x,t,u,v)\tilde{w}\,dx\,dt$$

с произвольными функциями $w, \tilde{w} \in C^1([0,T]; C_0^\infty(\Omega))$, а также условию $u(x,0) = u_0(x)$.

2. Существование и единственность решения в случае ограниченной области.

Фиксируем произвольное $R \in \mathbb{N}$. В области Q_T^R рассматриваем начально-краевую задачу

$$\widetilde{A}_1(u,v) = f_1^R(x,t),$$
$$\widetilde{A}_2(u,v) = f_2^R(x,t), \quad (x,t) \in Q_T^R \tag{4}$$
$$u(x,0) = u_0^R(x),\ \ u_t(x,0) = u_1^R(x),\ \ v(x,0) = v_0^R(x), \quad x \in \Omega^R \tag{5}$$
$$u^R|_{S_T^R} = v^R|_{S_T^R} = 0, \tag{6}$$

где

$$f_i^R(x,t) = \begin{cases} f_i(x,t), & (x,t) \in Q_T^R, \\ 0, & (x,t) \in Q_T \setminus Q_T^R, \end{cases}$$

$i = 1,2,$ $u_0^R(x) = u_0(x)\xi(x)$, $u_1^R(x) = u_1(x)\xi(x)$, $v_0^R(x) = v_0(x)\xi(x)$, $\xi \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\xi(x) = 1$, если $|x| \leqslant R-1$, $\xi(x) = 0$, если $|x| \geqslant R$, $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$, если $x \in \mathbb{R}^n$.

Определение 2. Пару функций (u^R, v^R), которая удовлетворяет включениям

$$u^R \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega^R) \cap L^{p_0(x)}(\Omega^R)) \cap C([0,T]; H_0^1(\Omega^R)),$$
$$u_t^R \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega^R)) \cap L^{p_1(x)}(Q_T^R) \cap C([0,T]; L^2(\Omega^R)),$$
$$v^R \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega^R)) \cap L^{q(x)}(Q_T^R) \cap C([0,T]; L^2(\Omega^R)),$$

условию $u^R(x,0)=u_0^R(x)$, а также интегральным равенствам

$$\int\limits_{\Omega_T^R} u_t^R w\,dx - \int\limits_{\Omega_0^R} u_1^R(x) w\,dx + \int\limits_{Q_T^R}\Bigg[-u_t^R w_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{tx_i}^R w_{x_j} +$$

$$+\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u_{x_i}^R w_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^1(x,t)v_{x_i}^R w_{x_j} + \sum_{i=1}^n C_i(x,t)u_{x_i}^R w +$$

$$+C_0(x,t)u_t^R w + \sum_{i=1}^n C_i^1(x,t)v_{x_i}^R w +$$

$$+g_1(x,t)|u^R|^{p_0(x)-2}u^R w + h(x,t)|u_t^R|^{p_1(x)-2}u_t^R w\Bigg]\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{Q_T^R} f_1(x,t,u^R,v^R)w\,dx\,dt,$$

$$\int\limits_{\Omega_T^R} v^R\tilde{w}\,dx - \int\limits_{\Omega_0^R} v_0^R(x)\tilde{w}\,dx + \int\limits_{Q_T^R}\Bigg[-v^R\tilde{w}_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^1(x,t)v_{x_i}^R\tilde{w}_{x_j} +$$

$$+\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x,t)u_{x_i}^R\tilde{w}_{x_j} + \sum_{i=1}^n A_i(x,t)v_{x_i}^R\tilde{w} + \sum_{i=1}^n B_i(x,t)u_{x_i}^R\tilde{w} +$$

$$+g_2(x,t)|v^R|^{q(x)-2}v^R\tilde{w}\Bigg]\,dx\,dt = \int\limits_{Q_T^R} f_2(x,t,u^R,v^R)\tilde{w}\,dx\,dt$$

с произвольными функциями $w,\tilde{w}\in V(Q_T^R)$, $w_t,\tilde{w}_t\in L^2(Q_T^R)$, называем обобщенным решением задачи (4)-(6).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(GH)**, **(PQ)**, **(F)**, а также условия:*

1) $\overline{p}_0>2$, $\overline{p}_1>2$;

2) $\widehat{\alpha}\le\min\left\{\dfrac{\overline{p}_0}{2}, ess\inf\limits_{\Omega}\dfrac{p_0(x)(q(x)-1)}{q(x)}\right\}$, *для каждого* $x\in\Omega$

$$\beta_1(x)=\frac{q(x)(p_0(x)-2\alpha(x))}{2p_0(x)},$$

$$\beta_2(x)=\frac{q(x)(p_0(x)-\alpha(x))}{p_0(x)}-1;$$

3) $u_0^R\in H_0^1(\Omega^R)\cap L^{p_0(x)}(\Omega^R)$, $u_1^R\in L^2(\Omega^R)\cap L^{p_1(x)}(\Omega^R)$, $v_0^R\in L^2(\Omega^R)\cap L^{q(x)}(\Omega^R)$.

Тогда задача (4)-(6) имеет обобщенное решение. Если кроме этого $\widehat{p}_0 \leq \frac{2n}{n-2} - \varepsilon$ *для* $n > 2$, *где* $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{n-1}\right)$, *и* $\widehat{p}_0$ *– любое конечное число в случае* $n \leq 2$, *тогда найденное решение будет единственным.*

Доказательство. Используем метод Фаэдо-Галеркина. Пусть s - наименьшее натуральное число, для которого выполняется вложение $V(\Omega^R) \subset H_0^s(\Omega^R)$. Рассмотрим ортонормированную в $L^2(\Omega^R)$ систему всех собственных функций задачи

$$(u,v)_{H_0^s(\Omega^R)} = \lambda(u,v)_{L^2(\Omega^R)}, \quad \text{где} \tag{7}$$

$(\cdot,\cdot)_{H_0^s(\Omega^R)}$, $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega^R)}$ - скалярные произведения в пространствах $H_0^s(\Omega^R)$ и $L^2(\Omega^R)$ соответственно. Приближенное решение задачи (4)-(6) будем искать в виде $u^N(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N} C_k^N(t)\varphi^k(x)$, $v^N(x,t) = \sum\limits_{l=1}^{N} Z_l^N(t)\psi^l(x)$, где φ^k, ψ^l - собственных функций задачи (7), а коэффициенты C_k^N, Z_l^N, $k,l = \overline{1,N}$ определяются из задачи Коши

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega^R} \Bigg[& u_{tt}^N\varphi^k + \textstyle\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{tx_i}^N\varphi_{x_j}^k + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u_{x_i}^N\varphi_{x_j}^k + \\
& + \textstyle\sum_{i,j=1}^n b_{ij}^1(x,t)v_{x_i}^N\varphi_{x_j}^k + \sum_{i=1}^n C_i(x,t)u_{x_i}^N\varphi^k + \\
& + C_0(x,t)u_t^N\varphi^k + \\
& + \sum_{i=1}^{n} C_i^1(x,t)v_{x_i}^N\varphi^k + g_1(x,t)|u^N|^{p_0(x)-2}u^N\varphi^k + \\
& + h(x,t)|u_t^N|^{p_1(x)-2}u_t^N\varphi^k - f_1(x,t,u^N,v^N)\varphi^k \Bigg] dx = 0,
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega^R} \Bigg[& v_t^N\psi^l + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^1(x,t)v_{x_i}^N\psi_{x_j}^l + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x,t)u_{x_i}^N\psi_{x_j}^l + \\
& + \textstyle\sum_{i=1}^n A_i(x,t)v_{x_i}^N\psi^l + \sum_{i=1}^n B_i(x,t)u_{x_i}^N\psi^l + \\
& + g_2(x,t)|v^N|^{q(x)-2}v^N\psi^l - f_2(x,t,u^N,v^N)\psi^l \Bigg] dx = 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

$$C_k^N(0) = u_{0,k}^{R,N}, \quad C_{kt}^N(0) = u_{1,k}^{R,N}, \text{ где}$$

$$u_0^{R,N}(x) = \sum_{k=1}^{N} u_{0,k}^{R,N}\varphi^k(x), \;\; u_1^{R,N}(x) = \sum_{k=1}^{N} u_{1,k}^{R,N}\varphi^k(x) \;\text{ и}$$

$$\|u_0^{R,N} - u_0^N\|_{H_0^1(\Omega^R)\cap L^{p_0(x)}(\Omega^R)} \to 0, \tag{10}$$

$$\|u_1^{R,N} - u_1^R\|_{L^2(\Omega^R)\cap L^{p_1(x)}(\Omega^R)} \to 0;$$

$$Z_l^N(0) = v_{0,l}^{R,N}, \quad v_0^{R,N}(x) = \textstyle\sum_{l=1}^N v_{0,l}^{R,N}\psi^l(x),$$

$$\|v_0^{R,N} - v_0^R\|_{L^2(\Omega^R)\cap L^{q(x)}(\Omega^R)} \to 0. \tag{11}$$

На основании теоремы Каратеодори ([9], с. 54) и оценок, полученных ниже, задача (8)-(11) имеет единственное решение – пару функций (C_k^N, Z_l^N) – на всем интервале $[0,T]$.

Умножим уравнение (8) на $C_{kt}^N e^{-\eta t}$, просуммируем по k от 1 до N и проинтегрируем по t от 0 до τ, $\tau\in(0,T]$. Уравнение (9) умножим на $Z_l^N e^{-\eta t}$, просуммируем по l от 1 до N и проинтегрируем по t от 0 до τ, $\tau\in(0,T]$. Получим

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_\tau^R}\Bigg[&u_{tt}^N u_t^N + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{tx_i}^N u_{tx_j}^N + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u_{x_i}^N u_{tx_j}^N +\\ &+\sum_{i,j=1}^n b_{ij}^1(x,t)v_{x_i}^N u_{tx_j}^N + \sum_{i=1}^n C_i(x,t)u_{x_i}^N u_t^N + C_0(x,t)|u_t^N|^2 +\\ &+\sum_{i=1}^n C_i^1(x,t)v_{x_i}^N u_t^N + g_1(x,t)|u^N|^{p_0(x)-2}u^N u_t^N +\\ &+h(x,t)|u_t^N|^{p_1(x)} - f_1(x,t,u^N,v^N)u_t^N\Bigg]e^{-\eta t}\,dx\,dt = 0,\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_\tau^R}\Bigg[&v_t^N v^N + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^1(x,t)v_{x_i}^N v_{x_j}^N + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x,t)u_{x_i}^N v_{x_j}^N +\\ &+\sum_{i=1}^n A_i(x,t)v_{x_i}^N v^N + \sum_{i=1}^n B_i(x,t)u_{x_i}^N v^N +\\ &+g_2(x,t)|v^N|^{q(x)} - f_2(x,t,u^N,v^N)v^N\Bigg]e^{-\eta t}\,dx\,dt = 0.\end{aligned} \tag{13}$$

Учитывая условия теоремы, оценим каждое слагаемое из (12), (13):

$$I_1^{11} := \int\limits_{Q_\tau^R} u_{tt}^N u_t^N e^{-\eta t}\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau^R} |u_t^N|^2 e^{-\eta\tau}\,dx - \\ -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0^R} |u_1^{R,N}|^2\,dx + \frac{\eta}{2}\int\limits_{Q_\tau^R} |u_t^N|^2 e^{-\eta t}\,dx\,dt;$$

$$I_2^{11} := \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u_{tx_i}^N u_{tx_j}^N e^{-\eta t}\,dx\,dt \geq a_0 \int\limits_{Q_\tau^R} |\nabla u_t^N|^2 e^{-\eta t}\,dx\,dt;$$

$$I_3^{11} := \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t) u_{x_i}^N u_{tx_j}^N e^{-\eta t}\,dx\,dt \geq \frac{b_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau^R} |\nabla u^N|^2 e^{-\eta\tau}\,dx - \\ -\frac{b_1}{2}\int\limits_{\Omega_0^R} |\nabla u_0^{R,N}|^2\,dx + \left(\frac{\eta b_0}{2} - \frac{b_2}{2}\right)\int\limits_{Q_\tau^R} |\nabla u^N|^2 e^{-\eta t}\,dx\,dt,$$

где

$$b_1 = n\max_{i,j} \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} |b_{ij}(x,0)|, \quad b_2 = n\max_{i,j} \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} |b_{ijt}(x,t)|;$$

$$I_4^{11} := \int\limits_{Q_\tau^R} \textstyle\sum_{i,j=1}^n b_{ij}^1(x,t) v_{x_i}^N u_{tx_j}^N e^{-\eta t}\,dx\,dt \geq \\ \geq -\frac{b_1^1}{2}\int\limits_{Q_\tau^R} \left(\frac{|\nabla v^N|^2}{\delta_1} + \delta_1 |\nabla u_t^N|^2\right) e^{-\eta t}\,dx\,dt,$$

где

$$b_1^1 = n\max_{i,j} \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} |b_{ij}^1(x,t)|, \quad \delta_1 > 0;$$

$$I_5^{11} := \int\limits_{Q_\tau^R} \textstyle\sum_{i=1}^n C_i(x,t) u_{x_i}^N u_t^N e^{-\eta t}\,dx\,dt \geq$$

$$\geq -\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau^R} (c_1|\nabla u^N|^2 + |u_t^N|^2) e^{-\eta t}\,dx\,dt,\ c_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \sum_{i=1}^n |C_i(x,t)|^2;$$

$$I_6^{11} := \int\limits_{Q_\tau^R} C_0(x,t)|u_t^N|^2 e^{-\eta t}\,dx\,dt \geq \widetilde{c}_0 \int\limits_{Q_\tau^R} |u_t^N|^2 e^{-\eta t}\,dx\,dt;$$

$$I_7^{11} := \int\limits_{Q_\tau^R} \textstyle\sum_{i=1}^n C_i^1(x,t) v_{x_i}^N u_t^N e^{-\eta t}\,dx\,dt \geq \\ \geq -\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau^R} \left(c_1^1\delta_2|\nabla v^N|^2 + \frac{|u_t^N|^2}{\delta_2}\right) e^{-\eta t}\,dx\,dt,$$

где

$$\delta_2 > 0, \quad c_1^1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} |C_i^1(x,t)|^2;$$

$$I_8^{11} := \int\limits_{Q_\tau^R} g_1(x,t)|u^N|^{p_0(x)-2}u^N u_t^N e^{-\eta t}\,dx\,dt \geq$$
$$\geq \tfrac{\gamma_1}{\hat{p}_0} \int\limits_{\Omega_\tau^R} |u^N|^{p_0(x)} e^{-\eta\tau}\,dx -$$
$$-\frac{\gamma_0}{\overline{p}_0} \int\limits_{\Omega_0^R} |u_0^{R,N}|^{p_0(x)}\,dx + \left(\frac{\eta\gamma_1}{\hat{p}_0} - \frac{\gamma_3}{\overline{p}_0}\right) \int\limits_{Q_\tau^R} |u^N|^{p_0(x)} e^{-\eta t}\,dx\,dt,$$

где

$$\gamma_0 = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} |g_1(x,0)|, \quad \gamma_3 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} |g_{1t}(x,t)|;$$

$$I_9^{11} := \int\limits_{Q_\tau^R} h(x,t)|u_t^N|^{p_1(x)} e^{-\eta t}\,dx\,dt \geq h^0 \int\limits_{Q_\tau^R} |u_t^N|^{p_1(x)} e^{-\eta t}\,dx\,dt;$$

$$I_{10}^{11} := \int\limits_{Q_\tau^R} f_1(x,t,u^N,v^N) u_t^N e^{-\eta t}\,dx\,dt \leq \int\limits_{Q_\tau^R} \Bigg(\frac{1}{2}\,|d_1(x,t)|^2 +$$
$$+\frac{\tilde{a}_1+1}{2}\,|u_t^N|^2 + \frac{\tilde{a}_1\widehat{\alpha}\delta_3^{1-\widehat{p}_0/2\overline{\alpha}}}{\overline{p}_0}\,|u^N|^{p_0(x)} +$$
$$+\tfrac{\tilde{a}_1(\widehat{p}_0-2\overline{\alpha})\delta_3}{2\overline{p}_0}|v^N|^{q(x)}e^{-\eta t}\Bigg)\,dx\,dt,\ \ \delta_3 > 0, \quad \tilde{a}_1 = \operatorname{ess\,sup}_{Q_T} |a_1(x,t)|;$$

$$I_1^{12} := \int\limits_{Q_\tau^R} v_t^N v^N e^{-\eta t}\,dx\,dt = \tfrac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau^R} |v^N|^2 e^{-\eta\tau}\,dx -$$
$$-\tfrac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0^R} |v_0^{R,N}|^2\,dx + \tfrac{\eta}{2} \int\limits_{Q_\tau^R} |v^N|^2 e^{-\eta t}\,dx\,dt;$$

$$I_2^{12} := \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^1(x,t) v_{x_i}^N v_{x_j}^N e^{-\eta t}\,dx\,dt \geq a_0^1 \int\limits_{Q_\tau^R} |\nabla v^N|^2 e^{-\eta t}\,dx\,dt;$$

$$I_3^{12} := \int\limits_{Q_\tau^R} \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x,t) u_{x_i}^N v_{x_j}^N e^{-\eta t}\,dx\,dt \geq$$
$$\geq -\tfrac{c_3}{2} \int\limits_{Q_\tau^R} \left(\tfrac{|\nabla u^N|^2}{\delta_4} + \delta_4 |\nabla v^N|^2\right) e^{-\eta t}\,dx\,dt,$$

где

$$\delta_4 > 0, \quad c_3 = n \max_{i,j} \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} |c_{ij}(x,t)|;$$

$$I_4^{12} := \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^n A_i(x,t) v_{x_i}^N v^N e^{-\eta t}\,dx\,dt \geq$$
$$\geq -\tfrac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau^R} \left(a_1\delta_5 |\nabla v^N|^2 + \tfrac{|v^N|^2}{\delta_5} \right) e^{-\eta t}\,dx\,dt,$$
$$\delta_5 > 0, \quad a_1 = \operatorname{ess\,sup}_{Q_T} \sum_{i=1}^n |A_i(x,t)|^2;$$
$$I_5^{12} := \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^n B_i(x,t) u_{x_i}^N v^N e^{-\eta t}\,dx\,dt \geq$$
$$\geq -\tfrac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau^R} (b_3 |\nabla u^N|^2 + |v^N|^2) e^{-\eta t}\,dx\,dt;$$

где

$$b_3 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \sum_{i=1}^n |B_i(x,t)|^2;$$

$$I_6^{12} := \int\limits_{Q_\tau^R} g_2(x,t) |v^N|^{q(x)} e^{-\eta t}\,dx\,dt \geq$$
$$\geq \gamma_2 \int\limits_{Q_\tau^R} |v^N|^{q(x)} e^{-\eta t}\,dx\,dt;$$

$$I_7^{12} := \int\limits_{Q_\tau^R} f_2(x,t,u^N,v^N) v^N e^{-\eta t}\,dx\,dt \leq \int\limits_{Q_\tau^R} \Bigg(\frac{1}{2}\,|d_2(x,t)|^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\,|v^N|^2 + \frac{\tilde a_2 \widehat{\alpha} \delta_6^{1-\widehat{p}_0/\overline{\alpha}}}{\overline{p}_0}\,|u^N|^{p_0(x)} + \frac{\tilde a_2 (\widehat{p}_0 - \overline{\alpha}) \delta_6}{\overline{p}_0}\,|v^N|^{q(x)} \Bigg) e^{-\eta t}\,dx\,dt,$$

где

$$\delta_6 > 0, \quad \tilde a_2 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} |a_2(x,t)|.$$

Учитывая оценки для интегралов $I_1^{11} - I_{10}^{11}$, $I_1^{12} - I_7^{12}$ и выбирая соответственным образом значения η, δ_i, $i = \overline{1,6}$, имеем

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R} (|u_t^N|^2 + |\nabla u^N|^2 + |u^N|^{p_0(x)})\,dx \leq M_1 \tag{14}$$

$$\int\limits_{Q_\tau^R} (|\nabla u_t^N|^2 + |u_t^N|^2 + |\nabla u^N|^2 + |u^N|^{p_0(x)} + |u_t^N|^{p_1(x)})\,dx\,dt \leq M_1 \tag{15}$$

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R} |v^N|^2\,dx + \int\limits_{Q_\tau^R} (|\nabla v^N|^2 + |v^N|^2 + |v^N|^{q(x)})\,dx\,dt \leq M_1, \tag{16}$$

где $\tau \in (0,T]$ и константа M_1 не зависит от N.

Кроме этого,

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \left| \left|u^N\right|^{p_0(x)-2} u^N \right|^{p'_0(x)} dxdt \leq \int\limits_{Q_\tau^R} \left|u^N\right|^{p_0(x)} dxdt \leq M_2,$$
$$\int\limits_{Q_\tau^R} \left| \left|u_t^N\right|^{p_1(x)-2} u_t^N \right|^{p'_1(x)} dxdt \leq \int\limits_{Q_\tau^R} \left|u_t^N\right|^{p_1(x)} dxdt \leq M_2, \qquad (17)$$
$$\int\limits_{Q_\tau^R} \left| \left|v^N\right|^{q(x)-2} u^N \right|^{q'(x)} dxdt \leq \int\limits_{Q_\tau^R} \left|v^N\right|^{q(x)} dxdt \leq M_2,$$

$\tau \in (0,T]$ и константа M_2 не зависит от N.

На основании (14)-(17) существует подпоследовательность последовательности $\{u^N\}_{N\in\mathbb{N}}$ (обозначения оставим прежние) такая, что

$$u^N \to u^R * - \text{слабо в } L^\infty((0,T); H_0^1(\Omega^R) \cap L^{p_0(x)}(\Omega^R)),$$
$$u^N \to u^R \text{ слабо в } L^2((0,T); H_0^1(\Omega^R)) \cap L^{p_0(x)}(Q_\tau^R),$$
$$u_t^N \to u_t^R * - \text{слабо в } L^\infty((0,T); L^2(\Omega^R)),$$
$$u_t^N \to u_t^R \text{ слабо в } L^2((0,T); H_0^1(\Omega^R)) \cap L^{p_1(x)}(Q_\tau^R),$$
$$\left|u^N\right|^{p_0(x)-2} u^N \to \chi_1 \text{ слабо в } L^\infty(0,T; L^{p'_0(x)}(\Omega^R)),$$
$$\left|u_t^N\right|^{p_1(x)-2} u_t^N \to \chi_2 \text{ слабо в } L^\infty(0,T; L^{p'_1(x)}(\Omega^R)),$$
$$u^N \to u^R \text{ сильно в } L^2(Q_\tau^R) \text{ и почти всюду в } Q_\tau^R,$$
$$\left|u^N\right|^{p_0(x)-2} u^N \to \left|u^R\right|^{p_0(x)-2} u^R \text{ почти всюду в } Q_\tau$$
$$\text{при } N \to \infty,\ \tau \in (0,T];$$
$$v^N \to v^R * - \text{слабо в } L^\infty((0,T); L^2(\Omega^R)),$$
$$v^N \to v^R \text{ слабо в } L^2((0,T); H_0^1(\Omega^R) \cap L^{q(x)}(Q_\tau^R)),$$
$$\left|v^N\right|^{q(x)-2} v^N \to \mu \text{ слабо в } L^\infty(0,T; L^{q'(x)}(\Omega^R))$$
$$\text{если } N \to \infty,\ \tau \in (0,T].$$

Рассмотрим P_N - оператор ортогонального проектирования пространства $L^2(\Omega^R)$ на подпространство $\Phi_N = [\phi_1, ..., \phi_N]$, где $\phi_1, ..., \phi_N$ - собственные функции задачи (7). Тогда

$$P_N \in \mathcal{L}(L^2(\Omega^R); L^2(\Omega^R)), \quad P_N \in \mathcal{L}(H_0^s(\Omega^R); H_0^s(\Omega^R)),$$

$$P_N \in \mathcal{L}(H_0^{-s}(\Omega^R); H_0^{-s}(\Omega^R))$$

и, кроме этого, оператор P_N по норме равномерно ограничен единицей.

Пусть

$$A_1(u_t^N) = -\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,t)u_{tx_i}^N)_{x_j} + C_0(x,t)u_t^N,$$

$$A_2(u^N) = -\sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}(x,t)u_{x_i}^N)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n}C_i(x,t)u_{x_i}^N,$$

$$B_1(v^N) = -\sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}^1(x,t)v_{x_i}^N)_{x_j} + + \sum_{i=1}^{n}C_i^1(x,t)v_{x_i}^N,$$

$$g_N^1(u^N) = g_1(x,t)|u^N|^{p_0(x)-2}u^N,\ h_N(u^N) =$$

$$= h(x,t)|u_t^N|^{p_1(x)-2}u_t^N,\ f_N^1 = f_1(x,t,u^N,v^N),$$

$$A_3(v^N) = -\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}^1(x,t)v_{x_i}^N)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n}A_i(x,t)v_{x_i}^N,$$

$$B_2(u^N) = -\sum_{i,j=1}^{n}(c_{ij}(x,t)u_{x_i}^N)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n}B_i(x,t)u_{x_i}^N,$$

$$g_N^2(v^N) = g_2(x,t)|v^N|^{q(x)-2}v^N,\ f_N^2 = f_2(x,t,u^N,v^N).$$

Тогда (8), (9) можно записать как

$$u_{tt}^N + P_N A_1(u_t^N) + P_N A_2(u^N) +$$

$$+ P_N B_1(v^N) + P_N g_N^1(u^N) + P_N h_N(u^N) - f_N^1 = 0,$$

$$v_t^N + P_N A_3(v^N) + P_N B_2(u^N) + P_N g_N^2(v^N) - f_N^2 = 0.$$

Из оценок (15)-(17) имеем, что $A_1(u_t^N)$, $A_2(u^N)$, $A_3(v^N)$, $B_1(v^N)$, $B_2(u^N)$ ограничены в пространстве $L^2((0,T);H^{-s}(\Omega^R))$. Кроме этого,

$$||g_N^1(u^N)||_{L^2((0,T);H^{-s}(\Omega^R))} + ||h_N^1(u_t^N)||_{L^{\overline{p}_1{}'}((0,T);H^{-s}(\Omega^R))} +$$

$$+ ||g_N^2(v^N)||_{L^{\overline{q}'}((0,T);H^{-s}(\Omega^R))} \le \widetilde{M}_1,$$

$$||f_N^1||_{L^2((0,T);H^{-s}(\Omega^R))} + ||f_N^2||_{L^2((0,T);H^{-s}(\Omega^R))} \le \widetilde{M}_2,$$

где константы $\widetilde{M_1}$, $\widetilde{M_2}$ не зависят от N, а $\overline{p}_1{}'(x) = \operatorname{ess}\inf\limits_{\Omega} p_1{}'(x)$, $\overline{q}\,' = \operatorname{ess}\inf\limits_{\Omega} q'(x)$. Следовательно,

$$||u_{tt}^N||_{L^{r_0}((0,T);H^{-s}(\Omega^R))} \le M_3, \;\; r_0 = \min\{2, \overline{p}_1{}'\},$$

$$||v_t^N||_{L^{r_1}((0,T);H^{-s}(\Omega^R))} \le M_3, \;\; r_1 = \min\{2, \overline{q}\,'\},$$

и константа M_3 не зависит от N. Тогда в силу теоремы 5.1 ([10], с.70) существует подпоследовательность последовательности $\{u^N\}_{N\in\mathbb{N}}$ (обозначения оставим прежние) для которой

$$u_t^N \to u_t^R \text{ сильно в } L^2(Q_\tau^R) \text{ и почти всюду в } Q_\tau^R,$$

$$v^N \to v^R \text{ сильно в } L^2(Q_\tau^R) \text{ и почти всюду в } Q_\tau^R.$$

Поэтому

$$\left|u_t^N\right|^{p_1(x)-2} u_t^N \to \left|u_t^R\right|^{p_1(x)-2} u_t^R \text{ почти всюду в } \quad Q_\tau,$$

$$\left|v^N\right|^{q(x)-2} v^N \to \left|v^R\right|^{q(x)-2} v^R \text{ почти всюду в } \quad Q_\tau \text{ при } N \to \infty$$

и ввиду леммы 1.3 ([10], с. 25) $\chi_1 = |u^R|^{p_0(x)-2}u^R$, $\chi_2 = |u_t^R|^{p_1(x)-2}u_t^R$, $\mu = |v^R|^{q(x)}v^R$ почти всюду в Q_τ, $\tau \in (0,T]$. Кроме этого, лемма 1.2 ([10], с. 20) гарантирует, что $u^R \in C([0,T]; H^{-s}(\Omega^R))$, $u_t^R, v^R \in C([0,T]; H^{-s}(\Omega^R))$, а поэтому начальные условия (5) имеют смысл.

Покажем, что $(u^R, v^R)-$ обобщенное решение задачи (4)-(6). Для этого рассмотрим следующее множества функций:

$$\mathfrak{M} = \bigcup\nolimits_{N=1}^{\infty} \mathfrak{M}_N,$$
$$\text{где } \mathfrak{M}_N = \{\eta^N : \; \eta^N(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^N d_k^N(t)\varphi^k(x), \; d_k^N \in C^1([0,T])\}$$

$$\widetilde{\mathfrak{M}} = \bigcup\nolimits_{N=1}^{\infty} \widetilde{\mathfrak{M}}_N,$$
$$\text{где } \widetilde{\mathfrak{M}}_N = \{\widetilde{\eta}^N : \; \widetilde{\eta}^N(x,t) = \sum\nolimits_{k=1}^N \widetilde{d}_k^N(t)\psi^k(x), \; \widetilde{d}_k^N \in C^1([0,T])\}.$$

Умножим равенства (8), (9) на d_k^N, $\widetilde{d}_k^N$ соответственно, просуммируем по k от 1 до N и проинтегрируем по t от 0 до τ, $\tau \in (0,T]$. Тогда, учитывая произвольность $\tau \in (0,T]$ и плотность множеств $\mathfrak{M}$, $\widetilde{\mathfrak{M}}$ в пространстве $V(Q_T^R)$ ([5]), получим равенства

$$\int\limits_{\Omega_T^R} u_t^N w\,dx - \int\limits_{\Omega_0^R} u_1^N(x) w\,dx + \int\limits_{Q_T^R} \Big[-u_t^N w_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u_{tx_i}^N w_{x_j} +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t) u_{x_i}^N w_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^1(x,t) v_{x_i}^N w_{x_j} + \sum_{i=1}^n C_i(x,t) u_{x_i}^N w +$$
$$+ C_0(x,t) u_t^N w + \textstyle\sum_{i=1}^n C_i^1(x,t) v_{x_i}^N w + g_1(x,t)|u^N|^{p_0(x)-2} u^N w +$$
$$+ h(x,t)|u_t^N|^{p_1(x)-2} u_t^N w \Big]\,dx\,dt = \int\limits_{Q_T^R} f_1(x,t,u^N,v^N) w\,dx\,dt,$$

$$\int\limits_{\Omega_T^R} v^N \tilde{w}\,dx - \int\limits_{\Omega_0^R} v_0^N(x) \tilde{w}\,dx + \int\limits_{Q_T^R} \Big[-v^N \tilde{w}_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^1(x,t) v_{x_i}^N \tilde{w}_{x_j} +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x,t) u_{x_i}^N \tilde{w}_{x_j} + \sum_{i=1}^n A_i(x,t) v_{x_i}^N \tilde{w} + \sum_{i=1}^n B_i(x,t) u_{x_i}^N \tilde{w} +$$
$$+ g_2(x,t)|v^N|^{q(x)-2} v^N \tilde{w} \Big]\,dx\,dt = \int\limits_{Q_T^R} f_2(x,t,u^N,v^N) \tilde{w}\,dx\,dt,$$

для любых $w, \tilde{w} \in V((Q_T^R)),\ w_t, \tilde{w}_t \in L^2(Q_T^R)$.
В последней системе интегральных равенств переходим к границе, когда $N \to \infty$. Получаем, что пара граничных функций (u^R, v^R) удовлетворяет определение 1.

Единственность найденного решения докажем используя метод от противного. Предположим, что задача (4)-(6) имеет два разных решения: (u^1, v^1) та (u^2, v^2). Тогда для пары функций $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$, где $\widetilde{u} = u^1 - u^2$, $\widetilde{v} = v^1 - v^2$, имеют место равенства

$$\int\limits_{\Omega_T^R} \widetilde{u}_t w\,dx + \int\limits_{Q_T^R} \Big[-\widetilde{u}_t w_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \widetilde{u}_{tx_i} w_{x_j} + +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t) \widetilde{u}_{x_i} w_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^1(x,t) \widetilde{v}_{x_i} w_{x_j} + \sum_{i=1}^n C_i(x,t) \widetilde{u}_{x_i} w +$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+C_0(x,t)\widetilde{u}_t w+\sum_{i=1}^{n} C_i^1(x,t)\widetilde{v}_{x_i} w+\\
&+g_1(x,t)(|u^1|^{p_0(x)-2}u^1-|u^2|^{p_0(x)-2}u^2)w+\\
&+h(x,t)(|u_t^1|^{p_1(x)-2}u_t^1-|u_t^2|^{p_1(x)-2}u_t^2)w\Bigg]\,dx\,dt=\\
&=\int\limits_{Q_T^R}(f_1(x,t,u^1,v^1)-f_1(x,t,u^2,v^2))w\,dx\,dt,
\end{aligned}\right. \tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega_T^R}\widetilde{v}\tilde{w}\,dx+\int\limits_{Q_T^R}\Bigg[-\widetilde{v}\tilde{w}_t+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^1(x,t)\widetilde{v}_{x_i}\tilde{w}_{x_j}+\\
&+\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}(x,t)\widetilde{u}_{x_i}\tilde{w}_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}A_i(x,t)\widetilde{v}_{x_i}\tilde{w}+\sum_{i=1}^{n}B_i(x,t)\widetilde{u}_{x_i}\tilde{w}+\\
&+g_2(x,t)(|v^1|^{q(x)-2}v^1-|v^2|^{q(x)-2}v^2)\tilde{w}\Bigg]\,dx\,dt\;=\\
&=\int\limits_{Q_T^R}(f_2(x,t,u^1,v^1)-f_2(x,t,u^2,v^2))\tilde{w}\,dx\,dt
\end{aligned} \tag{19}
$$

с произвольными $w,\tilde{w}\in V,\ w_t,\tilde{w}_t\in L^2(Q_T^R)$.

Положим в (18) $w=\widetilde{u}_t e^{-\eta t}$, а в (19) $\tilde{w}=\widetilde{v}e^{-\eta t}$. Тогда оценки первых восьми слагаемых равенства (18), а также оценки первых шести слагаемых равенства (19) аналогичные оценкам для равенств (12), (13). Кроме этого,

$$
\int\limits_{Q_T^R}h(x,t)(|u_t^1|^{p_1(x)-2}u_t^1-|u_t^2|^{p_1(x)-2}u_t^2)(u_t^1-u_t^2)\,dx\,dt\ge 0;
$$

$$
\int\limits_{Q_T^R}g_2(x,t)(|v^1|^{q(x)-2}v^1-|v^2|^{q(x)-2}v^2)(v^1-v^2)\,dx\,dt\;\ge 0;
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{I}_9\equiv&\int\limits_{Q_T^R}g_1(x,t)(|u^1|^{p_0(x)-2}\,u^1-|u^2|^{p_0(x)-2}\,u^2)\,(u_t^1-u_t^2)\,e^{-\eta t}dx\,dt\le\\
&\le C(R)(\widehat{p}_0-1)\int\limits_{Q_T^R}|\widetilde{u}|(|u^1|^{p_0(x)-2}+|u^2|^{p_0(x)-2})|\widetilde{u}_t|\,e^{-\eta t}\,dx\,dt\le\\
&\le C(R)(\widehat{p}_0-1)\,r_p\int\limits_0^T||\,|u^1|^{p_0(x)-2}+|u^2|^{p_0(x)-2};L^{r_1}(\Omega^R)||\times
\end{aligned}
$$

$$\times \, ||\widetilde{u}; L^{r_2}(\Omega^R)|| \cdot ||\widetilde{u}_t; L^2(\Omega^R)|| \, e^{-\eta t} \, dt,$$

где числа $r_1 > 1,\ r_2 > 1$ выбираем с условий

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{2},\, 1 < r_1(p_0(x) - 2) \leq \frac{2n}{n-2} - \varepsilon,$$

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{n-1}\right),\ 1 < r_2 \leq \frac{2n}{n-2}.$$

Тогда, в силу теоремы 2.8 ([1]) и теорем вложения ([8], с. 47), получаем

$$\mathfrak{I}_9 \geq -\frac{\widetilde{C}}{2} \int\limits_{Q_T^R} \left[|\widetilde{u}_t|^2 + |\nabla \widetilde{u}|^2 \right] e^{-\eta t} dx \, dt.$$

Условие **(F)** гарантирует существование таких чисел $L_i > 0$, что

$$|f_i(x,t,u^1,v^1) - f_i(x,t,u^2,v^2)| \leq L_i(|\widetilde{u}| + |\widetilde{v}|), \quad i = 1, 2.$$

Поэтому из равенств (18), (19) получаем оценку

$$\int\limits_{\Omega_T^R} \left[|\widetilde{u}_t|^2 + |\widetilde{v}|^2 \right] e^{-\eta T} dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_T^R} \left[|\nabla \widetilde{u}_t|^2 + |\widetilde{u}_t|^2 + |\nabla \widetilde{u}|^2 + |\nabla \widetilde{v}|^2 + |\widetilde{v}|^2 \right] e^{-\eta t} dx \, dt \leq 0,$$

которая означает, что $\widetilde{u} = 0,\ \widetilde{v} = 0$. Теорему доказано.

3. Доказательство основного результата.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты системы (1), (2) удовлетворяют условиям* ***(A)****,* ***(B)****,* ***(C)****,* ***(GH)****,* ***(PQ)****,* ***(F)****, выполнены условия 1), 2) теоремы 1 и* $u_0 \in H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}) \cap L^{p_0(x)}_{loc}(\overline{\Omega})$*,* $u_1 \in L^2_{loc}(\overline{\Omega}) \cap L^{p_1(x)}_{loc}(\overline{\Omega})$*,* $v_0 \in L^2_{loc}(\overline{\Omega}) \cap L^{q(x)}_{loc}(\overline{\Omega})$*. Тогда задача (1)-(3) имеет обобщенное решение. Если, кроме этого,* $\widehat{p}_0 \leq \dfrac{2n}{n-2} - \varepsilon$ *для* $n > 2$*, где* $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{n-1}\right)$*, и* $\widehat{p}_0$ *– любое конечное число в случае* $n \leq 2$*, тогда найденое решение будет единственным.*

Доказательство. На основании теоремы 1 для каждого $k \in \{1, 2, ..\}$ существует обобщенное решение (u^k, v^k) смешанной задачи (4)-(6), где $R \equiv k$. Продолжим функции u^k, v^k нулем в области $Q_T \setminus Q_T^k$. Рассмотрим последовательности $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{v^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, такие что

$$\int\limits_{\Omega_T} u_t^k w\,dx - \int\limits_{\Omega_0} u_1^k(x) w\,dx + \int\limits_{Q_T}\Bigg[-u_t^k w_t + \textstyle\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u_{tx_i}^k w_{x_j} + \\ + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t) u_{x_i}^k w_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^1(x,t) v_{x_i}^k w_{x_j} + \sum_{i=1}^n C_i(x,t) u_{x_i}^k w + \\ + C_0(x,t) u_t^k w + \textstyle\sum_{i=1}^n C_i^1(x,t) v_{x_i}^k w + g_1(x,t)|u^k|^{p_0(x)-2} u^k w + \\ + h(x,t)|u_t^k|^{p_1(x)-2} u_t^k w\Bigg]\,dx\,dt = \int\limits_{Q_T} f_1(x,t,u^k,v^k) w\,dx\,dt, \tag{20}$$

$$\int\limits_{\Omega_T} v^k \tilde{w}\,dx - \int\limits_{\Omega_0} v_0^k(x) \tilde{w}\,dx + \int\limits_{Q_T^k}\Bigg[-v^k \tilde{w}_t + \textstyle\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^1(x,t) v_{x_i}^k \tilde{w}_{x_j} + \\ + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x,t) u_{x_i}^k \tilde{w}_{x_j} + \sum_{i=1}^n A_i(x,t) v_{x_i}^k \tilde{w} + \sum_{i=1}^n B_i(x,t) u_{x_i}^k \tilde{w} + \\ + g_2(x,t)|v^k|^{q(x)-2} v^k \tilde{w}\Bigg]\,dx\,dt = \int\limits_{Q_T} f_2(x,t,u^k,v^k)\tilde{w}\,dx\,dt \tag{21}$$

для любых $w, \tilde{w} \in C^1([0,T]; C_0^\infty(\overline{\Omega}))$.

Зафиксируем произвольное $R \in \mathbb{N}$. Рассмотрим равенства (20), (21) для (u^k, v^k), (u^m, v^m), вычтем первое из второго и обозначим $u^{k,m} = u^k - u^m$, $v^{k,m} = v^k - v^m$. Пусть $w = u_t^{k,m}\varphi_R(x)\,e^{-\eta t}$, $\tilde{w} = v^{k,m}\varphi_R(x)\,e^{-\eta t}$, где $\varphi(x) = [h_R(x)]^\gamma$, $\gamma > 2$, $k, m > R$

$$h_R(x,t) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - |x|^2}{R^2}, & 0 \le |x| \le R, \\ 0, & |x| > R. \end{cases}$$

Тогда получим равенства

$$\int\limits_{\Omega_T} |u_t^{k,m}|^2 \varphi_R(x) e^{-\eta T}\,dx + \int\limits_{Q_T}[-u_t^{k,m}(u_{tt}^{k,m} - \eta u_t^{k,m})\varphi_R(x) +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u^{k,m}_{tx_i}[u^{k,m}_{tx_j}\varphi_R(x)+u^{k,m}_t\varphi_{R,x_j}(x)]+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)u^{k,m}_{x_i}[u^{k,m}_{tx_j}\varphi_R(x)+u^{k,m}_t\varphi_{R,x_j}(x)]+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n} b^1_{ij}(x,t)v^{k,m}_{x_i}[u^{k,m}_{tx_j}\varphi_R(x)+u^{k,m}_t\varphi_{R,x_j}(x)]+$$
$$+\sum_{i=1}^{n} C_i(x,t)u^{k,m}_{x_i}u^{k,m}_t\varphi_R(x)+C_0(x,t)|u^{k,m}_t|^2\varphi_R(x)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n} C^1_i(x,t)v^{k,m}_{x_i}u^{k,m}_t\varphi_R(x)+$$
$$+g_1(x,t)(|u^k|^{p_0(x)-2}u^k-|u^m|^{p_0(x)-2}u^m)(u^k_t-u^m_t)\varphi_R(x)+$$
$$\left.+h(x,t)(|u^k_t|^{p_1(x)-2}-|u^m_t|^{p_1(x)-2}u^m_t)(u^k_t-u^m_t)\varphi_R(x)\right]e^{-\eta t}\,dx\,dt=$$
$$=\int\limits_{Q_T}(f_1(x,t,u^k,v^k)-f_1(x,t,u^m,v^m))u^{k,m}_t\varphi_R(x)e^{-\eta t}\,dx\,dt, \qquad (22)$$

$$\int\limits_{\Omega_T}|v^{k,m}|^2\varphi_R(x)e^{-\eta T}\,dx+\int\limits_{Q_T}\left[-v^{k,m}(v^{k,m}_t-\eta v^{k,m})\varphi_R(x)+\right.$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n} a^1_{ij}(x,t)v^{k,m}_{x_i}[v^{k,m}_{x_i}\varphi_R(x)+v^{k,m}\varphi_{R,x_j}(x)]+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x,t)u^{k,m}_{x_i}[v^{k,m}_{x_i}\varphi_R(x)+v^{k,m}\varphi_{R,x_j}(x)]+$$
$$+\sum_{i=1}^{n} A_i(x,t)v^{k,m}_{x_i}v^{k,m}\varphi_R(x)+\sum_{i=1}^{n} B_i(x,t)u^{k,m}_{x_i}v^{k,m}\varphi_R(x)+$$
$$\left.+g_2(x,t)(|v^k|^{q(x)-2}v^k-|v^m|^{q(x)-2}v^m)(v^k-v^m)\varphi(x)e^{-\eta t}\right]e^{-\eta t}\,dx\,dt\ =$$
$$=\int\limits_{Q_T}(f_2(x,t,u^k,v^k)-f_2(x,t,u^m,v^m))v^{k,m}\varphi(x)e^{-\eta t}\,dx\,dt. \qquad (23)$$

Используя оценки, приведенные выше, неравенство Гельдера, а также несложные преобразования, из (22), (23) получаем оценку

$$\int\limits_{\Omega_T}\left[|u^{k,m}_t|^2+|\nabla u^{k,m}|^2+|v^{k,m}|^2\right]\varphi_R(x)e^{-\eta T}\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q_T}\Bigg[|\nabla u_t^{k,m}|^2+|u_t^{k,m}|^2+|\nabla u^{k,m}|^2+|u_t^{k,m}|^{p_1(x)}+|u^{k,m}|^{p_0(x)}+$$

$$+|\nabla v^{k,m}|^2+|v^{k,m}|^2+|v^{k,m}|^{q(x)}\Bigg]\varphi_R(x)e^{-\eta t}\,dx\,dt\ \le$$

$$\le \widetilde{C}\int\limits_{Q_T}\left([h_R(x)]^{\gamma-\frac{2\widehat{y}}{\overline{y}-2}}+[h_R(x)]^{\gamma-\frac{2\widehat{z}}{\overline{z}-2}}\right)\varphi(x)e^{-\eta t}\,dx\,dt, \tag{24}$$

где $\overline{y}=\operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} y(x)\le y(x)\le \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} y(x)=\widehat{y}<+\infty,\ \ y\in(2,p_1)$, $\overline{z}=\operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} z(x)\le z(x)\le \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} z(x)=\widehat{z}<+\infty,\ \ z\in(2,q)$ и константа $\widetilde{C}$ не зависит от R, k, m.

Пусть $R>R_0>1$. Тогда, учитывая то, что $R-|x|\le h_R(x)\le R+|x|$, из (25) получаем оценку

$$\int\limits_{\Omega_T^{R_0}}\Big[|u_t^{k,m}|^2+|\nabla u^{k,m}|^2+|v^{k,m}|^2\Big]\,dx+\int\limits_{Q_T^{R_0}}\Big[|\nabla u_t^{k,m}|^2+|u_t^{k,m}|^2+|\nabla u^{k,m}|^2+$$

$$+|u_t^{k,m}|^{p_1(x)}+|u^{k,m}|^{p_0(x)}+|\nabla v^{k,m}|^2+|v^{k,m}|^2+|v^{k,m}|^{q(x)}\Big]\,dx\,dt\ \le$$

$$\le \widetilde{C}_1\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\gamma}\left(R^{n-\frac{2\widehat{y}}{\overline{y}-2}}+R^{n-\frac{2\widehat{z}}{\overline{z}-2}}\right). \tag{25}$$

Из (25) следует фундаментальность последовательности $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ в пространствах

$$L^2(0,T;H_0^1(\Omega^{R_0}))\cap L^{p_0(x)}(Q_T^{R_0}),\ C([0,T];H_0^1(\Omega^{R_0})),$$

фундаментальность $\{u_t^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ в

$$L^2(0,T;H_0^1(\Omega^{R_0}))\cap L^{p_1(x)}(Q_T^{R_0}),\ C([0,T];L^2(\Omega^{R_0}))$$

и фундаментальность последовательности $\{v^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ в пространстве

$$L^2(0,T;H_0^1(\Omega^{R_0}))\cap L^{q(x)}(Q_T^{R_0}),$$

а также в $C([0,T];L^2(\Omega^{R_0}))$. Тогда пара функций (u,v), которая является пределом пары последовательностей $(\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}},\{v^k\}_{k\in\mathbb{N}})$ в соответствующих пространствах, будет решением задачи (1)-(3).

Пускай задача (1)-(3) имеет два обобщенных решения: (u^1, v^1) и (u^2, v^2). Тогда для пары функций $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$, где $\widetilde{u} = u^1 - u^2$, $\widetilde{v} = v^1 - v^2$, выполняется оценка (25), правая часть которой может быть сделанной как угодно малой. Учитывая это, а также и произвольность R_0, получаем, что $u^1 = u^2$ и $v^1 = v^2$ почти всюду в Q_T. Теорема доказана.

1. *Kováčik O., Rákosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ // Czechoslovak Math. J. – 1991. – Vol. 41 (116). – P. 592-618.
2. *Слепцова И. П., Шишков А. Е.* Смешанная задача для уравнения распространения возмущений в вязких средах в неограниченных областях // Докл. АНН УССР. Сер. А. - 1988.- №11. - С. 28-31.
3. *Слепцова И. П., Шишков А. Е.* Принцип Фрагмена-Линделефа для некоторых квазилинейных эволюционных уравнений второго порядка // Укр. матем. журнал.- 2005. - Т. 57, №2. - С. 239-249.
4. *Шишков А. Е., Слепцова И. П.* Классы единственности и разрешимости смешанных задач для некоторых эволюционных уравнений в неограниченных областях // Сиб. матем. журнал.- 1991. - Т. 32, №5. - С. 166-178.
5. *Бугрій О., Доманська Г., Процах Н.* Мішана задача для нелінійного рівняння третього порядку в узагальнених просторах Соболєва // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. - Вип. 64, - 2005. С. 44-61.
6. *Anthony W. Leung.* Asymptotically stable invariant manifold for coupled nonlinear parabolic-hyperbolic partial differential equations // Journal of Differential Equations – 2003. – Vol. 187. – P. 184-200.
7. *Paolo Albano, Daniel Tataru.* Carleman estimates and boundary observability for a coupled parabolic-hyperbolic system // Electronic Journal of Differential Equations – 2000. – Vol. 2000. – No. 22. – P. 1-15.
8. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.
9. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1958.
10. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 2002.

Львовский национальный университет
им. Ивана Франка,
ул. Университетская, 1,
79000, г. Львов, Украина
office@dndi-systema.lviv.ua

Получено 23.01.2007