УДК 517.5

©2016. **Д. А. Зарайский**

О МНОЖЕСТВАХ, НА КОТОРЫХ ФУНКЦИИ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО ШАРАМ ДОПУСКАЮТ ПРОИЗВОЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Доказано, что произвольная интегрируемая в квадрате функция, определенная на замкнутом множестве диаметра $\leqslant 2r$ отличном от шара радиуса r, продолжается до функции с нулевыми интегралами по шарам радиуса r, определенной на всем $\mathbb{R}^n$. Если внутренность множества содержит две точки, удаленные на расстояние $2r$, такое продолжение может не иметь места. Получен аналогичный результат для функций с нулевыми интегралами по сферам радиуса r.

Ключевые слова: *функции с нулевыми интегралами по шарам, периодичность в среднем.*

1. Введение. Пусть $B_r(a)$ – открытый шар радиуса r с центром в a в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Будем обозначать $V_r(U)$ множество всех локально интегрируемых функций, определенных на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса r, лежащим в U. По-другому класс V_r может быть определен как множество решений уравнения свертки:

$$V_r(\mathcal{U}) = \{ f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U}) : f * \chi_{B_r} = 0 \},$$

где χ_{B_r} – индикатор шара $B_r = B_r(0)$. Класс V_r изучался многими авторами, см., например, [1].

Пусть U – выпуклое открытое множество, не содержащее ни одного замкнутого шара радиуса r. В этом случае, по определению, $V_r(U)$ совпадает с $L_{\mathrm{loc}}(U)$. Тогда, согласно аппроксимационной теореме Хермандера –Мальгранжа, [2, т. 16.4.1], примененной к случаю уравнения $f * \chi_{B_r} = 0$, любая бесконечно дифференцируемая функция из $V_r(U)$ может быть аппроксимирована в $C^\infty(U)$ функциями из $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ (точнее, линейными комбинациями принадлежащих $V_r(\mathbb{R}^n)$ функций вида $e^{i\langle \cdot, y\rangle}$, $y \in \mathbb{R}^n$).

Отсюда с помощью сглаживания нетрудно вывести, что если A – компактное выпуклое множество, не содержащее ни одного шара радиуса r, то множество ограничений на A всех функций из $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L^p(A)$, $p \in [1, \infty)$.

В настоящей работе мы уточняем этот результат в следующем смысле: устанавливаем при каких условиях на выпуклое множество A для произвольной функции $f_A \in L^2(A)$ найдется $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ с нулевыми интегралами по всем шарам радиуса r, ограничение которой на множество A совпадает с f_A.

2. Формулировки основных результатов.

Теорема 1. *Пусть диаметр измеримого множества A не превосходит $2r$, $r > 0$, и функция f_A принадлежит $L^2(A)$. Если множество A является замкнутым шаром радиуса r, из которого выброшено множество лебеговой меры 0, то* *пусть, кроме того,*

$$\int_A f_A(x)\,dx = 0.$$

Тогда f_A продолжается до функции $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ с нулевыми интегралами по всем шарам радиуса r.

Дополнительное требование в условии теоремы в случае, когда A – шар, является, очевидно, необходимым. Для выпуклых множеств A положительной меры (последнее эквивалентно тому, что A не содержится ни в какой гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$) значение $2r$ в теореме 1 является точным, см. следствие 1 ниже.

Теорема 2. *Если внутренность измеримого множества содержит две точки, удаленные на расстояние $2r$, и a – середина отрезка, соединяющего эти точки, то существует непрерывная функция на A, не продолжаемая до функции из $V_r(B_{r+\varepsilon}(a))$ ни для какого $\varepsilon > 0$.*

Отметим, что, как следует из теоремы 2, возможна ситуация (например, если A – достаточно вытянутая фигура), когда множество ограничений на A всех функций из $\left(V_r \cap L^2_{\mathrm{loc}}\right)(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L^2(A)$, но не совпадает с ним.

Следствие 1. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ выпукло и не содержится ни в какой гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$. Тогда множество всех ограничений $f|_A$, где f пробегает пространство локально интегрируемых в квадрате функций на $\mathbb{R}^n$ с нулевыми интегралами по всем шарам радиуса r, совпадает с $L^2(A)$ тогда и только тогда, когда диаметр A не превосходит $2r$ и A не содержит ни одного шара $B_r(a)$, $a \in \mathbb{R}^n$.*

Имеет место аналогичный результат для класса локально интегрируемых функций с нулевыми интегралами по почти всем сферам радиуса r, лежащим в области определения функции (впервые такие функции рассматривались Ф. Йоном, [2]). Будем обозначать этот класс U_r. Он также может быть определен как множество решений уравнения свертки:

$$U_r(\mathcal{U}) = \{\, f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U}) : f * \mu_{S_r} = 0 \,\},$$

где μ_{S_r} – поверхностная мера сферы $S_r = \{|x| = r\}$.

Теорема 3. *Если диаметр измеримого множества A не превосходит $2r$, $r > 0$, то произвольная $f_A \in L^2(A)$ продолжается до функции из $\left(U_r \cap L^2_{\mathrm{loc}}\right)(\mathbb{R}^n)$.*

Если же внутренность множества A содержит две точки, удаленные на расстояние $2r$, и a – середина отрезка, соединяющего эти точки, то существует непрерывная функция на A, не продолжимая до функции из $U_r(B_{r+\varepsilon}(a))$.

Заметим, что в случае, когда A – замкнутый шар радиуса r, на функцию f_A не налагается никакого условия, аналогичного условию равенства нулю интеграла f_A в теореме 1.

Следствие 2. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ выпукло и не содержится ни в какой гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$. Тогда множество всех ограничений $f|_A$, где f пробегает пространство $\left(U_r \cap L^2_{\mathrm{loc}}\right)(\mathbb{R}^n)$, совпадает с $L^2(A)$ тогда и только тогда, когда диаметр A не превосходит $2r$.*

3. Некоторые вспомогательные утверждения. Нам потребуются распределения $\chi_+^s \in D'(\mathbb{R})$, однородные степени $s \in \mathbb{C}$, определяемые формулой $\chi_+^s = x_+^s/\Gamma(s+1)$ ($x_+^s = x^s$ при $x \geqslant 0$, и $x_+^s = 0$ при $x < 0$, Γ – гамма-функция) при $\operatorname{Re} s > -1$ и аналитическим продолжением по s для остальных значений s. Как известно, $\chi_+^p * \chi_+^q = \chi_+^{p+q+1}$, $\chi_+^s{}' = \chi_+^{s-1}$, $x\chi_+^s(x) = (s+1)\chi_+^{s+1}(x)$, $\chi_+^{(-1-j)} = \delta_0^{(j)}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, где δ_0 – дельта-функция Дирака [3, § 3.2] Обозначим также $x_+^s = \Gamma(s+1)\chi_+^s$ при $s \in \mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$, $\chi_-^s = \check{\chi}_+^s$, $x_-^s = \check{x}_+^s$, $H = ((x+i0)^{-1} + (x-i0)^{-1})/2$ – распределение Гильберта.

Положим для удобства при $j \in \mathbb{Z}$

$$H_j = H^{(-j-1)} \text{ при } j \leqslant -1 \text{ и } H_j(x) = \frac{x^j}{j!} \ln|x| \text{ при } j \in \mathbb{Z}_+,$$

тогда $H_j' \equiv H_{j-1} \pmod{C^\infty(\mathbb{R})}$; $xH_j(x) = (j+1)H_{j+1}(x)$, $j \neq -1$, $xH_{-1} = 1$.

Если $q \notin \mathbb{Z}$, то, как нетрудно видеть,

$$\chi_+^p * (\psi\chi_-^q) \equiv c_1\chi_+^{p+q+1} + c_2\chi_-^{p+q+1} \pmod{C^\infty(\mathbb{R})} \text{ при } p+q \notin \mathbb{Z}, \tag{1}$$

$$\chi_+^p * (\psi\chi_-^q) \equiv c_1\chi_+^{p+q+1} + c_2 H_{p+q+1} \pmod{C^\infty(\mathbb{R})} \text{ при } p+q \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

где $c_1 = c_1(p,q)$, $c_2 = c_2(p,q)$, константы c_1, c_2 не зависят от срезающей функции $\psi \in D(\mathbb{R})$, равной 1 в окрестности 0, и $c_2 \neq 0$, т.к. $(\psi\chi_+^{-2-p}) * \chi_+^p * (\psi\chi_-^q) \equiv \chi_-^q \not\equiv c_1\chi_+^q \pmod{C^\infty(\mathbb{R})}$ при $q \notin \mathbb{Z}$.

Заметим, что $\chi_+^s \in C^m \Leftrightarrow \operatorname{Re} s > m$, $H_j \in C^m \Leftrightarrow j > m$. Кроме того, при $s \leqslant m$, $s \notin \mathbb{Z}$ распределения χ_+^{s-j}, χ_-^{s-j}, $j \in \mathbb{Z}_+$ (а также распределения χ_+^{m-j}, H_{m-j}, $j \in \mathbb{Z}_+$) линейно независимы $\operatorname{mod} C^m(\mathbb{R})$. Поэтому, если $s \notin \mathbb{Z}$, для того, чтобы распределение f на интервале $(\alpha,\beta) \ni 0$ имело вид

$$f \equiv a(\cdot)x_+^s + b(\cdot)x_-^s \pmod{C^\infty(\alpha,\beta)} \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы для сколь угодно больших $N \in \mathbb{N}$ имело место сравнение $f \equiv \sum_{j=0}^{[N-s]}(a_j\chi_+^{s+j} + b_j\chi_-^{s+j}) \pmod{C^N(\alpha,\beta)}$; если все $b_j = 0$, то и $b(\cdot)$ в (3) можно выбрать нулевой. Необходимость следует из разложения $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ по формуле Тейлора в нуле, достаточность – из существования для произвольных $\{a_j\}$, $\{b_j\}$ функций $a(\cdot)$, $b(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R})$, для которых $a^{(j)}(0) = a_j j!/\Gamma(s+j+1)$, $b^{(j)}(0) = (-1)^j b_j j!/\Gamma(s+j+1)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, [3, т. 1.2.6]. Аналогично, если $s \in \mathbb{Z}$, то

$$f \equiv \Big(\sum_{j=0}^{-s-1} a_j\delta_0^{(-s-1-j)} + a(\cdot)x_+^{\max\{s,0\}} + \\ + \sum_{j=0}^{-s-1} b_j H^{(-s-1-j)} + b(x)x^{\max\{s,0\}}\ln|x|\Big) \pmod{C^\infty(\alpha,\beta)}, \tag{4}$$

тогда и только тогда, когда $f \equiv \sum_{j=0}^{[N-s]}(a_j\chi_+^{s+j}+b_jH_{s+j}) \pmod{C^N(\alpha,\beta)}$ для сколь угодно больших $N\in\mathbb{N}$; если $b_j=0$, $j\in\mathbb{Z}_+$, то в (4) можно взять $b(\cdot)=0$.

Лемма 1. *Существует и единственно распределение $K\in D'(\mathbb{R}^n)$, равное $\delta_0-\dfrac{1}{\operatorname{mes}B_r}$ на шаре B_{2r} и удовлетворяющее уравнению свертки $K*\chi_{B_r}=0$.*

Для произвольной функции $f_0\in L^2(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем свертка f_0*K принадлежит $(L^2_{\mathrm{loc}}\cap V_r)(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Такое распределение K построено в [4, леммы 3, 4] (единственность вытекает из теоремы единственности для уравнения свертки). Для $f_0\in L^2(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем $(f_0*K)*\chi_{B_r}=f_0*(K*\chi_{B_r})=0$, поэтому достаточно доказать принадлежность f_0*K пространству $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Вне начала координат $K|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}=u(|x|)$ (здесь $u(|x|)$ понимается как обратный образ ρ^*u распределения u при отображении $\rho(x)=|x|$), где $u\in D'\big((0,\infty)\big)$ принадлежит C^∞ на $(0,\infty)\setminus 2r\mathbb{Z}$ и в окрестности точки $2rl$, $l\in\mathbb{N}$ распределение u имеет следующий вид, [4, лемма 4]:

$$u=\tau_{2lr}\Big(\sum_{j=0}^{(n-1)/2}a_{l,j}\delta_0^{((n-1)/2-j)}+a_l(\cdot)\chi_+^0+c_l(\cdot)\Big), a_l,c_l\in C^\infty, \text{ если } n \text{ четно},$$

$$u=\tau_{2lr}(a_l(\cdot)\chi_+^{-(n+1)/2}+b_l(\cdot)\chi_-^{-(n+1)/2}+c_l(\cdot)), a_l,b_l,c_l\in C^\infty, \text{ если } n \text{ нечетно},$$

откуда с учетом нижеследующего вытекает, что $f_0*K\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. □

Лемма 2. *Пусть $s\geqslant-(n+1)/2$, $a>0$, $\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\psi\subset(-a,a)$, тогда преобразование Фурье распределений $\rho^*\tau_a(\psi\chi_\pm^s)$ ограниченны: $(\rho^*\tau_a(\psi\chi_\pm^s))^\wedge\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. См., например, [4, лемма 5]. □

Лемма 3. *Существует и единственно распределение $K\in D'(\mathbb{R}^n)$, равное δ_0 на шаре B_{2r} и удовлетворяющее уравнению свертки $K*\mu_{S_r}=0$. Для произвольной функции $f_0\in L^2(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем свертка f_0*K принадлежит $(L^2_{\mathrm{loc}}\cap U_r)(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Построение K следует той же схеме, что построение аналогичного распределения для класса V_r в леммах 3 и 4 работы [4].

Пусть T – прямой образ распределения μ_{S_r} при отображении $\mathrm{pr}_1=\langle\cdot,\boldsymbol{e}_1\rangle$. При $m\geqslant 2$, $T(t)=C(1-|t|^2)^{(n-3)/2}$.

Для распределения $F_0\in D'(\mathbb{R})$, задаваемого следующим образом

$$F_0=\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2^{n-1}\pi^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\delta_0^{(n-1)}, \text{ если } n \text{ нечетно}, \tag{5}$$

$$F_0=\frac{(-1)^{(n-2)/2}}{2^{n-1}\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}H^{(n-1)}, \text{ если } n \text{ четно}, \tag{6}$$

имеет место равенство $(F_0(\langle\cdot,\boldsymbol{e}_1\rangle))^\natural=\delta_0$, см., например, [6, гл. II, § 11].

Поскольку $\delta_0*\mu_{S_r}=\mu_{S_r}=0$ на B_r и F четно, отсюда вытекает, что $F_0*T=0$ на $(-r,r)$. Пусть $\psi\in D(\mathbb{R})$ – четная функция, равная 1 в окрестности отрезка $[-r,r]$. Тогда распределение $(\psi F_0)*T$ четно и равно 0 в окрестности 0, поэтому $(\psi F_0)*T=G^\natural=(G+\check{G})/2$, для некоторого $G\in D'(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}G\subset(0,\infty)$.

Согласно [5, Л. 2], распределение T имеет фундаментальное решение E с носителем содержащимся в $[r,\infty)$, гладкое на $\mathbb{R}\setminus(2r\mathbb{Z}_+ +1)$, такое, что $E(\cdot-(2rk+1))$ имеет вид (3) с $s=-(n+1)/2$.

Распределение $F=\psi F_0-(G*E)^\natural$ удовлетворяет уравнению $F*T=0$ на всей вещественной оси и совпадает с F_0 в окрестности отрезка $[-r,r]$. Поэтому для распределения $K=(F(\langle\cdot,\boldsymbol{e}_1\rangle))^\natural\in D'(\mathbb{R}^n)$ имеем: $K*\mu_{S_r}=0$ и $K=\delta_0$ в окрестности замкнутого шара $\overline{B}_r$. Поскольку $\delta_0*\mu_{S_r}=0$ на B_r, по теореме единственности отсюда следует, что $K=\delta_0$ на B_{2r}. Кроме того, очевидно, F гладко вне $2r\mathbb{Z}$ и в точках $2rk$, $k\in\mathbb{Z}$, имеет вид (4) с $s=-n$. Поэтому вне начала координат $K=u(|x|)$, где распределение $u\in D'\big((0,\infty)\big)$ гладко на $(0,\infty)\setminus2r\mathbb{N}$ и $u(\cdot-2kr)$, $k\in\mathbb{N}$, имеет вид (3) с $s=-(n+1)/2$ (см. [5, лемма 1]). Последнее утверждение доказываемой леммы следует теперь из леммы 2. $\square$

4. Доказательства основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим сначала случай, когда A – замкнутое выпуклое множество. При этом предположении, за исключением случая, когда A содержится в некоторой гиперплоскости, в котором утверждение теоремы тривиально, A отличается от своей внутренности $\mathring{A}$ на множество меры 0.

Пусть $g\in L^2(A)$, продолжим g до функции $g_0\in L^2(\mathbb{R}^n)$ нулем вне множества A и положим $g_1=g_0-\int_A g_0(x)\,dx/\operatorname{mes}B_r$, и возьмем K из леммы 1. Поскольку K совпадает с $\delta_0-1/\operatorname{mes}B_r$ на B_{2r},

$$\operatorname{supp}(g_0*K-g_1)=\operatorname{supp}(g_0*(K-\delta_0+1/\operatorname{mes}B_r))\subset\operatorname{supp}g_0+(\mathbb{R}^n\setminus B_{2r}).\qquad(7)$$

Но, так как диаметр множества A не превосходит $2r$, правая часть (7) содержится в дополнении к $\mathring{A}$, и потому g_0*K совпадает с $g-\int_A g(x)\,dx/\operatorname{mes}B_r$ на $\mathring{A}$. Поэтому, если $\int_A g(x)\,dx=0$, g продолжается до функции из $(L^2_{\mathrm{loc}}\cap V_r)(\mathbb{R}^n)$.

Беря же в качестве g постоянную функцию, имеем: $\chi_A*K=1-\operatorname{mes}A/\operatorname{mes}B_r$ на $\mathring{A}$. Согласно изодиаметрическому неравенству Бибербаха (см., например, [7, Сл. 2.10.33], [8, § 9.13]), лебегова мера измеримого множества A диаметра $\leqslant 2r$ не превосходит $\operatorname{mes}B_r$. Кроме того, известно, что для замкнутых выпуклых множеств равенство достигается только в случае, когда A – замкнутый шар радиуса r, [9, § 6.1]. Поэтому, если A не является шаром радиуса r, функция χ_A*K совпадает с ненулевой постоянной на $\mathring{A}$, и, значит, в этом случае любая функция $f_A\in L^2(A)$, являясь суммой функции, имеющей нулевой интеграл, и постоянной, продолжается до функции из $(L^2_{\mathrm{loc}}\cap V_r)(\mathbb{R}^n)$.

Поскольку замкнутая выпуклая оболочка множества имеет диаметр, равный диаметру исходного множества, случай произвольного измеримого множества A диаметра $\leqslant 2r$ сводится к уже рассмотренному, необходимо заметить только, что, если эта оболочка есть $\overline{B}_r(a)$ и $\operatorname{mes}(\overline{B}_r(a) \setminus A) > 0$, произвольную $f_A \in L^2(A)$ можно продолжить до функции $f_{\overline{B}_r(a)} \in L^2(\overline{B}_r(a))$, имеющей нулевой интеграл. $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть $x = a - y$, $x' = a + y$ – точки из условия теоремы, $|y| = r$. Возьмем в качестве f_A непрерывную функцию с носителем, содержащемся в пересечении внутренности множества A и шара $B_r(x')$, такую, что пара (x', y) принадлежит $WF(f_A)$ – гладкому волновому фронту функции f_A.

Предположим, что $f \in V_r(B_{r+\varepsilon}(a))$ совпадает с f_A на $A \cap B_{r+\varepsilon}(a)$. Тогда, так как x, x' принадлежат внутренности $A \cap B_{r+\varepsilon}(a)$, то $(x, y), (x, -y) \notin WF(f)$ (т.к. f равна 0 в окрестности x). По лемме 3 работы [10] отсюда вытекает, что $(x', y) \notin$ $\notin WF(f)$, что невозможно, поскольку f совпадает с f_A в окрестности точки x'. $\square$

Отметим, что как видно из доказательства, продолжение невозможно даже в смысле теории распределений: не существует распределения $f \in D'(B_{r+\varepsilon}(a))$ удовлетворяющего уравнению свертки $V_r(U) = \{\, f \in L_{\mathrm{loc}}(U) : f * \chi_{B_r} = 0 \,\}$ и совпадающего с построенной f_A в окрестностях точек x и x'.

Доказательство следствия 1. Если теперь диаметр A не превосходит $2r$, то применима теорема 1. Пусть теперь диаметр множества A больше $2r$. Тогда в нем найдутся точки x' и x'', удаленные больше чем на $2r$. Будем считать, что множество A не содержится ни в какой гиперплоскости (в противном же случае наше утверждение тривиально). Тогда A содержит некоторый открытый шар $B_\varepsilon(y)$, и в силу выпуклости A, оно содержит также шары $B_{(1-\lambda)\varepsilon}(\lambda x' + (1-\lambda)y)$ и $B_{(1-\lambda)\varepsilon}(\lambda x'' + (1-\lambda)y)$, где $\lambda = 2r/|x'' - x'|$, центры которых находятся на расстоянии $2r$, и потому удовлетворяет условиям теоремы 2. $\square$

Доказательство теоремы 3. Первое утверждение теоремы, так же как и в теореме 1, достаточно доказать в предположении, что A – выпуклое замкнутое множество. Произвольную $g \in L^2(A)$ можно продолжить g до функции $g_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ нулем вне множества A.

Тогда для K из из леммы 3, т. к. $K = \delta_0$ на B_{2r},

$$\operatorname{supp}(g_0 * K - g_0) = \operatorname{supp}(g_0 * (K - \delta_0)) \subset \operatorname{supp} g_0 + (\mathbb{R}^n \setminus B_{2r}).$$

Поэтому, если диаметр A не превосходит $2r$, $g_0 * K \in (L^2_{\mathrm{loc}} \cap U_r)(\mathbb{R}^n)$ совпадает с g на $\mathring{A}$.

Второе утверждение теоремы доказывается так же как и теорема 2, только вместо леммы 3 работы [10] нужно воспользоваться аналогично доказываемым утверждением для классов U_r, либо же применить результат [11] для аналитических (а не гладких, как в указанной лемме) волновых фронтов и интегралов по геодезическим сферам. $\square$

Следствие 2 доказывается совершенно аналогично следствию 1.

1. *Volchkov V.V.* Integral geometry and convolution equations. – Dordrecht: Kluwer Academic, 2003. – 454 p.
2. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. – М.: ИЛ, 1958. – 159с.

3. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. – **1**. – М.: Мир, 1986. – 464 с.
4. *Зарайский Д.А.* О продолжении функций с нулевыми интегралами по шарам // Труды ИПММ НАН Украины. – 2007. – **14**. – С. 83–88.
5. *Зарайский Д.А.* Уточнение теоремы единственности для решений уравнения свертки // Труды ИПММ НАН Украины. – 2006. – **12**. – С. 69–75.
6. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
7. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987. – 760 с.
8. *Берже М.* Геометрия. – **1**. – М.: Мир, 1984. – 560 с.
9. *Eggleston H.G.* Convexity. – London: CUP, 1958. – viii+136 p.
10. *Зарайский Д.А.* Теорема единственности для функций с нулевыми интегралами по шарам // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – **25**. – С. 77–83.
11. *Quinto E.T.* Pompeiu transforms on geodesic spheres in real analytic manifolds // Isr. J. Math. – 1993. – **84**. – P. 353–363.

D. A. Zaraisky

On sets on which function with zero integrals over balls allow an arbitrary behaviour.

It is proved that an arbitrary square-integrable function defined on an closed set of diameter $\leqslant 2r$, which is distinct from ball of radius r, continues to locally square-integrable function with zero integrals over balls of radius r defined on the whole $\mathbb{R}^n$. If internal of the set contains two point at the distance $2r$ such continuation may not occur. An analogous result for functions with zero integrals over spheres of radius r is obtained.

Keywords: *functions with zero integrals over balls, mean periodicity.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
d.zaraisky@gmail.com

Получено 12.06.16