

УДК 539.3:534.1

©2015. И. А. Моисеенко

СПЕКТРЫ НОРМАЛЬНЫХ УПРУГИХ ВОЛН В ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ ВОЛНОВОДАХ СЕКТОРНОГО СЕЧЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛЬНО- ГРАДИЕНТНОЙ РАДИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

В данной работе исследуется проблема построения решения для задачи распространения нормальных волн в радиально неоднородных трансверсально изотропных цилиндрах секторного поперечного сечения. Модули упругости и плотность задаются экспоненциально-степенной функцией от радиальной координаты. Для компонент вектора перемещений и тензора напряжений получены разложения в равномерно и абсолютно сходящиеся ряды по радиальной координате. Получены также дисперсионные соотношения, описывающие спектры гармоник симметричных и антисимметричных нормальных волн в радиально неоднородном цилиндрическом волноводе с идеально гибким нерастяжимым мембранным покрытием граничной поверхности секторного выреза и свободным или жестко закрепленным цилиндрическим участком боковой поверхности. Изучены эффекты влияния параметров радиальной неоднородности и угловой меры секторного выреза на топологию дисперсионных спектров и распределение фазовых скоростей распространяющихся нормальных волн.

Ключевые слова: цилиндрический волновод, секторное сечение, нормальные волны, функционально-градиентный, трансверсально-изотропный, дисперсионное уравнение.

Введение. Задачи динамики деформируемых сред, связанные с проблемами получения дисперсионных спектров нормальных упругих волн в цилиндрических телах с варьируемыми геометрией и физико-механическими свойствами приобретают все большую актуальность в связи с появлением новых приложений в ультразвуковой дефектоскопии и акустоэлектронике. Одним из направлений анализа указанного класса задач является поиск возможностей целенаправленного изменения структуры спектра.

Вопросы теоретического и численно-аналитического исследования эффектов влияния фактора наличия в трансверсально-изотропном цилиндрическом волноводе кругового и кольцевого сечения секторного выреза варьируемой угловой меры с нанесенным на участки границы секторного выреза идеально гибким нерастяжимым мембранным покрытием, рассматривались в работах [1–3]. Влияние радиальной функционально-градиентной неоднородности анизотропных материалов цилиндрических волноводов на характеристики дисперсионных спектров распространяющихся нормальных волн применительно к осесимметричным волнам продольно-сдвигового и крутильного типа в трансверсально-изотропных цилиндрах кругового и кольцевого сечения рассматривались в работах [4–6]. В данной работе методика построения и исследования дисперсионных соотношений для нормальных волн в цилиндрах из трансверсально-изотропных материалов с функционально-градиентной радиальной неоднородностью распространена на случай наличия секторного выреза, участки границы которого покрыты идеально гибкой нерастяжимой мембраной.

1. Постановка задачи. Рассматривается протяженный трансверсально-изотропный цилиндрический волновод радиуса R , в поперечном сечении которого имеется секторный вырез произвольной угловой меры. Волновод занимает в отнесенных к нормирующему параметру $R_* = R$ безразмерных цилиндрических координатах область

$$V = \{r \in [0, 1], \theta \in [-\alpha, \alpha], z \in (-\infty, \infty)\}.$$

Задача анализа спектров нормальных упругих волн вдоль рассматриваемого волновода формулируется с использованием соотношений пространственной линейной математической модели динамического напряженно-деформированного состояния упругих тел с усложненными физико-механическими свойствами в системе нормированных безразмерных цилиндрических координат. Данные соотношения формулируются для проекций безразмерного вектора динамических упругих волновых перемещений на оси цилиндрической системы координат $\{u_r, u_\theta, u_z\}$, отнесенных к нормирующему параметру R_* , а также для безразмерных характеристик напряженно-деформированного состояния рассматриваемого объекта на основных площадках цилиндрической координатной системы $\{\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta}\}$, отнесенных к нормирующему параметру c_* .

Основные соотношения модели включают:

– систему уравнений связи между компонентами тензора малых деформаций $\{\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta z}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{r\theta}\}$ и компонентами безразмерного вектора динамических упругих волновых перемещений в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \partial_r u_r, & \varepsilon_{\theta\theta} &= r^{-1} u_r + r^{-1} \partial_\theta u_\theta, & \varepsilon_{zz} &= \partial_z u_z, \\ \varepsilon_{\theta z} &= \partial_z u_\theta + r^{-1} \partial_\theta u_z, & \varepsilon_{rz} &= \partial_z u_r + \partial_r u_z, \\ \varepsilon_{r\theta} &= r^{-1} \partial_\theta u_r + \partial_r u_\theta - r^{-1} u_\theta; \end{aligned} \quad (1)$$

– систему соотношений обобщенного линейного закона Гука для трансверсально-изотропного материала

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{11} \varepsilon_{rr} + c_{12} \varepsilon_{\theta\theta} + c_{13} \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{12} \varepsilon_{rr} + c_{11} \varepsilon_{\theta\theta} + c_{13} \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{zz} &= c_{13} \varepsilon_{rr} + c_{13} \varepsilon_{\theta\theta} + c_{33} \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{\theta z} &= c_{44} \varepsilon_{\theta z}, & \sigma_{rz} &= c_{44} \varepsilon_{rz}, & \sigma_{r\theta} &= c_{66} \varepsilon_{r\theta}; \end{aligned} \quad (2)$$

– систему дифференциальных уравнений движения рассматриваемого тела в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned} \partial_r \sigma_{rr} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{r\theta} + \partial_z \sigma_{rz} + r^{-1} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) - (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_r &= 0, \\ \partial_r \sigma_{r\theta} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + \partial_z \sigma_{\theta z} + 2r^{-1} \sigma_{r\theta} - (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_\theta &= 0, \\ \partial_r \sigma_{rz} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta z} + \partial_z \sigma_{zz} + r^{-1} \sigma_{rz} - (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_z &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Во введенных представлениях $\{c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}, c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2\}$ – отнесенные к нормирующему параметру c_* ненулевые модули упругости трансверсально-изотропного материала волновода; ρ – плотность материала волновода; t – время; $\partial_q = \partial/\partial q$ ($q = r, \theta, z, t$).

Поставленная спектральная задача наряду с моделью (1)–(3) включает также граничные условия:

– на участках граничной поверхности секторного выреза рассматриваются граничные условия, моделирующие нанесение абсолютно гибкого микропанцирного покрытия

$$\begin{aligned} u_q|_{r \in [0,1], \theta = \pm\alpha, z \in (-\infty, \infty)} &= 0 \quad (q = r, z), \\ \sigma_{\theta\theta}|_{r \in [0,1], \theta = \pm\alpha, z \in (-\infty, \infty)} &= 0; \end{aligned} \quad (4)$$

– на цилиндрическом участке граничной поверхности рассматривается альтернативная форма классических граничных условий:

$$u_q|_{r=1, \theta \in [-\alpha, \alpha], z \in (-\infty, \infty)} = 0 \quad (q = r, \theta, z) \quad (5)$$

либо

$$\sigma_q|_{r=1, \theta \in [-\alpha, \alpha], z \in (-\infty, \infty)} = 0 \quad (q = rr, r\theta, rz). \quad (6)$$

Полагается, что материал волновода является функционально-неоднородным в радиальных направлениях по всем своим физико-механическим свойствам, а его плотность и нормированные модули упругости описываются представлениями

$$\begin{aligned} c_q &= \tilde{c}_q \exp(f_{\lambda,p}(r)) \quad (q \in \{11, 12, 13, 33, 44, 66\}), \\ \rho &= \tilde{\rho} \exp(f_{\lambda,p}(r)), \quad f_{\lambda,p}(r) = \lambda r^p, \end{aligned} \quad (7)$$

в которых λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) и p ($p \in \{0\} \cup \mathbb{N} \setminus \{1\}$) – параметры функциональной неоднородности.

2. Интегрирование уравнений волнового деформирования и получение дисперсионных соотношений. Для функций колебательных упругих перемещений в исследуемых нормальных волнах вдоль цилиндра секторного поперечного сечения с круговой частотой ω и нормированным продольным волновым числом k , следуя методу разделения переменных и с учетом граничных условий (4) вводятся комплексные представления

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z, t) &= \tilde{u}_r(r) \exp(-f_{\lambda,p}(r)/2) \cos(\tau\theta + \beta) \exp(-i\omega t + ikz), \\ u_\theta(r, \theta, z, t) &= \tilde{u}_\theta(r) \exp(-f_{\lambda,p}(r)/2) \sin(\tau\theta + \beta) \exp(-i\omega t + ikz), \\ u_z(r, \theta, z, t) &= i \tilde{u}_z(r) \exp(-f_{\lambda,p}(r)/2) \cos(\tau\theta + \beta) \exp(-i\omega t + ikz) \\ &(\tau \in \mathbb{R}, \beta \in \{0, \pi/2\}). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь β – параметр, задающий тип волновых движений, а именно, условно симметричные (волны S -типа) $u_r(r, -\theta, z, t) = u_r(r, \theta, z, t)$, $u_\theta(r, -\theta, z, t) = -u_\theta(r, \theta, z, t)$,

$u_z(r, -\theta, z, t) = u_z(r, \theta, z, t)$ ($\beta = 0$) и условно антисимметричные (волны А-типа)
 $u_r(r, -\theta, z, t) = -u_r(r, \theta, z, t)$, $u_\theta(r, -\theta, z, t) = u_\theta(r, \theta, z, t)$, $u_z(r, -\theta, z, t) =$
 $= -u_z(r, \theta, z, t)$ ($\beta = \pi/2$); τ – параметр, полученный из спектральной подзадачи (1)–(4)

$$\tau = \tau_n = \begin{cases} (n - 1/2) \pi / \alpha & \text{если } \beta = 0 \\ n \pi / \alpha & \text{если } \beta = \pi / 2 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (9)$$

Последовательная подстановка представлений (7), (8) в соотношения модели (1), (2), (3) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно амплитудных составляющих функций смещений

$$\begin{aligned} & (\tilde{c}_{11} (r^2 \partial_r^2 + r \partial_r - 1) + (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44}) r^2 - \\ & - \lambda p r^p (p (\lambda r^p / 2 + 1) \tilde{c}_{11} / 2 - \tilde{c}_{12}) - \tau^2 \tilde{c}_{66}) \tilde{u}_r + \\ & + \tau (((\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}) / 2) r \partial_r - (\lambda p r^p (\tilde{c}_{11} - 3 \tilde{c}_{12}) + 2 (3 \tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{12})) / 4) \tilde{u}_\theta - \\ & - k r ((\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}) r \partial_r - \lambda p r^p (\tilde{c}_{44} - \tilde{c}_{13}) / 2) \tilde{u}_z = 0, \quad (10) \\ & - \tau (((\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}) / 2) r \partial_r + (\lambda p r^p (\tilde{c}_{11} - 3 \tilde{c}_{12}) + 2 (3 \tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{12})) / 4) \tilde{u}_r + \\ & + (\tilde{c}_{66} (r^2 \partial_r^2 + r \partial_r - 1) + (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44}) r^2 - \\ & - \lambda p r^p (p (\lambda r^p / 2 + 1) / 2 + 1) \tilde{c}_{66} - \tau^2 \tilde{c}_{11}) \tilde{u}_\theta + k \tau (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}) r \tilde{u}_z = 0, \\ & k r ((\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}) (r \partial_r + 1) + \lambda p r^p (\tilde{c}_{44} - \tilde{c}_{13}) / 2) \tilde{u}_r + k \tau (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}) r \tilde{u}_\theta + \\ & + (\tilde{c}_{44} (r^2 \partial_r^2 + r \partial_r) + (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{33}) r^2 - \\ & - (\lambda p^2 r^p (\lambda r^p / 2 + 1) / 2 + \tau^2) \tilde{c}_{44}) \tilde{u}_z = 0. \end{aligned}$$

В уравнениях (10) $\Omega^2 = \tilde{\rho} R_*^2 \omega^2 / c_*$.

В качестве метода построения базисных решений системы (10) используется подход, основанный на представлениях искомых решений в виде рядов. С учетом физических аспектов модели волнового процесса, а также структуры дифференциальных уравнений (10), для искомых решений вводятся представления

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r(r) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^{m+1-\eta+\delta}, \quad \tilde{u}_\theta(r) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m r^{m+1-\eta+\delta}, \\ \tilde{u}_z(r) &= \sum_{m=0}^{\infty} d_m r^{m+\eta+\delta} \quad (\delta \in \mathbb{R}, \quad \eta \in \{0, 1\}) \quad (11) \end{aligned}$$

и рассматривается подзадача определения разрешающих условий $\{(\eta_j, \delta_j)\}_{j=1}^3$ для трех независимых базисных решений уравнений (10) при заданном значении параметра τ (9). В результате подстановки разложений (11) в уравнения (10) получается система рекуррентных уравнений, в матричной форме имеющая следующий вид:

$$\mathbf{A}_m^{(1)} \cdot \mathbf{X}_m + \mathbf{A}_m^{(2)} \cdot \mathbf{X}_{m-2} + \mathbf{A}^{(3)} \cdot \mathbf{X}_{m-p} + \mathbf{A}^{(4)} \cdot \mathbf{X}_{m-p-2} +$$

$$+\mathbf{A}^{(5)} \cdot \mathbf{X}_{m-2p} = \mathbf{O} \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (12)$$

В записи уравнений (12) используются обозначения векторно-матричных объектов размерности 3: $\mathbf{X}_m = [a_m, b_m, d_m]^{trans}$ ($m = \overline{0, \infty}$) – вектор-столбцы с неизвестными коэффициентами разложений (11); $\mathbf{X}_n = \mathbf{O}$ ($n = \overline{-\max(p+2, 2p), -1}$); \mathbf{O} – нулевой вектор-столбец; $\mathbf{A}_m^{(n)}$ ($n = \overline{1, 2}$) и $\mathbf{A}^{(n)}$ ($n = \overline{3, 5}$) – квадратные матрицы, ненулевые элементы которых имеют представления:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{A}_m^{(1)}\right)_{1,1} &= (\delta + m - \eta) (\delta + m + 2 - \eta) \tilde{c}_{11} - \tau^2 \tilde{c}_{66}, \\ \left(\mathbf{A}_m^{(1)}\right)_{1,2} &= \tau ((\delta + m - 2 - \eta) \tilde{c}_{11} + (\delta + m + 2 - \eta) \tilde{c}_{12})/2, \\ \left(\mathbf{A}_m^{(1)}\right)_{1,3} &= -k (\delta + m) (1 - \eta) (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}), \\ \left(\mathbf{A}_m^{(1)}\right)_{2,1} &= -\tau ((\delta + m + 4 - \eta) \tilde{c}_{11} + (\delta + m - \eta) \tilde{c}_{12})/2, \\ \left(\mathbf{A}_m^{(1)}\right)_{2,2} &= (\delta + m - \eta) (\delta + m + 2 - \eta) \tilde{c}_{66} - \tau^2 \tilde{c}_{11}, \\ \left(\mathbf{A}_m^{(1)}\right)_{2,3} &= k\tau (1 - \eta) (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}), \quad \left(\mathbf{A}_m^{(1)}\right)_{3,2} = k\tau\eta (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}), \\ \left(\mathbf{A}_m^{(1)}\right)_{3,1} &= k\eta (\delta + m + \eta) (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}), \\ \left(\mathbf{A}_m^{(1)}\right)_{3,3} &= ((\delta + m + \eta)^2 - \tau^2) \tilde{c}_{44}, \\ \left(\mathbf{A}_m^{(2)}\right)_{1,1} &= \left(\mathbf{A}_m^{(2)}\right)_{2,2} = \Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44}, \\ \left(\mathbf{A}_m^{(2)}\right)_{1,3} &= -k\eta (\delta + m - 1) (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}), \\ \left(\mathbf{A}_m^{(2)}\right)_{3,1} &= k (\delta + m) (1 - \eta) (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}), \\ \left(\mathbf{A}_m^{(2)}\right)_{2,3} &= k\tau\eta (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}), \quad \left(\mathbf{A}_m^{(2)}\right)_{3,2} = k\tau (1 - \eta) (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}), \\ \left(\mathbf{A}_m^{(2)}\right)_{3,3} &= \Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{33}, \quad \left(\mathbf{A}^{(3)}\right)_{1,1} = \lambda p (2\tilde{c}_{12} - p\tilde{c}_{11})/2, \\ \left(\mathbf{A}^{(3)}\right)_{1,2} &= \left(\mathbf{A}^{(3)}\right)_{2,1} = \tau\lambda p (3\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{11})/4, \\ \left(\mathbf{A}^{(3)}\right)_{1,3} &= \left(\mathbf{A}^{(4)}\right)_{3,1} = k\lambda p (1 - \eta) (\tilde{c}_{44} - \tilde{c}_{13})/2, \\ \left(\mathbf{A}^{(3)}\right)_{2,2} &= -\lambda p (p + 2) \tilde{c}_{66}/2, \\ \left(\mathbf{A}^{(3)}\right)_{3,1} &= \left(\mathbf{A}^{(4)}\right)_{1,3} = k\lambda p\eta (\tilde{c}_{44} - \tilde{c}_{13})/2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{A}^{(3)}\right)_{3,3} &= -\lambda p^2 \tilde{c}_{44}/2, & \left(\mathbf{A}^{(5)}\right)_{1,1} &= -\lambda^2 p^2 \tilde{c}_{11}/4, \\ \left(\mathbf{A}^{(5)}\right)_{2,2} &= -\lambda^2 p^2 \tilde{c}_{66}/4, & \left(\mathbf{A}^{(5)}\right)_{3,3} &= -\lambda^2 p^2 \tilde{c}_{44}/4. \end{aligned}$$

Следствием свойств опорных матричных коэффициентов $\mathbf{A}_m^{(1)}$ уравнений (12)

$$\det \left(\mathbf{A}_m^{(1)} \Big|_{\eta=0} \right) = \tilde{c}_{11} \tilde{c}_{44} \tilde{c}_{66} \left((\delta + m + 2)^2 - \tau^2 \right) \left((\delta + m)^2 - \tau^2 \right)^2, \quad (13)$$

$$\det \left(\mathbf{A}_m^{(1)} \Big|_{\eta=1} \right) = \tilde{c}_{11} \tilde{c}_{44} \tilde{c}_{66} \left((\delta + m - 1)^2 - \tau^2 \right) \left((\delta + m + 1)^2 - \tau^2 \right)^2 \quad (14)$$

в случае $\eta = 0$ из требования $\det \left(\mathbf{A}_0^{(1)} \right) = 0$ для двух искомого независимых базисных решений определяются:

– двукратное разрешающее условие $(\eta_1, \delta_1) = (\eta_2, \delta_2) = (0, \tau)$ при котором из (13) следуют свойства

$$\det \left(\mathbf{A}_m^{(1)} \right) \neq 0 \quad (m = \overline{1, \infty}); \quad (15)$$

– ограничения на параметр τ в представлениях (9)

$$\tau = \tau_n > 1/2 \quad (n \in \mathbb{N}); \quad (16)$$

– начальные условия

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &= \{ \eta = 0, \delta = \tau, a_0 = 0, b_0 = k\tau (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}), \\ & d_0 = \tau ((\tau - 2) \tilde{c}_{11} + (\tau + 2) \tilde{c}_{12})/2 \}, \\ \Upsilon_2 &= \{ \eta = 0, \delta = \tau, a_0 = k\tau (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}), \\ & b_0 = 0, d_0 = \tau ((\tau + 4) \tilde{c}_{11} + \tau \tilde{c}_{12})/2 \}; \end{aligned} \quad (17)$$

– рекуррентные соотношения отдельно для случая $p = 0$

$$\mathbf{X}_{2n} = - \left(\mathbf{A}_{2n}^{(1)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{A}_{2n}^{(2)} \cdot \mathbf{X}_{2(n-1)}, \quad \mathbf{X}_{2n-1} = \mathbf{O} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (18)$$

для случая $p = 2l$ ($l \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{2n} &= - \left(\mathbf{A}_{2n}^{(1)} \right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{A}_{2n}^{(2)} \cdot \mathbf{X}_{2(n-1)} + \mathbf{A}^{(3)} \cdot \mathbf{X}_{2(n-l)} + \right. \\ & \left. + \mathbf{A}^{(4)} \cdot \mathbf{X}_{2(n-l-1)} + \mathbf{A}^{(5)} \cdot \mathbf{X}_{2(n-2l)} \right), \quad \mathbf{X}_{2n-1} = \mathbf{O} \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (19)$$

для случая $p = 2l - 1$ ($l \in \mathbb{N}$)

$$\mathbf{X}_m = - \left(\mathbf{A}_m^{(1)} \right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{A}_m^{(2)} \cdot \mathbf{X}_{m-2} + \mathbf{A}^{(3)} \cdot \mathbf{X}_{m-p} + \right.$$

$$+\mathbf{A}^{(4)} \cdot \mathbf{X}_{m-p-2} + \mathbf{A}^{(5)} \cdot \mathbf{X}_{m-2p} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (20)$$

При $\eta = 1$ аналогично из требования $\det(\mathbf{A}_0^{(1)}) = 0$ определяется третье разрешающее условие

$$(\eta_3, \delta_3) = \begin{cases} (1, 1 - \tau) & \text{если } 1/2 < \tau < 1 \\ (1, \tau - 1) & \text{если } \tau \geq 1 \end{cases}.$$

В случае $(\eta_3, \delta_3) = (1, 1 - \tau)$ из (14) также следует свойство (15) с учетом которого определяется начальное условие

$$\Upsilon_3 = \{ \eta = 1, \delta = 1 - \tau, a_0 = (\tau + 2) \tilde{c}_{11} + (\tau - 2) \tilde{c}_{12}, \\ b_0 = (\tau - 4) \tilde{c}_{11} + \tau \tilde{c}_{12}, d_0 = -2k(\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}) \tilde{c}_{66} / \tilde{c}_{44} \} \quad (21)$$

для рекуррентных соотношений (18)–(20), генерирующих \mathbf{X}_m ($m = \overline{1, \infty}$). В случае $(\eta_3, \delta_3) = (1, \tau - 1)$ из (14) следуют свойства

$$\det(\mathbf{A}_2^{(1)}) = 0, \quad \det(\mathbf{A}_m^{(1)}) \neq 0 \quad (m = 1, \overline{3, \infty}),$$

непосредственным следствием которых становится зависимость структуры порождающих соотношений для определения начального условия от параметра функциональной неоднородности p . При $p = 0$ получается однородная система линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0^{(1)} & \Theta \\ \mathbf{A}_2^{(2)} & \mathbf{A}_2^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix},$$

в результате решения которой определяется начальное условие

$$\Upsilon_3 = \{ \eta = 1, \delta = \tau - 1, a_0 = -1, b_0 = 1, \\ d_0 = -(\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44}) / (k\tau(\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13})), a_2 = 0, b_2 = 0, \\ d_2 = (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{33})(\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44}) / (4k\tau(\tau + 1)\tilde{c}_{44}(\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13})) \}. \quad (22)$$

В записи представленной системы линейных уравнений для нулевой матрицы размерности 3 использовалось обозначение Θ . Рекуррентные соотношения для определения \mathbf{X}_m ($m = 1, \overline{3, \infty}$) получаются в таком виде

$$\mathbf{X}_{2n} = -(\mathbf{A}_{2n}^{(1)})^{-1} \cdot \mathbf{A}_{2n}^{(2)} \cdot \mathbf{X}_{2(n-1)}, \quad \mathbf{X}_{2n-3} = \mathbf{O} \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (23)$$

При $p = 2$ для получающейся системы

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0^{(1)} & \Theta \\ \mathbf{A}_2^{(2)} + \mathbf{A}^{(3)} & \mathbf{A}_2^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

определяется начальное условие

$$\Upsilon_3 = \{ \eta = 1, \delta = \tau - 1, a_0 = -1, b_0 = 1, d_0 = -(\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \lambda ((\tau - 4) \tilde{c}_{11} - (3\tau - 4) \tilde{c}_{12})/2 / (k\tau (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13})), a_2 = 0, \\
 & b_2 = 0, d_2 = k\lambda (1 - \tilde{c}_{13}/\tilde{c}_{44}) / (4(\tau + 1)) + \\
 & + (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44} + \lambda ((\tau - 4) \tilde{c}_{11} - (3\tau - 4) \tilde{c}_{12})/2) * \\
 & * (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{33} - 2\lambda \tilde{c}_{44}) / (4k\tau (\tau + 1) (\tilde{c}_{44} + \tilde{c}_{13}) \tilde{c}_{44}) \}
 \end{aligned} \tag{24}$$

и записываются определяющие \mathbf{X}_m ($m = \overline{3, \infty}$) рекуррентные соотношения в таком виде

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_{2n} &= -(\mathbf{A}_{2n}^{(1)})^{-1} \cdot \left((\mathbf{A}_{2n}^{(2)} + \mathbf{A}^{(3)}) \cdot \mathbf{X}_{2(n-1)} + (\mathbf{A}^{(4)} + \mathbf{A}^{(5)}) \cdot \mathbf{X}_{2(n-2)} \right), \\
 \mathbf{X}_{2n-3} &= \mathbf{O} \quad (n = 2, 3, \dots).
 \end{aligned} \tag{25}$$

Наконец, при $p \geq 3$ начальное условие задается представлением (22), а рекуррентные соотношения для определения \mathbf{X}_m ($m = 1, \overline{3, \infty}$) записываются так:

– для случая $p = 2l$ ($l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_{2n} &= -(\mathbf{A}_{2n}^{(1)})^{-1} \cdot \left(\mathbf{A}_{2n}^{(2)} \cdot \mathbf{X}_{2(n-1)} + \mathbf{A}^{(3)} \cdot \mathbf{X}_{2(n-l)} + \right. \\
 & \left. + \mathbf{A}^{(4)} \cdot \mathbf{X}_{2(n-l-1)} + \mathbf{A}^{(5)} \cdot \mathbf{X}_{2(n-2l)} \right), \quad \mathbf{X}_{2n-3} = \mathbf{O} \quad (n = 2, 3, \dots);
 \end{aligned} \tag{26}$$

– для случая $p = 2l + 1$ ($l \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_1 &= \mathbf{O}, \quad \mathbf{X}_m = -(\mathbf{A}_m^{(1)})^{-1} \cdot \left(\mathbf{A}_m^{(2)} \cdot \mathbf{X}_{m-2} + \mathbf{A}^{(3)} \cdot \mathbf{X}_{m-p} + \right. \\
 & \left. + \mathbf{A}^{(4)} \cdot \mathbf{X}_{m-p-2} + \mathbf{A}^{(5)} \cdot \mathbf{X}_{m-2p} \right) \quad (m = 3, 4, \dots).
 \end{aligned} \tag{27}$$

Для введенных векторно-матричных обозначений получаются представления

$$\mathbf{U}(r) = \begin{bmatrix} \tilde{u}_r(r) \\ \tilde{u}_\theta(r) \\ \tilde{u}_z(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^{\delta+1-\eta} & 0 & 0 \\ 0 & r^{\delta+1-\eta} & 0 \\ 0 & 0 & r^{\delta+\eta} \end{bmatrix} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} r^m \mathbf{X}_m. \tag{28}$$

По аналогии с (8) вводятся представления

$$\begin{aligned}
 \sigma_q(r, \theta, z, t) &= \tilde{\sigma}_q(r) \exp(f_{\lambda,p}(r)/2) \cos(\tau\theta + \beta) \exp(-i\omega t + ikz) \\
 & \quad (q = rr, \theta\theta, zz),
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{\theta z}(r, \theta, z, t) = i\tilde{\sigma}_{\theta z}(r) \exp(f_{\lambda,p}(r)/2) \sin(\tau\theta + \beta) \exp(-i\omega t + ikz),$$

$$\sigma_{rz}(r, \theta, z, t) = i\tilde{\sigma}_{rz}(r) \exp(f_{\lambda,p}(r)/2) \cos(\tau\theta + \beta) \exp(-i\omega t + ikz),$$

$$\sigma_{r\theta}(r, \theta, z, t) = \tilde{\sigma}_{r\theta}(r) \exp(f_{\lambda,p}(r)/2) \sin(\tau\theta + \beta) \exp(-i\omega t + ikz)$$

и на основании (1), (2), (7), (8), (11) с целью постановки и решения спектральной задачи определяются функциональные векторно-матричные объекты

$$\mathbf{S}(r) = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{rr}(r) \\ \tilde{\sigma}_{r\theta}(r) \\ \tilde{\sigma}_{rz}(r) \end{bmatrix} = r^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} r^m \mathbf{Q}_m(r) \cdot \mathbf{X}_m. \quad (29)$$

Здесь $\mathbf{Q}_m(r)$ – квадратные функциональные матрицы размерности 3, ненулевые элементы которых имеют представления

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}_m(r))_{1,1} &= ((-\lambda pr^p/2 + \delta + m + 1 - \eta) \tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}) r^{\delta+1-\eta}, \\ (\mathbf{Q}_m(r))_{2,2} &= (-\lambda pr^p/2 + \delta + m - \eta) \tilde{c}_{66} r^{\delta+1-\eta}, \\ (\mathbf{Q}_m(r))_{3,3} &= (-\lambda pr^p/2 + \delta + m + \eta) \tilde{c}_{44} r^{\delta+\eta}, \\ (\mathbf{Q}_m(r))_{1,2} &= \tau \tilde{c}_{12} r^{\delta+1-\eta}, \quad (\mathbf{Q}_m(r))_{1,3} = -k \tilde{c}_{13} r^{\delta+1+\eta}, \\ (\mathbf{Q}_m(r))_{2,1} &= -\tau \tilde{c}_{66} r^{\delta+1-\eta}, \quad (\mathbf{Q}_m(r))_{3,1} = k \tilde{c}_{44} r^{\delta+2-\eta}. \end{aligned}$$

На основе построенных базисных решений

$$\left\{ \mathbf{U}_j^{(baz)}(r) = \mathbf{U}(r)|_{\Gamma_j} \right\}_{j=1}^3, \quad \left\{ \mathbf{S}_j^{(baz)}(r) = \mathbf{S}(r)|_{\Gamma_j} \right\}_{j=1}^3$$

определяются спектральные решения

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(sp)}(r) &= \mathbf{M}_1(r) \cdot \mathbf{Y}, \quad \mathbf{S}^{(sp)}(r) = \mathbf{M}_2(r) \cdot \mathbf{Y}, \\ \mathbf{M}_1(r) &= \left[\mathbf{U}_1^{(baz)}(r) \quad \mathbf{U}_2^{(baz)}(r) \quad \mathbf{U}_3^{(baz)}(r) \right], \\ \mathbf{M}_2(r) &= \left[\mathbf{S}_1^{(baz)}(r) \quad \mathbf{S}_2^{(baz)}(r) \quad \mathbf{S}_3^{(baz)}(r) \right], \end{aligned}$$

в представлениях которых вектор-столбец \mathbf{Y} неизвестных определяется из спектральной задачи, полученной на основе альтернативных граничных условий (5) и (6):

$$\begin{aligned} \det \left(\mathbf{M}_j(1)|_{(k,\Omega)=(k_*,\Omega_*)} \right) &= 0 \quad (j = 1, 2); \quad (30) \\ \mathbf{M}_j(1)|_{(k,\Omega)=(k_*,\Omega_*)} \cdot \mathbf{Y} &= \mathbf{O} \quad (j = 1, 2). \end{aligned}$$

На основании представленных спектральных решений можно сделать вывод о наличии в поле напряжений особенностей вида $r^{\tau-1}$ и $r^{-\tau}$ при $\tau \in (1/2, 1)$ для волн S -типа, а также вида $r^{\tau-2}$ при $\tau \in (1, 2)$ для волн S и A -типов.

Таким образом, в зависимости от значений параметров p и τ соотношениями (17), (21), (22), (24) определены начальные условия формирования трех независимых базисных решений; в явном виде (18)–(20), (23), (25)–(27) получены рекуррентные соотношения для построения искомым базисных решений; определены дисперсионные соотношения спектральной задачи (30) соответственно для жестко закрепленного

($j = 1$) и свободного ($j = 2$) цилиндрического участка граничной поверхности волновода. Специальный вид комплексных представлений для функций колебательных упругих перемещений в форме (8) обеспечивает при $m \rightarrow \infty$ справедливость оценок

$$\left\| \left(\mathbf{A}_m^{(1)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{A}_m^{(2)} \right\| \leq \kappa_1/m, \quad \left\| \left(\mathbf{A}_m^{(1)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^j \right\| \leq \kappa_2/m^2 \quad (j = \overline{3,5}),$$

непосредственным следствием которых является вывод об абсолютной и равномерной сходимости разложений (28), (29) на отрезке $r \in [0, 1]$.

3. Результаты вычислительного эксперимента. В процессе численных исследований с целью верификации построенных в работе аналитических решений реализован расчет фрагмента спектра мод распространяющихся нормальных волн в однородном ($\lambda = 0$, $p = 0$) трансверсально-изотропном цилиндре секторного поперечного сечения угловой меры $\alpha = \pi/2$ из кобальта в случае второй спектральной задачи (30) ($j = 2$) для волн S -типа ($\beta = 0$), характеризуемых спектральным параметром $\tau = 1$. Особенностью описанной модели волнового процесса является ее полная идентичность модели распространения нормальных волн с окружным волновым числом равным единице вдоль сплошного цилиндрического волновода со свободной граничной поверхностью. Результаты ранее проводившихся исследований для аналогичного волновода представлены в работе [7]. Сопоставление результатов выполненных расчетов обнаруживает их полное соответствие.

При исследовании факторов влияния величины показателей радиальной неоднородности (λ, p) и угловой меры сектора α на топологическую картину спектра бегущих нормальных волн при численном эксперименте в качестве базовых однородных ($\lambda = 0$, $p = 0$) были выбраны конкретные трансверсально-изотропные материалы, волноводные свойства которых характеризуются различными альтернативными величинами введенного в [8] приведенного параметра волновой анизотропии Δ . Из групп материалов с отрицательными и положительными значениями этого параметра взяты $Zn^{(\lambda=0, p=0)}$ и $Co^{(\lambda=0, p=0)}$ соответственно с характеристиками ($c_* = 10^{10}$ Па)

$$\{ \tilde{c}_{11} = 16.35, \tilde{c}_{12} = 2.64, \tilde{c}_{13} = 5.17, \tilde{c}_{33} = 5.31, \tilde{c}_{44} = 3.78, \rho = 7134 \text{ кг/м}^3 \},$$

$$\{ \tilde{c}_{11} = 30.7, \tilde{c}_{12} = 16.5, \tilde{c}_{13} = 10.27, \tilde{c}_{33} = 35.8, \tilde{c}_{44} = 7.55, \rho = 8836 \text{ кг/м}^3 \}.$$

Расчет фрагментов дисперсионных спектров бегущих нормальных волн осуществлялся в диапазонах изменения параметров приведенной частоты $\Omega \in [0, 45]$ и продольного нормализованного волнового числа $ka \in [0, 30]$ ($a = R_*$) для значений угловой меры сектора $\alpha = \pi/3$ ($\tau = 3/2$, $\beta = 0$) и $\alpha = 5\pi/6$ ($\tau = 3/5$, $\beta = 0$) в случаях однородного ($\lambda = 0$, $p = 0$) и неоднородного ($\lambda = \ln(2)$, $p = 6$) цилиндров со свободным участком цилиндрической граничной поверхности. С целью анализа влияния радиальной неоднородности материала волновода на топологию получаемых спектров введена нормализованная частота $\omega a/c_t$, нормирующий параметр c_t с размерностью скорости в представлении которой при визуализации парных

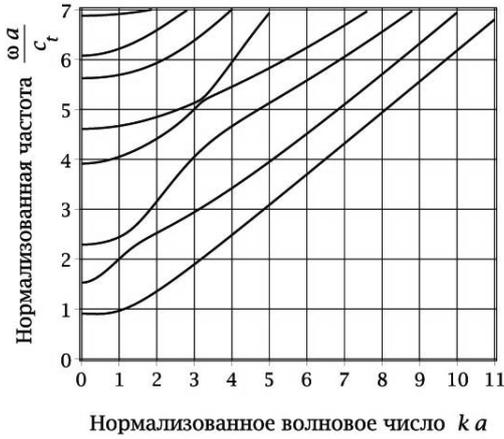


Рис. 1. Расчет дисперсионного спектра для неоднородного ($\lambda = \ln(2)$, $p = 6$) цилиндра из $Co^{(\lambda=0, p=0)}$ ($\alpha = \pi/3$, $\tau = 3/2$, $\beta = 0$)

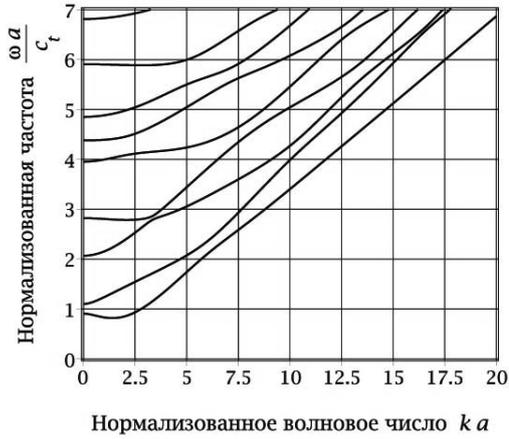


Рис. 2. Расчет дисперсионного спектра для неоднородного ($\lambda = \ln(2)$, $p = 6$) цилиндра из $Zn^{(\lambda=0, p=0)}$ ($\alpha = \pi/3$, $\tau = 3/2$, $\beta = 0$)

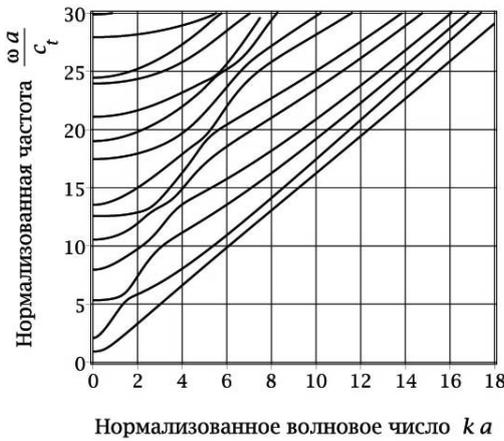


Рис. 3. Расчет дисперсионного спектра для неоднородного ($\lambda = \ln(2)$, $p = 6$) цилиндра из $Co^{(\lambda=0, p=0)}$ ($\alpha = 5\pi/6$, $\tau = 3/5$, $\beta = 0$)



Рис. 4. Расчет дисперсионного спектра для неоднородного ($\lambda = \ln(2)$, $p = 6$) цилиндра из $Zn^{(\lambda=0, p=0)}$ ($\alpha = 5\pi/6$, $\tau = 3/5$, $\beta = 0$)

(однородный-неоднородный) спектров на рис. (1–6) определялся из условия равенства единице нижней ненулевой нормализованной критической частоты в соответствующем однородном волноводе. Характерной отличительной особенностью представленных на рис. (1–4) распределений является существенная локализация в длинноволновом диапазоне двух первых мод в окрестности первой критической частоты для неоднородного ($\lambda = \ln(2)$, $p = 6$) цилиндра из $Zn^{(\lambda=0, p=0)}$ при угловой мере сектора в его поперечном сечении $\alpha = \pi/3$.

На рис. 5 и рис. 6 представлены результаты сравнительного количественного анализа различий в поведении первых шести мод спектров для однородного ($\lambda = 0$, $p = 0$) и неоднородного ($\lambda = \ln(2)$, $p = 6$) цилиндров из $Zn^{(\lambda=0, p=0)}$ для

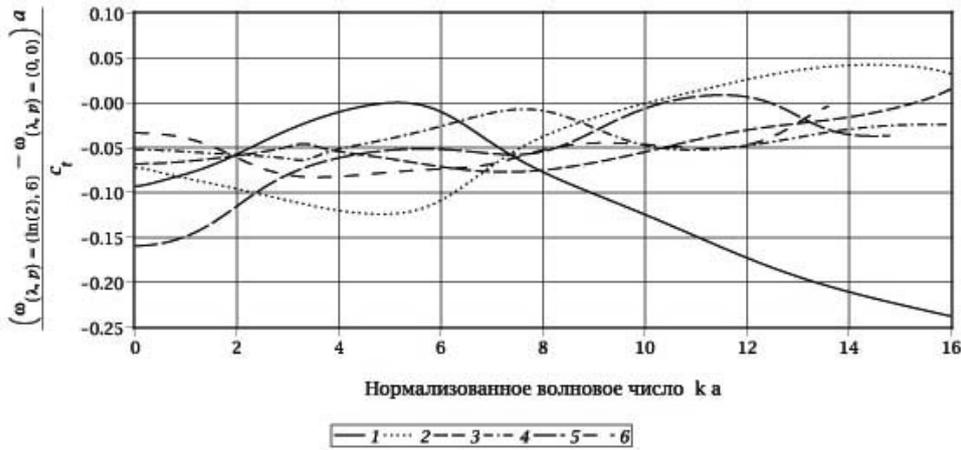


Рис. 5. Сравнительный анализ дисперсионных спектров для однородного ($\lambda = 0, p = 0$) и неоднородного ($\lambda = \ln(2), p = 6$) цилиндров из $Zn^{(\lambda=0, p=0)}$ при $\alpha = \pi/3$ ($\tau = 3/2, \beta = 0$)

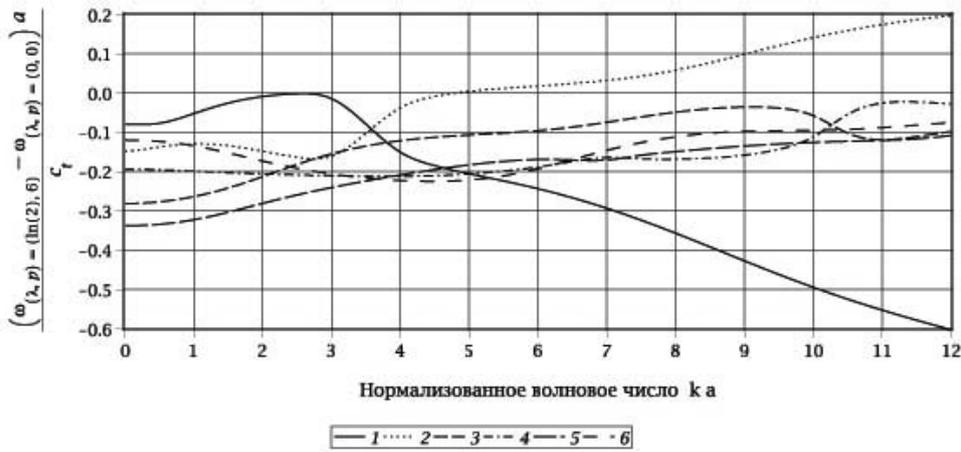


Рис. 6. Сравнительный анализ дисперсионных спектров для однородного ($\lambda = 0, p = 0$) и неоднородного ($\lambda = \ln(2), p = 6$) цилиндров из $Zn^{(\lambda=0, p=0)}$ при $\alpha = 5\pi/6$ ($\tau = 3/5, \beta = 0$)

различных значений угловой меры сектора в его поперечном сечении. В качестве количественной меры отличий в распределениях ветвей сопоставляемых спектров использовалась функция сравнения двух парных по номеру в соответствующих спектрах мод $\Delta\omega(x) = (\omega_{(\lambda=\lambda^*, p=p^*)}(x) - \omega_{(\lambda=0, p=0)}(x)) a/c_t$, характеризующая эффекты уменьшения либо увеличения нормализованной частоты волны в парной моде неоднородного волновода при рассматриваемой относительной ее длине. Здесь можно отметить общую закономерность понижения нормализованной частоты для первых шести мод спектра в неоднородном волноводе в длинноволновом диапазоне соответственно $ka < 10.0$ ($\alpha = \pi/3, \tau = 3/2, \beta = 0$) и $ka < 4.8$ ($\alpha = 5\pi/6, \tau = 3/5, \beta = 0$) при сохранении указанной тенденции для первой моды и в оставшейся части волнового диапазона.

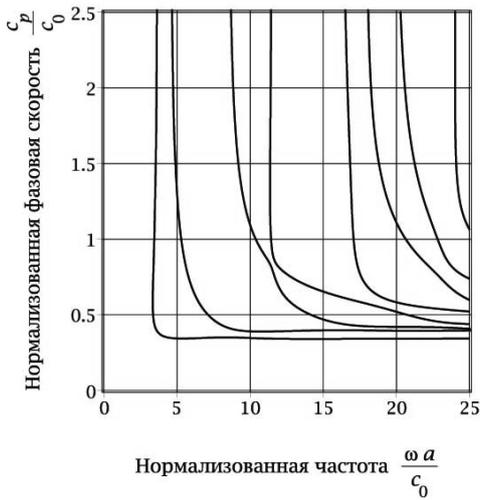


Рис. 7. Расчет фазовых скоростей для неоднородного ($\lambda = \ln(2)$, $p = 6$) цилиндра из $Zn^{(\lambda=0, p=0)}$ ($\alpha = \pi/3$, $\tau = 3/2$, $\beta = 0$)

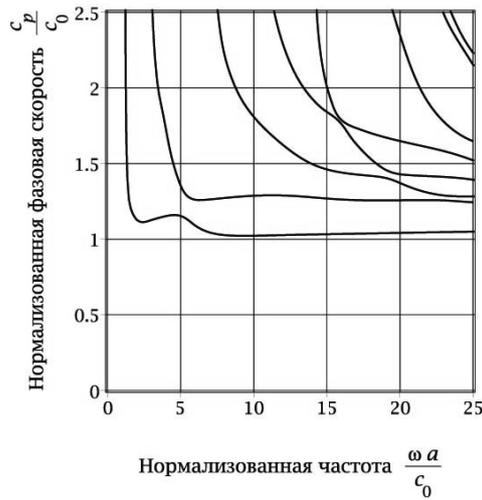


Рис. 8. Расчет фазовых скоростей для неоднородного ($\lambda = \ln(2)$, $p = 6$) цилиндра из $Zn^{(\lambda=0, p=0)}$ ($\alpha = 5\pi/6$, $\tau = 3/5$, $\beta = 0$)

Результаты расчетов нормализованных фазовых скоростей для нормальных распространяющихся упругих волн в неоднородном ($\lambda = \ln(2)$, $p = 6$) цилиндре из $Zn^{(\lambda=0, p=0)}$ при различных значениях угловой меры сектора в его поперечном сечении представлены на рис. 7 и рис. 8, в которых использовался нормирующий параметр $c_0 = \sqrt{c_*/\rho}$ с размерностью скорости. В качестве различающих при переходе от $\alpha = \pi/3$ к $\alpha = 5\pi/6$ отмечается: увеличение более чем в два раза асимптотического значения для нормализованной фазовой скорости низшей моды спектра; “сдвиг” устойчивого асимптотического поведения всех исследованных мод спектров в более высокочастотную область; переход эффекта взаимного влияния третьей и четвертой мод при $\omega a/c_0 \approx 11$ к первой и второй модам при $\omega a/c_0 \approx 5$.

Выводы. В результате проведенных исследований в форме абсолютно и равномерно сходящихся степенных рядов с определяемыми из рекуррентных соотношений коэффициентами получено решение системы дифференциальных уравнений, описывающее распространение симметричных и антисимметричных нормальных упругих волн в протяженных цилиндрах с вырезом секторной формы, изготовленных из трансверсально-изотропных материалов с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью. Построенное решение использовано для получения дисперсионных уравнений, определяющих спектры указанных волн для цилиндров со свободным и жестко закрепленным участком цилиндрической граничной поверхности. На основе предложенной модели проанализирована зависимость топологии распределений действительных ветвей спектров и фазовых скоростей бегущих нормальных волн от параметров радиальной неоднородности и угловой меры сектора в поперечном сечении волновода. Области использования результатов представленного исследования являются прочностные расчеты деталей машин, технологии ультразвуковой диагностики, акустоэлектроника.

1. Космодамианский А.С., Моисеенко И.А., Троян Р.Р. Дисперсионный спектр анизотропного волновода секторного сечения с закрепленной границей // Прикладная механика. – 2005. – 41, № 9. – С. 46–51.
2. Моисеенко И.А., Троян Р.Р. Нормальные волны в трансверсально-изотропном цилиндрическом волноводе с сечением в форме кольцевого сектора // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 127–133.
3. Моисеенко И.А., Троян Р.Р. Нормальные волны в трансверсально-изотропном цилиндрическом волноводе с секторным вырезом: случай свободных участков цилиндрических границ // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2007. – Вып. 1. – С. 52–60.
4. Моисеенко И.А. Волны кручения вдоль полого экспоненциально-неоднородного трансверсально-изотропного цилиндра с закрепленными границами // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 132–139.
5. Моисеенко И.А. Продольные волны в экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах // Вісник Запорізького національного університету. Серія: Фізико-математичні науки. – 2015. – № 3. – С. 179–189.
6. Моисеенко И.А. Спектры нормальных упругих волн кручения в экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – №. 9 (55). – С. 139–145.
7. Honarvar F., Enjilela E., Sinclair A.N., Mirnezami S.A. Wave propagation in transversely isotropic cylinders // International Journal of Solids and Structures. – 2007. – 44. – P. 5236–5246.
8. Космодамианский А.С., Сторожнев В.И. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред – К.: Наукова думка, 1985. – 176 с.

I. A. Moiseyenko

The spectra of normal elastic waves in transversely isotropic waveguides with sector-shaped cross section and functionally graded radial non-homogeneity.

In this paper, of constructing solutions for the propagation of normal waves in radially non-homogeneous transversely isotropic cylinder with sector-shaped cross section problems is investigated. The elastic modules and density are taken as an exponential-power function of the radial coordinate. Expansions in uniformly and absolutely convergent series on radial coordinate for the components of the vector displacements and the components of the tensor stresses obtained. Dispersion relations describing the spectra of harmonics for symmetric and antisymmetric normal waves in the radially non-homogeneous cylindrical waveguide with perfectly flexible inextensible membrane covering boundary surfaces of the channel and free or rigidly fixed of the cylindrical portion of the lateral surface made of transversely isotropic material obtained. The effect of radial non-homogeneity ratios and angular channel measure on the topology of the dispersion spectrums and distribution of the phase velocities of normal propagating waves studied.

Keywords: *cylindrical waveguide, sector-shaped cross section, normal waves, functionally graded, transversely isotropic, frequency equation.*