

УДК 539.3: 534.1

©2015. И. А. Глухов, В. И. Сторожев

## ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА ЛОКАЛИЗОВАННЫХ УПРУГИХ ВОЛН ВО ВМЕЩЕННОМ МЕЖДУ ОРТОТРОПНЫМИ ПОЛУПРОСТРАНСТВАМИ ОРТОТРОПНОМ СЛОЕ

В работе построено численно-аналитическое решение пространственной задачи о распространении трехпарциальных локализованных упругих волн вдоль произвольно ориентированного направления в плоскости ортотропного деформируемого слоя, идеально контактирующего по граням с вмещающими ортотропными полупространствами. Рассмотрен вариант однотипных по физико-механическим свойствам полупространств и отличающегося по свойствам слоя. Для случая симметричных по толщине слоя волновых движений получены и качественно проанализированы основные дисперсионные соотношения. Представлены результаты расчетов фрагментов спектров для волн исследуемого типа применительно к частному варианту рассматриваемой волноводной структуры с компонентами из реальных ортотропных материалов и охарактеризованы изменения в топологии спектров, обусловленные варьированием ориентации направления распространения.

**Ключевые слова:** ортотропный слой между ортотропными полупространствами, идеальный механический контакт, симметричные трехпарциальные локализованные упругие волны, трансцендентное дисперсионное уравнение, асимптотический и численный анализ, волновод из реальных материалов, расчеты ветвей спектров бегущих волн.

**Введение и постановка задачи.** Описание свойств локализованных упругих волн в деформируемом слое, заключенном между деформируемыми полупространствами, по целому ряду аспектов до сегодняшнего дня остается неисследованной проблемой и связано с широким кругом актуальных приложений. В частности, решение ранее не рассматривавшихся ее вариантов является составным элементом совершенствования методологической базы геоакустических технологий, методов ультразвукового зондирования пластов полезных ископаемых [1, 2]. Указанные исследования представляют интерес для механики композиционных материалов и акустоэлектроники [3].

Анализ публикаций по рассматриваемой проблематике позволяет заключить, что ведущие теоретические результаты исследований в данном контексте на сегодняшний день относятся к случаям распространения разделяющихся локализованных SH и P-SV волн с симметричными и антисимметричными толщинными формами колебательных движений в рассматриваемой составной волноводной структуре в случаях, когда вмещающие полупространства являются изотропными [4–6] либо трансверсально-изотропными [7–9] и эквивалентны по физико-механическим характеристикам. Для таких свойств компонентов волноводов рассмотрены случаи идеального либо неидеального контакта слоя с полупространствами. В работе [10] волновод рассматриваемой структуры рассматривается как предельный вариант трехслойной пластины с идеальным контактом составляющих и неограниченно возрастающими толщинами внешних вмещающих слоев. В работе [11] также приведены сугубо аналитические результаты исследований по построению дисперсионного со-

отношения для волновода в виде заключенного между полупространствами и идеально контактирующего с ними слоя в случае, когда материалы всех составляющих принадлежат произвольному классу анизотропии.

В представленном контексте данная работа посвящена решению не рассматривавшейся ранее проблемы построения и исследования дисперсионного соотношения, описывающего спектр трехпарциальных локализованных упругих волн произвольно ориентированного направления в плоскости ортотропного деформируемого слоя, идеально контактирующего по граням с однотипными по свойствам вмещающими ортотропными полупространствами.

Рассматривается занимающий область

$$V_{\Sigma} = V^{(+)} \cup V \cup V^{(-)} \quad (1)$$

волновод в виде заключенного между деформируемыми полупространствами упругого слоя, компоненты которого имеют в отнесенных к нормирующему параметру  $R_* = h$  безразмерных прямоугольных координатах  $Ox_1x_2x_3$  описания

$$\begin{aligned} V^{(+)} &= \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 > h/2\} \\ V^{(-)} &= \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 < -h/2\} \\ V &= \{(x_1, x_2) \in R^2, -h/2 \leq x_3 \leq h/2\} \end{aligned} \quad (2)$$

и составлены из прямолинейно-ортотропных материалов с коллинеарными ориентированными вдоль координатных осей одноименными упруго-эквивалентными направлениями. Полагается, что физико-механические свойства вмещающих полупространств  $V^{(+)}$ ,  $V^{(-)}$  идентичны, они отличаются от физико-механических свойств слоя  $V$  и соответственно характеризуются девятью независимыми отнесенными к нормирующему параметру  $c_*$  модулями упругости  $c_{ij}$ ,  $c_{ij}^{(+)} = c_{ij}^{(-)}$  ( $ij = 11, 22, 33, 12, 13, 23, 44, 55, 66$ ), а также плотностями  $\rho$  и  $\rho^{(+)} = \rho^{(-)}$ .

Для волновода с описанной структурой подлежат анализу процессы распространения симметричных по толщине слоя локализованных трехпарциальных гармонических упругих волн с круговой частотой  $\omega$  вдоль произвольно ориентированного направления в первом квадранте координатной плоскости  $Ox_1x_2$ , составляющего угол  $\phi$  с осью  $Ox_1$  ( $n_1 = \cos \phi$ ,  $n_2 = \sin \phi$ ).

**Процедура получения аналитической формы основного дисперсионного соотношения.** Распространение исследуемых локализованных волн описывается спектральной краевой задачей, включающей системы уравнений волнового деформирования для всех компонентов волновода и краевые условия их идеального механического контакта.

На первом этапе реализации рассматриваемого подхода осуществляется аналитическое интегрирование системы дифференциальных уравнений волнового деформирования для ортотропного упругого слоя, записываемой в форме

$$L_{ij}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t)u_j(x_1, x_2, x_3, t) = 0, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}
 L_{11}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) &= c_{11}\partial_1^2 + c_{66}\partial_2^2 + c_{55}\partial_3^2 - \rho\partial_t^2 \\
 L_{22}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) &= c_{66}\partial_1^2 + c_{22}\partial_2^2 + c_{44}\partial_3^2 - \rho\partial_t^2 \\
 L_{33}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) &= c_{55}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 + c_{33}\partial_3^2 - \rho\partial_t^2 \\
 L_{12}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) &= L_{21}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) = (c_{12} + c_{66})\partial_1\partial_2 \\
 L_{13}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) &= L_{31}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) = (c_{13} + c_{55})\partial_1\partial_3 \\
 L_{23}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) &= L_{32}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t) = (c_{23} + c_{44})\partial_2\partial_3.
 \end{aligned}$$

При подстановке в данные уравнения исходных представлений для комплексных функций упругих перемещений в исследуемых волнах с волновыми числами  $k$ , имеющих вид

$$\begin{aligned}
 u_j(x_1, x_2, x_3, t) &= A_j \cos(\lambda x_3) \cdot E(\omega, k, n_1, n_2) \quad (j = \overline{1, 2}), \\
 u_3(x_1, x_2, x_3, t) &= A_3 \sin(\lambda x_3) \cdot E(\omega, k, n_1, n_2), \\
 E(\omega, k, n_1, n_2) &= \exp(-i(\omega t - k(n_1 x_1 + n_2 x_2)))
 \end{aligned} \tag{4}$$

соотношения (3) трансформируются в систему линейных алгебраических уравнений

$$G_{ij}(\lambda)A_j = 0 \quad (i, j = \overline{1, 3}), \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
 G_{11}(\lambda) &= \Omega^2 - k^2(c_{11}n_1^2 + c_{66}n_2^2) + c_{55}\lambda^2, \\
 G_{22}(\lambda) &= \Omega^2 - k^2(c_{66}n_1^2 + c_{22}n_2^2) + c_{44}\lambda^2, \\
 G_{33}(\lambda) &= \Omega^2 - k^2(c_{55}n_1^2 + c_{44}n_2^2) + c_{33}\lambda^2, \\
 G_{12}(\lambda) &= G_{21}(\lambda) = -k^2(c_{12} + c_{66})n_1n_2, \\
 G_{13}(\lambda) &= G_{31}(\lambda) = ik(c_{13} + c_{55})n_1\lambda, \\
 G_{23}(\lambda) &= G_{32}(\lambda) = ik(c_{23} + c_{44})n_2\lambda.
 \end{aligned} \tag{6}$$

С введением обозначений  $\lambda_p$  ( $\text{Re } \lambda_p > 0$ ,  $p = \overline{1, 3}$ ) для корней бикубического характеристического полинома уравнений (3), соответствующие им нетривиальные решения  $A_j^{(p)}$  системы (5) конструируются в виде представлений со структурой  $A_j^{(p)} = \beta_{jp}D_p$ , содержащих произвольные постоянные коэффициенты  $D_j$

$$\begin{aligned}
 A_1^{(1)} &= (G_{12}(\lambda_1)G_{23}(\lambda_1) - G_{22}(\lambda_1)G_{13}(\lambda_1))D_1 = \beta_{11}D_1, \\
 A_2^{(1)} &= (G_{13}(\lambda_1)G_{21}(\lambda_1) - G_{11}(\lambda_1)G_{23}(\lambda_1))D_1 = \beta_{21}D_1, \\
 A_3^{(1)} &= (G_{11}(\lambda_1)G_{22}(\lambda_1) - G_{12}(\lambda_1)G_{21}(\lambda_1))D_1 = \beta_{31}D_1, \\
 A_1^{(2)} &= (G_{12}(\lambda_2)G_{23}(\lambda_2) - G_{22}(\lambda_2)G_{13}(\lambda_2))D_2 = \beta_{12}D_2, \\
 A_2^{(2)} &= (G_{13}(\lambda_2)G_{21}(\lambda_2) - G_{11}(\lambda_2)G_{23}(\lambda_2))D_2 = \beta_{22}D_2,
 \end{aligned}$$

$$A_3^{(2)} = (G_{11}(\lambda_2)G_{22}(\lambda_2) - G_{12}(\lambda_2)G_{21}(\lambda_2))D_2 = \beta_{32}D_2, \quad (7)$$

$$A_1^{(3)} = (n_2(G_{22}(\lambda_3)G_{33}(\lambda_3) - G_{23}(\lambda_3)G_{32}(\lambda_3)) + n_1(G_{13}(\lambda_3)G_{32}(\lambda_3) - G_{12}(\lambda_3)G_{33}(\lambda_3)))D_3 = \beta_{13}D_3,$$

$$A_2^{(3)} = (n_2(G_{31}(\lambda_3)G_{33}(\lambda_3) - G_{21}(\lambda_3)G_{33}(\lambda_3)) + n_1(G_{11}(\lambda_3)G_{33}(\lambda_3) - G_{31}(\lambda_3)G_{13}(\lambda_3)))D_3 = \beta_{23}D_3,$$

$$A_3^{(3)} = (n_2(G_{21}(\lambda_3)G_{32}(\lambda_3) - G_{31}(\lambda_3)G_{22}(\lambda_3)) + n_1(G_{31}(\lambda_3)G_{12}(\lambda_3) - G_{11}(\lambda_3)G_{32}(\lambda_3)))D_3 = \beta_{33}D_3.$$

Введенные представления для коэффициентов  $A_j^{(3)}$  обладают следующими свойствами

$$\begin{aligned} (A_1^{(3)})_{n_1=0} &= (G_{22}(\lambda_3)G_{33}(\lambda_3) - G_{23}(\lambda_3)G_{32}(\lambda_3))D_3 \neq 0, \\ (A_1^{(3)})_{n_2=0} &= 0; \quad (A_2^{(3)})_{n_1=0} = 0, \\ (A_2^{(3)})_{n_2=0} &= (G_{11}(\lambda_3)G_{33}(\lambda_3) - G_{31}(\lambda_3)G_{13}(\lambda_3))D_3 \neq 0; \\ (A_3^{(3)})_{n_1=0} &= 0, \quad (A_3^{(3)})_{n_2=0} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

устанавливаемыми с учетом соотношений

$$\begin{aligned} (G_{12}(\lambda))_{n_1=0} &= (G_{21}(\lambda))_{n_1=0} = (G_{12}(\lambda))_{n_2=0} = (G_{21}(\lambda))_{n_2=0} = 0, \\ (G_{13}(\lambda))_{n_1=0} &= (G_{31}(\lambda))_{n_1=0} = 0, \\ (G_{23}(\lambda))_{n_2=0} &= (G_{32}(\lambda))_{n_2=0} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

При условии, что величины  $\lambda_3$  принадлежат той ветви корней характеристического уравнения системы (3), которая в предельных случаях  $n_1 = 0$  и  $n_2 = 0$  описывает нормальные волны SH-типа вдоль соответствующего координатного направления  $Ox_j$  в плоскости слоя, представления вида

$$\begin{aligned} u_j(x_1, x_2, x_3, t) &= \sum_{p=1}^3 D_p \beta_{jp} \cos(\lambda_p x_3) \cdot E(\omega, k, n_1, n_2) \quad (j = \overline{1, 2}) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) &= \sum_{p=1}^3 D_p \beta_{jp} \sin(\lambda_p x_3) \cdot E(\omega, k, n_1, n_2) \end{aligned} \quad (10)$$

обладают свойством предельного соответствия в описании структуры волновых полей для всего диапазона угловых параметров направлений распространения  $0 \leq \phi \leq \pi/2$  и могут быть эффективно использованы в дальнейшем теоретическом алгоритме получения верифицируемых дисперсионных соотношения для исследуемых симметричных трехпарциальных локализованных волн при задании соответствующих однотипных контактных краевых условий на противоположных гранях слоя.

По аналогичной схеме формируются представления комплексных функций волновых упругих перемещений в областях, занимаемых вмещающими полупространствами. Так, для полупространства  $V^{(+)}$  в случае задания исходных представлений

$$u_j^{(+)}(x_1, x_2, x_3, t) = B_j \exp(-\alpha x_3) \cdot E(\omega, k, n_1, n_2) \quad (j = \overline{1, 3}) \quad (11)$$

при условии  $\text{Re } \alpha > 0$ , система уравнений движения (3) трансформируется в линейные алгебраические уравнения вида

$$G_{ij}^+(\alpha) B_j = 0 \quad (12)$$

с выражениями  $G_{ij}^+(\alpha)$ , имеющими форму

$$\begin{aligned} G_{11}^+(\alpha) &= \Omega^2 - k^2(c_{11}n_1^2 + c_{66}n_2^2) + c_{55}\alpha^2, \\ G_{22}^+(\alpha) &= \Omega^2 - k^2(c_{66}n_1^2 + c_{22}n_2^2) + c_{44}\alpha^2, \\ G_{33}^+(\alpha) &= \Omega^2 - k^2(c_{55}n_1^2 + c_{44}n_2^2) + c_{33}\alpha^2, \\ G_{12}^+(\alpha) &= G_{21}^+(\alpha) = -k^2(c_{12} + c_{66})n_1n_2, \\ G_{13}^+(\alpha) &= G_{31}^+(\alpha) = -ik(c_{13} + c_{55})n_1\alpha, \\ G_{23}^+(\alpha) &= G_{32}^+(\alpha) = -ik(c_{23} + c_{44})n_2\alpha. \end{aligned} \quad (13)$$

С введением обозначений  $\alpha_p$  ( $\text{Re } \alpha_p > 0$ ,  $p = \overline{1, 3}$ ) для корней соответствующего рассматриваемому случаю варианта бикубического характеристического полинома системы дифференциальных уравнений (3), для соответствующих этим корням нетривиальных решений  $B_j^{(p)}$  системы (12) конструируются представления  $B_j^{(p)} = \eta_{jp} C_p$  с произвольными постоянными коэффициентами  $C_p$

$$\begin{aligned} B_1^{(1)} &= (G_{12}^+(\alpha_1)G_{23}^+(\alpha_1) - G_{22}^+(\alpha_1)G_{13}^+(\alpha_1))C_1, \\ B_2^{(1)} &= (G_{13}^+(\alpha_1)G_{21}^+(\alpha_1) - G_{11}^+(\alpha_1)G_{23}^+(\alpha_1))C_1, \\ B_3^{(1)} &= (G_{11}^+(\alpha_1)G_{22}^+(\alpha_1) - G_{12}^+(\alpha_1)G_{21}^+(\alpha_1))C_1, \\ B_1^{(2)} &= (G_{12}^+(\alpha_2)G_{23}^+(\alpha_2) - G_{22}^+(\alpha_2)G_{13}^+(\alpha_2))C_2, \\ B_2^{(2)} &= (G_{13}^+(\alpha_2)G_{21}^+(\alpha_2) - G_{11}^+(\alpha_2)G_{23}^+(\alpha_2))C_2, \\ B_3^{(2)} &= (G_{11}^+(\alpha_2)G_{22}^+(\alpha_2) - G_{12}^+(\alpha_2)G_{21}^+(\alpha_2))C_2, \\ B_1^{(3)} &= (n_2(G_{22}^+(\alpha_3)G_{33}^+(\alpha_3) - G_{23}^+(\alpha_3)G_{32}^+(\alpha_3)) + \\ &\quad + n_1(G_{13}^+(\alpha_3)G_{32}^+(\alpha_3) - G_{12}^+(\alpha_3)G_{33}^+(\alpha_3)))C_3, \\ B_2^{(3)} &= (n_2(G_{31}^+(\alpha_3)G_{33}^+(\alpha_3) - G_{21}^+(\alpha_3)G_{33}^+(\alpha_3)) + \\ &\quad + n_1(G_{11}^+(\alpha_3)G_{33}^+(\alpha_3) - G_{31}^+(\alpha_3)G_{13}^+(\alpha_3)))C_3, \end{aligned} \quad (14)$$

$$B_3^{(3)} = (n_2(G_{21}^+(\alpha_3)G_{32}^+(\alpha_3) - G_{31}^+(\alpha_3)G_{22}^+(\alpha_3)) + n_1(G_{31}^+(\alpha_3)G_{12}^+(\alpha_3) - G_{11}^+(\alpha_3)G_{32}^+(\alpha_3)))C_3$$

и на этой основе записываются выражения вида

$$u_j^{(+)}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{p=1}^3 C_p \eta_{jp} \exp(-\alpha_p x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - k(n_1 x_1 + n_2 x_2)))$$

$$(j = \overline{1, 3}) \quad (15)$$

для компонент вектора волновых перемещений в полупространстве  $V^{(+)}$ , также дополняемые предположением, что величины  $\alpha_3$  принадлежат ветви корней характеристического полинома системы волновых уравнений для материала полупространства, в предельных случаях  $n_1 = 0$  и  $n_2 = 0$  описывающей нормальные волны SH-типа вдоль соответствующего координатного направления  $Ox_j$  в  $V^{(+)}$ .

Ввиду отражаемой представлением (10) симметрии волнового поля по толщине внутреннего слоя и эквивалентности физико-механических свойств окружающих полупространств, сходная симметрия априори свойственна и волновому полю по всей толщине составного волновода, а контактные краевые условия в рассматриваемой граничной задаче могут быть сформулированы только на одной из поверхностей сопряжения в виде

$$u_j(x_1, x_2, h/2, t) = u_j^{(+)}(x_1, x_2, h/2, t),$$

$$\sigma_{3j}(x_1, x_2, h/2, t) = \sigma_{3j}^{(+)}(x_1, h/2, t) \quad (j = \overline{1, 3}). \quad (16)$$

Отсюда с учетом (10), (15), а также с учетом представлений для входящих в контактные условия механических напряжений

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{p=1}^3 D_p (ik(c_{13}n_1\beta_{1p} + c_{23}n_2\beta_{2p}) + \lambda_p c_{33}\beta_{3p}) \cdot \cos(\lambda_p x_3) \times$$

$$\times E(\omega, k, n_1, n_2),$$

$$\sigma_{32}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{p=1}^3 D_p (ikc_{44}(n_2\beta_{3p} - \lambda_p\beta_{2p})) \cdot \sin(\lambda_p x_3) \cdot E(\omega, k, n_1, n_2),$$

$$\sigma_{31}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{p=1}^3 D_p (ikc_{55}(n_1\beta_{3p} - \lambda_p\beta_{1p})) \cdot \sin(\lambda_p x_3) \cdot E(\omega, k, n_1, n_2),$$

$$\sigma_{33}^{(+)}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{p=1}^3 C_p (ik(c_{13}^{(+)}n_1\eta_{1p} + c_{23}^{(+)}n_2\eta_{2p}) - \alpha_p c_{33}^{(+)}\eta_{3p}) \cdot \exp(-\alpha_p x_3) \times$$

$$\times E(\omega, k, n_1, n_2), \quad (17)$$

$$\sigma_{32}^{(+)}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{p=1}^3 C_p (ikc_{44}^{(+)}(n_2\eta_{3p} - \alpha_p\eta_{2p})) \cdot \exp(-\alpha_p x_3) \cdot E(\omega, k, n_1, n_2),$$

$$\sigma_{31}^{(+)}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{p=1}^3 C_p (ikc_{55}^{(+)}(n_1\eta_{3p} - \alpha_p\eta_{1p})) \cdot \exp(-\alpha_p x_3) \cdot E(\omega, k, n_1, n_2),$$

из (16) следуют соотношения

$$\sum_{p=1}^3 D_p \Delta_{q,p} + \sum_{p=1}^3 C_p \Delta_{q,p+3} = 0 \quad (q = \overline{1, 6}), \quad (18)$$

в которых

$$\begin{aligned} \Delta_{1,p} &= \beta_{1p} \cos(\lambda_p h/2), & \Delta_{1,p+3} &= -\eta_{1p} \exp(-\alpha_p h/2), \\ \Delta_{2,p} &= \beta_{2p} \cos(\lambda_p h/2), & \Delta_{2,p+3} &= -\eta_{2p} \exp(-\alpha_p h/2), \\ \Delta_{3,p} &= \beta_{3p} \sin(\lambda_p h/2), & \Delta_{3,p+3} &= -\eta_{3p} \exp(-\alpha_p h/2), \\ \Delta_{4,p} &= (ik(c_{13}n_1\beta_{1p} + c_{23}n_2\beta_{2p}) + \lambda_p c_{33}\beta_{3p}) \cdot \cos(\lambda_p h/2), \\ \Delta_{4,p+3} &= -(ik(c_{13}^{(+)}n_1\eta_{1p} + c_{23}^{(+)}n_2\eta_{2p}) - \alpha_p c_{33}^{(+)}\eta_{3p}) \cdot \exp(-\alpha_p h/2), \\ \Delta_{5,p} &= c_{44}(ikn_2\beta_{3p} - \lambda_p\beta_{2p}) \cdot \sin(\lambda_p h/2), \\ \Delta_{5,p+3} &= -c_{44}^{(+)}(ikn_2\eta_{3p} - \alpha_p\eta_{2p}) \cdot \exp(-\alpha_p h/2), \\ \Delta_{6,p} &= c_{55}(ikn_1\beta_{3p} - \lambda_p\beta_{1p}) \cdot \sin(\lambda_p h/2), \\ \Delta_{6,p+3} &= -c_{55}^{(+)}(ikn_1\eta_{3p} - \alpha_p\eta_{1p}) \cdot \exp(-\alpha_p h/2). \end{aligned} \quad (19)$$

Из соотношений (18) в качестве конечного результата следует дисперсионное уравнение для рассматриваемых локализованных волн, записываемое в форме равенства нулю определителя матрицы системы алгебраических уравнений (18)

$$F(\omega, k) = \det \|\Delta_{qm}\| \quad (q, m = \overline{1, 6}) \quad (20)$$

с элементами  $\Delta_{qm}$ , задаваемыми выражениями (19).

**Качественный и численный анализ дисперсионного соотношения.** Первичный анализ существования бегущих волн исследуемого типа при различных сочетаниях физико-механических свойств слоя и окружающих полупространств базируется на качественном исследовании распределений корней характеристических полиномов систем волновых дифференциальных уравнений для компонентов рассматриваемого волновода.

В области существования локализованных бегущих волн исследуемого типа на множестве  $\{\omega \in [0, \infty), k \in [0, \infty)\}$  значения корней  $\alpha_p$  характеристического полинома для волновых уравнений в материале полупространства должны быть действительными. Соответственно множество изменения  $(\omega, k)$  для каждого из материалов компонентов волновода в общем случае подразделяется на четыре секторных

подобласти, в которых значения  $\lambda_p$ ,  $\alpha_p$  сохраняют определенный постоянный тип. Границами этих подобластей для материала слоя являются оси  $O\Omega$ ,  $Ok$  и прямые

$$\Omega = \vartheta_j(n_1, n_2)k,$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{1,2}(n_1, n_2) &= (1/2)(c_{11}n_1^2 + c_{22}n_2^2 + c_{66}) \pm ((1/4)(c_{11}n_1^2 + c_{22}n_2^2 + c_{66})^2 - \\ &\quad - c_{11}c_{66}n_1^4 - c_{22}c_{66}n_2^4 - (c_{12}^2 + 2c_{12}c_{66} - c_{11}c_{22})n_1^2n_2^2)^{1/2}, \\ \vartheta_3(n_1, n_2) &= (c_{55}n_1^2 + c_{44}n_2^2)^{1/2}, \quad \Omega = (\rho\omega^2 R_*^2 / c_*)^{1/2}, \end{aligned}$$

где  $R_*$ ,  $c_*$  – соответственно нормирующие параметры для величин с линейными размерностями расстояний и размерностями механических напряжений. Аналогичные подобласти, описываемые сходными соотношениями, могут быть выделены применительно к материалу полупространств, и, в конечном счете, областью существования исследуемых локализованных волн является пересечение указанных подобластей для обоих материалов компонентов рассматриваемого волновода, в котором все корни обоих характеристических уравнений являются действительными. Численный анализ полученных дисперсионных уравнений реализован применительно к волноводной структуре рассматриваемого типа, в которой материалом слоя является песчаный сланец с отнесенными к нормирующим параметрам  $\rho_* = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_* = 10^{10}$  Па физико-механическими постоянными [12]

$$\rho = 2.95, \quad c_{11} = 0.66, \quad c_{22} = 0.66, \quad c_{33} = 1.15, \quad c_{12} = 0.29,$$

$$c_{13} = 0.19, \quad c_{23} = 0.19, \quad c_{44} = 0.12, \quad c_{55} = 0.12, \quad c_{66} = 0.18,$$

а материалом полупространств является минерал галит (хлорид натрия) с физико-механическими постоянными [12]

$$\rho = 2.17, \quad c_{11} = 4.96, \quad c_{22} = 4.96, \quad c_{33} = 4.96, \quad c_{12} = 1.31,$$

$$c_{13} = 1.31, \quad c_{23} = 1.31, \quad c_{44} = 1.28, \quad c_{55} = 1.28, \quad c_{66} = 1.28.$$

На рисунках 1–2 соответственно представлены результаты расчетов фрагментов дисперсионных спектров бегущих локализованных волн для трех направлений распространения с угловыми параметрами  $\phi = 5^\circ$  и  $\phi = 44^\circ$ . Анализ этих распределений указывает на то, что различия в топологических картинах распределения действительных ветвей спектров нарастают с увеличением номера моды, в то время как для нижней моды качественные и количественные отличия характеристик траектории в рассматриваемом случае малы за исключением низкочастотной длинноволновой области. Визуально проявляющиеся эффекты пересечения ветвей дисперсионных спектров в действительности соответствуют предельно тесному сближению без касания и последующему «расталкиванию» соответствующих ветвей, отражающему так называемый механизм «обмены свойствами» для волн из соседних мод. Можно также указать на существование двух асимптотических направлений для множества



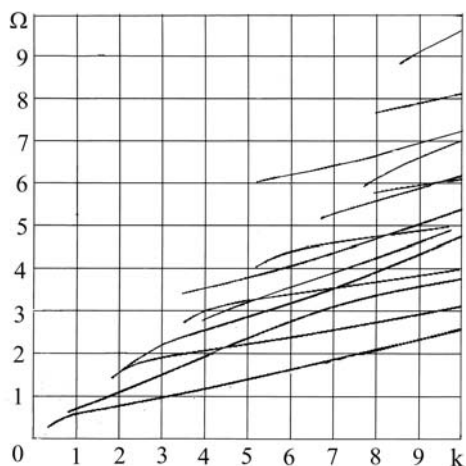


Рис. 1. Ветви спектра исследуемых волн для направления распространения с угловым параметром  $\phi = 5^\circ$

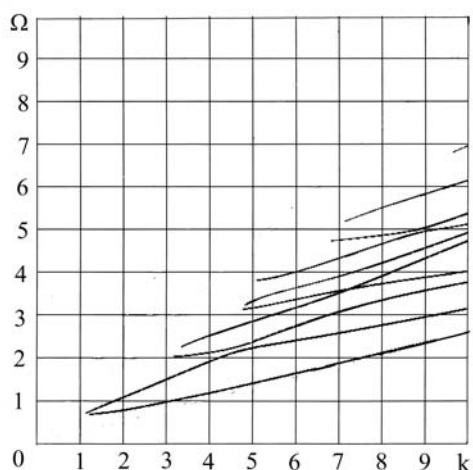


Рис. 2. Ветви спектра исследуемых волн для направления распространения с угловым параметром  $\phi = 44^\circ$

рассматриваемых дисперсионных кривых в высокочастотном коротковолновом диапазоне, определяемых физико-механическими свойствами компонентов волновода.

**Выводы.** В результате проведенных исследований получены аналитические представления для комплексных функций напряженности трехпарциальных симметричных локализованных упругих волн произвольно ориентированного направления в плоскости ортотропного деформируемого слоя, идеально контактирующего по граням с однотипными по физико-механическим свойствам вмещающими ортотропными полупространствами, включая упруго-эквивалентные координатные направления. Для волн исследуемого типа получено дисперсионное соотношение в форме равенства нулю функционального определителя шестого порядка. Описана процедура качественного анализа дисперсионного спектра локализованных волн с выделением вмещающей его действительные ветви секторной подобласти. Получен и частично проанализирован ряд результатов расчетов действительных ветвей спектров для двух направлений распространения в волноводе из геоматериалов в виде слоя из песчаного сланца, вмещенного между полупространствами из галита. Области использования результатов представленного исследования являются геоакустика, ультразвуковой диагностики и акустоэлектроника.

1. White J.E. Underground sound. application of seismic waves. – Elsevier Science Publishers B.V., 1983. – 270 p.
2. Hoven J.M. Acoustic waves in finely layered media // Geophysics. – 1995. – **7.60**, № 4. – P. 1217–1221.
3. Rose J.L. Ultrasonic waves in solid media. – Cambridge University Press, 2004. – 454 p.
4. Григорян В.Г., Вендлер Л. Локализованные акустические волны в слоистых структурах // Физика твердого тела. – 1991. – **33**, № 7. – С. 2120–2128.
5. Velasco V.R., Djafari-Rouhani B. Dynamics of systems with two interfaces // Phys. Rev. – 1982. –

- В 26.** – P. 1929–1941.
6. *Wendler L., Grigoryan V.G.* Acoustic interface waves in sandwich structures // *Surface Science.* – 1988. – **206.** – P. 203–224.
  7. *Глухов И.А., Сторожев В.И.* Симметричные упругие волны в трансверсально-изотропном слое между односторонними трансверсально-изотропными полупространствами // *Теоретическая и прикладная механика.* – 2014. – № 8 (54). – С. 114–122.
  8. *Глухов И.А., Сторожев В.И.* Локализованные P-SV волны в трансропном слое между трансропными полупространствами при условиях скользящего контакта // *Теоретическая и прикладная механика.* – 2014. – № 9 (55). – С. 71–81.
  9. *Глухов И.А., Сторожев В.И.* Локализованные антисимметричные волны в структуре "трансверсально-изотропный слой между трансверсально-изотропными полупространствами" // *Механика твердого тела.* – 2014. – Вып. 44. – С. 122–131.
  10. *Datta S.K.* On ultrasonic guided waves in a thin anisotropic layer lying between two isotropic layers // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2000. – **108.** – P. 2005–2011.
  11. *Ting T.C.T.* Steady waves in an anisotropic elastic layer attached to a half-space or between two half-spaces – A generalization of Love waves and Stoneley waves // *Mathematics and mechanics of solids.* – 2009. – **14,** № 1–2. – P. 52–71.
  12. *Капитонов А.М., Васильев В.Г.* Физические свойства горных пород западной части Сибирской платформы – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011. – 425 с.

**I. A. Glukhov, V. I. Storozhev**

**The dispersion properties of localized elastic waves in a orthotropic layer between orthotropic half-spaces.**

Are presented the obtaining of the numerical-analytical solution for the tree-dimensional problem of the propagation of localized elastic waves along arbitrarily oriented directions in the plane orthotropic deformable layer between two similar orthotropic half-spaces. In the case of waves with symmetrical along layer thickness elastic displacements are obtained and qualitatively analyzed the general dispersion relations. The results of calculations of fragment spectra for waves of the analyzed type for considered waveguide with the components from the real orthotropic materials are obtained. Are characterized the changes in the topology of the spectra caused by varying the orientation of the direction of propagation.

**Keywords:** *orthotropic layer between orthotropic half-spaces, perfect mechanical contact, symmetrical tree-dimensional localized elastic waves, the transcendental dispersion equation, asymptotic and numerical analysis, the waveguide of real materials, calculations the branches of the spectrum of traveling waves.*

Донецкий национальный ун-т  
stvi@i.ua

Получено 21.09.15