

УДК 539.3

©2015. Н. С. Бондаренко, А. С. Гольцев

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДЛИНЫ РАЗРЕЗА НА КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ НА БАЗЕ ОБОБЩЁННОЙ ТЕОРИИ

На базе обобщённой теории решена задача термоупругости для изотропной пластины, содержащей теплоизолированный разрез. Рассмотрен случай произвольного теплообмена с внешней средой. С использованием двумерного интегрального преобразования Фурье и теории обобщённых функций получены интегральные представления внутренних силовых факторов и разрешающие системы сингулярных интегральных уравнений. Исследовано влияние длины разреза на максимальные значения коэффициентов интенсивности напряжений для поперечного и продольного сдвига.

**Ключевые слова:**  $\{1,0\}$ -аппроксимация, полиномы Лежандра, теплоизолированный разрез, сингулярные интегральные уравнения, коэффициенты интенсивности напряжений.

**1. Введение.** Элементы конструкций и инженерных сооружений часто подвергаются действию не только механических, но и тепловых воздействий. Концентраторы напряжений (например, дефекты типа трещин), имеющиеся в пластинчатом элементе, существенно влияют на его напряжённо-деформированное состояние, а, следовательно, и на срок «жизни». Для решения задачи о прочности элемента конструкции, ослабленного дефектами, необходимо определять коэффициенты интенсивности напряжений (КИН). На КИН могут оказывать существенное влияние характер и интенсивность теплообмена с внешней средой, а также размеры концентратора напряжений.

Поэтому актуальной задачей является построение расчётных моделей и методов расчёта, которые позволяют учитывать влияние указанных факторов. Об актуальности задач термомеханики разрушения свидетельствуют работы, опубликованные в последние годы: монография [1], статьи [2–5].

В данной статье определение КИН для поперечного и продольного сдвига, обусловленных наличием возмущённого температурного поля, осуществляется на базе обобщённой теории в варианте  $\{1,0\}$ -аппроксимации (обобщённой теории С.П. Тимошенко). При этом искомые функции задачи термоупругости раскладываются в ряды Фурье по полиномам Лежандра  $P_k$  от толщины координаты [6, 7]. Такой подход позволяет рассматривать не только тонкие пластины, но и пластины средней и большой толщины.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим изотропную пластину толщины  $2h$  в прямоугольной декартовой системе координат  $x, y, z$ . Пластина содержит теплоизолированный разрез  $L$ . Предполагаем, что длина разреза значительно меньше линейных параметров пластины, а сам разрез достаточно удалён от её краёв. На лицевых поверхностях пластины происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с внешней средой нулевой температуры.

В рамках  $\{1,0\}$ -аппроксимации имеют место такие представления [6, 7]:

- температура

$$T = T_0 P_0 + T_1 P_1;$$

- компоненты вектора перемещений

$$u_x = u P_0 + \gamma_x h P_1; \quad u_y = v P_0 + \gamma_y h P_1; \quad u_z = w_0 P_0;$$

- компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{N_x}{2h} P_0 + \frac{3M_x}{2h^2} P_1 \quad (x \rightarrow y); & \tau_{xy} &= \frac{S}{2h} P_0 + \frac{3H}{2h^2} P_1; \\ \tau_{xz} &= \frac{Q_{x0}}{2h} (P_0 - P_2) \quad (x \rightarrow y); & \sigma_z &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $T_0$  – средняя температура;  $T_1$  – температурный момент;  $u, v, w_0, \gamma_x, \gamma_y$  – обобщённые перемещения;  $N_x, N_y, S$  – обобщённые мембранные усилия;  $M_x, M_y, H$  – обобщённые моменты;  $Q_{x0}, Q_{y0}$  – обобщённые перерезывающие силы.

Система уравнений термоупругости  $\{1,0\}$ -аппроксимации для изотропных пластин, записанная в безразмерной системе координат  $x_1 = x/h, x_2 = y/h, x_3 = z/h$ , включает в себя [6, 7]

- первое приближение трёхмерного уравнения теплопроводности

$$\Delta T_k + A_{k0} T_0 + A_{k1} T_1 = 0 \quad (k = 0, 1), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \quad (2)$$

- уравнения Дюамеля–Неймана в перемещениях

$$\begin{aligned} N_1 &= B_0 \{ \partial_1 u + \nu \partial_2 v - \alpha(1 + \nu) T_0 \}; & N_2 &= B_0 \{ \partial_2 v + \nu \partial_1 u - \alpha(1 + \nu) T_0 \}; \\ S &= \frac{1 - \nu}{2} B_0 (\partial_2 u + \partial_1 v); & H &= \frac{1 - \nu}{2} D_0 (\partial_2 \gamma_1 + \partial_1 \gamma_2); \\ M_1 &= D_0 \{ \partial_1 \gamma_1 + \nu \partial_2 \gamma_2 - \alpha(1 + \nu) T_1 \}; & M_2 &= D_0 \{ \partial_2 \gamma_2 + \nu \partial_1 \gamma_1 - \alpha(1 + \nu) T_1 \}; \\ Q_{j0} &= \Lambda_0 (\gamma_j + \partial_j w_0) \quad (j = 1, 2); \end{aligned} \quad (3)$$

- уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \partial_1 N_1 + \partial_2 S &= 0; & \partial_1 S + \partial_2 N_2 &= 0; \\ \partial_1 M_1 + \partial_2 H - Q_{10} &= 0; & \partial_1 H + \partial_2 M_2 - Q_{20} &= 0; & \partial_1 Q_{10} + \partial_2 Q_{20} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $A_{kj}$  ( $k, j = 0, 1$ ) – известные коэффициенты [8], зависящие от параметров теплообмена  $Bi^\pm$  на лицевых поверхностях пластины ( $x_3 = \pm 1$ );  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\alpha$  – температурный коэффициент линейного расширения;

$$B_0 = 3D_0 = \frac{2}{1 - \nu^2}; \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2); \quad \Lambda_0 = \frac{5}{6(1 + \nu)}.$$

Мембранные усилия и перерезывающие силы в (3) определены с точностью до значения  $Eh$  ( $E$  – модуль Юнга), а моменты – с точностью до  $Eh^2$ .

Первые три уравнения Дюамеля–Неймана (3) и первые два уравнения равновесия (4) описывают безмоментное термоупругое состояние. Остальные уравнения (3), (4) описывают состояние термоупругого изгиба.

Заметим, что в случае симметричного теплообмена, когда параметры теплообмена на лицевых поверхностях пластины равны ( $Bi^+ = Bi^-$ ) система уравнений термоупругости (2)–(4) распадается на две независимых системы, первая из которых описывает безмоментное термоупругое состояние, а вторая – состояние термоупругого изгиба. В случае произвольного теплообмена с внешней средой эти системы не являются независимыми.

Граничные условия на линии теплоизолированного разреза  $L$  в предположении свободных берегов разреза и отсутствия контакта между ними имеют вид [9]

- для задачи теплопроводности (2):

$$\frac{\partial T_k}{\partial n} = 0 \quad (k = 0, 1). \quad (5)$$

- для задачи термоупругости (3), (4):

$$N_n|_L = 0; \quad S_{nt}|_L = 0; \quad M_n|_L = 0; \quad H_{nt}|_L = 0; \quad Q_n|_L = 0. \quad (6)$$

Здесь  $\vec{n} = (n_1, n_2)$  – нормаль к линии разреза  $L$ ;

$$\begin{aligned} N_n &= n_1^2 N_1 + 2n_1 n_2 S + n_2^2 N_2; & S_{nt} &= n_1 n_2 (N_1 - N_2) + (n_2^2 - n_1^2) S; \\ M_n &= n_1^2 M_1 + 2n_1 n_2 H + n_2^2 M_2; & H_{nt} &= n_1 n_2 (M_1 - M_2) + (n_2^2 - n_1^2) H; \\ Q_n &= n_1 Q_{10} + n_2 Q_{20}. \end{aligned}$$

Компоненты термоупругого состояния пластины с разрезом  $G^*$  представляются в виде суммы [10]:

$$G^* = G^{\text{осн}} + G, \quad (7)$$

где  $G^{\text{осн}}$  – компоненты основного термоупругого состояния, т.е. термоупругого состояния в сплошной пластине, которое предполагается известным;  $G$  – компоненты возмущённого термоупругого состояния, вызванного наличием разреза.

Ввиду принятых предположений о размере и положении разреза возмущённое термоупругое состояние пластины локализовано в непосредственной окрестности рассматриваемого разреза.

Компоненты возмущённого термоупругого состояния  $G$  определяются из системы дифференциальных уравнений (2)–(4). Граничные условия для компонент  $G$  следуют из условий (5), (6) и представлений (7) и имеют вид

- для задачи теплопроводности (2):

$$\frac{\partial T_k}{\partial n} \Big|_L = - \frac{\partial T_k^{\text{осн}}}{\partial n} \Big|_L \quad (k = 0, 1); \quad (8)$$

- для задачи термоупругости (3), (4):

$$\begin{aligned} N_n|_L &= -N_n^{\text{очн}}|_L; & S_{nt}|_L &= -S_{nt}^{\text{очн}}|_L; \\ M_n|_L &= -M_n^{\text{очн}}|_L; & H_{nt}|_L &= -H_{nt}^{\text{очн}}|_L; & Q_n|_L &= -Q_n^{\text{очн}}|_L. \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку разрез  $L$  предполагается малым и расположенным на значительном удалении от краёв пластины, то компоненты возмущённого термоупругого состояния  $G$  не распространяются до линии внешней границы и определяются лишь условиями, заданными на линии разреза.

**3. Методика решения задачи.** К системе уравнений термоупругости (2)–(4) применим двумерное интегральное преобразование Фурье с учётом разрывного характера искомых функций на линии разреза  $L$  [10]:

$$F(\partial_j G) = (-i\xi_j)\tilde{G} + \frac{1}{2\pi} \int_L n_j [G] \exp i(\vec{\xi}, \vec{x}') dL \quad (j = 1, 2). \quad (10)$$

Здесь  $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$  – координаты текущей точки в пространстве трансформант;  $[G] = G^+ - G^-$  – скачок функции  $G$  при переходе через линию  $L$  ( $G^\pm$  – граничные значения функции  $G$  в соответствии с выбранным направлением нормали  $\vec{n}$ );  $\vec{x}' = (x'_1, x'_2)$  – координаты точки на линии  $L$ . Направление интегрирования образует прямой угол с нормалью  $\vec{n}$  при вращении против часовой стрелки.

Решение задачи теплопроводности (2) с граничными условиями (8) построено в статье [11]. Здесь дадим решение задачи термоупругости (3), (4), (9).

Применяя двумерное интегральное преобразование Фурье (10) к системе (3), (4), запишем трансформанты внутренних силовых факторов

$$\tilde{P}_j^q = \frac{1}{2\pi} \int_L \sum_{k=1}^{\kappa_{q,j}} \tilde{K}_{jk}^q \psi_k^q \exp i(\vec{\xi}, \vec{x}') dL \quad (q = 0, 1; j = \overline{1, 2q+3}). \quad (11)$$

Здесь  $\kappa_{q,j} = 3q + 4$  при  $q = 0, 1, j = \overline{1, 3}$ ;  $\kappa_{q,j} = 5$  при  $q = 1, j = 4, 5$ ; верхними индексами  $q = 0$  и  $q = 1$  обозначены компоненты безмоментного термоупругого состояния и состояния термоупругого изгиба соответственно;

$$P_j^0 = N_j; \quad P_j^1 = M_j; \quad P_{j+3}^1 = Q_{j0} \quad (j = 1, 2); \quad P_3^0 = S; \quad P_3^1 = H;$$

$\tilde{K}_{jk}^q$  – трансформанты ядер интегральных представлений, например,

$$\tilde{K}_{11}^1 = -\frac{2}{3} \left\{ \frac{i\xi_2^3}{p^4} + 3\Lambda_0 \frac{i\xi_1^2 \xi_2}{p^4(p^2 + 2,5)} \right\}, \quad p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2; \quad (12)$$

$\psi_j^q = \psi_j^q(s)$  – неизвестные функции ( $s$  – длина дуги кривой  $L$ ):

$$\psi_1^0 = \frac{d[u]}{ds}; \quad \psi_2^0 = \frac{d[v]}{ds}; \quad \psi_3^0 = \psi_6^1 = [T_0]; \quad \psi_4^0 = \psi_7^1 = [T_1];$$

$$\psi_j^1 = \frac{d[\gamma_j]}{ds}; \quad \psi_{j+3}^1 = [\gamma_j] \quad (j = 1, 2); \quad \psi_3^1 = \frac{d[w_0]}{ds}.$$

Методика обращения трансформант ядер интегральных представлений (11) подробно описана в статьях [12, 13]. Она основана на формуле обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье (10) и интегральном представлении специальной  $G$ -функции [14]

$$G_{n,\nu}(rz) = (-1)^n \left(\frac{r}{2}\right)^{\nu-n} \int_0^\infty \frac{\rho^{\nu-n+1} J_{\nu+n}(r\rho)}{\rho^2 + z^2} d\rho,$$

где  $J_\nu(z)$  – функция Бесселя первого рода порядка  $\nu$ ;

$$r > 0; \quad \operatorname{Re} z > 0; \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < n + 1,5.$$

Например, ядро (12) в пространстве оригиналов имеет вид:

$$K_{11}^1 = -\frac{\sin \varphi}{3r} (3 - 2 \sin^2 \varphi) + \frac{\Lambda_0 r}{4} \left\{ \sin \varphi G_{1,0}(\sqrt{2,5}r) + \sin 3\varphi G_{2,1}(\sqrt{2,5}r) \right\},$$

где

$$r = \sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}; \quad \cos \varphi = \frac{\bar{x}_1}{r}; \quad \sin \varphi = \frac{\bar{x}_2}{r}; \quad \bar{x}_1 = x_1 - x'_1; \quad \bar{x}_2 = x_2 - x'_2.$$

Рассмотрим прямолинейный теплоизолированный разрез длины  $2l$ , расположенный вдоль оси  $Ox_1$  симметрично относительно начала координат:

$$L = \{(x_1, x_2) \in R^2 : |x_1| \leq l, x_2 = 0\}. \quad (13)$$

Для разреза (13) оригиналы искомых функций (11) примут вид ( $x'_1 = ls$ ):

$$P_j^q(x_1, x_2) = -\frac{l}{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^{\kappa_{q,j}} K_{jk}^q(x_1 - ls, x_2) \psi_k^q ds \quad (q = 0, 1; j = \overline{1, 2q+3}). \quad (14)$$

Подставляя интегральные представления компонент термоупругого состояния (14) в граничные условия (9), получим системы сингулярных интегральных уравнений (СИУ), описывающие

- безмоментное термоупругое состояние:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^0(s) ds}{s - \zeta} = F_j^0(\zeta) \quad (j = 1, 2; |\zeta| \leq 1); \quad (15)$$

- состояние термоупругого изгиба:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_j^1(s) ds}{s - \zeta} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^3 \int_{-1}^1 E_{jk}^1(\zeta - s) \psi_j^1(s) ds = F_j^1(\zeta) \quad (j = \overline{1, 3}; |\zeta| \leq 1), \quad (16)$$

где  $E_{jk}^1$  – ядра интегральных уравнений.

Правые части систем СИУ (15), (16) имеют вид:

$$F_1^q(\zeta) = -(q+2)(P_3^q)^{\text{очн}}|_{x_2=0} + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^1 \int_{-1}^1 D_m^q(\zeta-s)[T_m]ds \quad (q=0,1);$$

$$F_2^q(\zeta) = -(q+2)(P_2^q)^{\text{очн}}|_{x_2=0} \quad (q=0,1); \quad F_3^1(\zeta) = -\frac{1}{\Lambda_0}(P_5^1)^{\text{очн}}|_{x_2=0}.$$

Здесь разностные ядра  $D_m^q(\zeta-s)$  ( $m, q=0,1$ ) представляют собой линейные комбинации специальной  $G$ -функции, зависящие от параметров теплообмена  $B_i^\pm$ .

В системе (16) ненулевые разностные ядра  $E_{jk}^q(\zeta-s)$  представляют собой линейные комбинации специальной  $G$ -функции и её первообразной  $IG_{n,\nu}(z)$ , причём лишь одно ядро имеет логарифмическую особенность:

$$E_{31}^1(\zeta-s) = -\frac{l+1}{2}G_{0,0}(\sqrt{2,5}l|\zeta-s|) - \frac{1}{2}G_{1,1}(\sqrt{2,5}l|\zeta-s|) + 0,5 \ln \frac{\gamma\sqrt{2,5}l}{2} - 0,25,$$

что обусловлено асимптотическими свойствами специальной  $G$ -функции [14]

$$G_{0,0}(z) \approx -\ln \frac{\gamma z}{2}, \quad G_{1,1}(z) \approx -0,5 \quad (|z| \ll 1); \quad \ln \gamma = C = 0,5772\dots$$

Из непрерывности обобщённых перемещений в вершинах разреза следуют дополнительные ограничения на искомые функции:

$$\int_{-1}^1 \psi_j^q(s)ds = 0 \quad (q=0,1; j=\overline{1, q+2}). \quad (17)$$

Решение системы СИУ (15) при ограничениях (17) в классе функций, неограниченных на обоих концах отрезка  $[-1, 1]$  имеет вид [15]:

$$\psi_j^0(\zeta) = -\frac{1}{\pi\sqrt{1-\zeta^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-s^2}}{s-\zeta} F_j^0(s)ds \quad (j=1,2). \quad (18)$$

Система (16) представляет собой систему СИУ типа Коши первого рода, которая при ограничениях (17) может быть решена методом механических квадратур [15]. Для вычисления интегралов с логарифмической особенностью используются известные квадратурные формулы [16].

Термоупругое состояние вблизи концов разреза вследствие наличия ядер Коши в интегральных представлениях (14) имеет сингулярный характер с особенностью вида  $r^{-1/2}$  [15].

Пусть на линии разреза (13) основное термоупругое состояние таково, что

$$N_y^{\text{очн}}|_{y=0} = S^{\text{очн}}|_{y=0} = M_y^{\text{очн}}|_{y=0} = H^{\text{очн}}|_{y=0} = Q_{y0}^{\text{очн}}|_{y=0} = 0 \quad (|x| \leq lh). \quad (19)$$

Тогда на основании представления интегралов типа Коши в окрестностях концов линии интегрирования [17] получим следующие выражения для напряжений вблизи концов разреза:

$$\begin{aligned}\tau_{xy}^{\pm} &= \mp \frac{E}{4\sqrt{2hlr}} \left\{ P_0 \lim_{x' \rightarrow \pm lh} \left[ \psi_1^0(x') \sqrt{l^2 h^2 - x'^2} \right] + P_1 \lim_{x' \rightarrow \pm lh} \left[ \psi_1^1(x') \sqrt{l^2 h^2 - x'^2} \right] \right\}; \\ \tau_{yz}^{\pm} &= \mp \frac{E\Lambda_0}{4\sqrt{2hlr}} (P_0 - P_2) \lim_{x' \rightarrow \pm lh} \left[ \psi_3^1(x') \sqrt{l^2 h^2 - x'^2} \right].\end{aligned}\quad (20)$$

Исходя из определения КИН [18] получим выражения КИН для поперечного ( $K_{II}$ ) и продольного сдвига ( $K_{III}$ ):

$$\begin{aligned}K_{II}^{\pm} &= \mp \frac{\sqrt{\pi hl} E}{4} \left\{ P_0 \lim_{s \rightarrow \pm 1} \left[ \psi_1^0(s) \sqrt{1 - s^2} \right] + P_1 \lim_{s \rightarrow \pm 1} \left[ \psi_1^1(s) \sqrt{1 - s^2} \right] \right\}; \\ K_{III}^{\pm} &= \mp \frac{\sqrt{\pi hl} E \Lambda_0}{4} (P_0 - P_2) \lim_{s \rightarrow \pm 1} \left[ \psi_3^1(s) \sqrt{1 - s^2} \right].\end{aligned}$$

Модуль  $K_{II}^{\pm}$  принимает максимальное значение на одной из лицевых поверхностей пластины  $z = h$  или  $z = -h$ , а модуль  $K_{III}^{\pm}$  достигает максимального значения в срединной плоскости пластины  $z = 0$ , причём

$$\begin{aligned}K_{II}^{\max} &= \frac{\sqrt{\pi hl} E}{4} \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ (|\psi_1^0(s)| + |\psi_1^1(s)|) \sqrt{1 - s^2} \right\}; \\ K_{III}^{\max} &= \frac{3\sqrt{\pi hl} E \Lambda_0}{8} \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ |\psi_3^1(s)| \sqrt{1 - s^2} \right\}.\end{aligned}\quad (21)$$

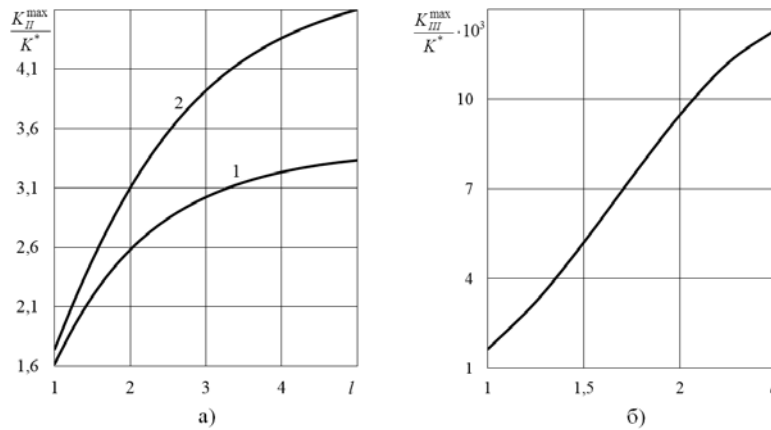
**4. Анализ результатов численных исследований.** Проведены численные исследования влияния половины длины  $l$  прямолинейного разреза (13) на максимальные значения КИН для поперечного и продольного сдвига (21). Коэффициент Пуассона принимался равным  $\nu = 0,3$ . Для анализа поведения КИН, обусловленных наличием возмущённого температурного поля, предполагалось отсутствие внутренних силовых факторов основного термоупругого состояния, т. е. выполнение условий (19).

Основное температурное поле предполагалось таким, что на линии разреза действует лишь однородный тепловой поток:

$$\partial_2 T_0^{\text{очн}}|_{x_2=0} = q_0 = \text{const} \neq 0, \quad \partial_2 T_1^{\text{очн}}|_{x_2=0} = 0 \quad (|x_1| \leq l).$$

Результаты расчётов для максимальных по модулю значений КИН представлены на рис. 1а, б. При этом рис. 1а соответствует КИН для поперечного сдвига  $K_{II}^{\max}$ , а рис. 1б – КИН для продольного сдвига  $K_{III}^{\max}$ . Значения КИН даны с точностью до величины  $K^* = 0,25\alpha q_0 l E \sqrt{lh}$ .

Рассматривались два вида теплообмена с внешней средой на лицевых поверхностях пластины:

Рис. 1. Влияние половины длины разреза  $l$  на максимальные значения КИИ

- симметричный ( $Bi^+ = Bi^- = Bi$ ) – кривая 1 на рис. 1а;
- верхний односторонний ( $Bi^+ = Bi$ ;  $Bi^- = 0$ ) – кривая 2 на рис. 1а и кривая на рис. 1б.

При этом параметр теплообмена  $Bi$  брался равным 0,1. Значения  $K_{III}$  равны нулю в случае симметричного теплообмена с внешней средой.

**5. Выводы.** Анализ результатов, представленных на рис. 1, показывает, что зависимость коэффициентов интенсивности для поперечного и продольного сдвига от длины разреза соответствует общим закономерностям механики разрушения: с увеличением длины разреза КИИ увеличиваются. Причём на характер этих зависимостей существенно влияют параметры, определяющие условия температурного нагружения. Так, максимальные значения КИИ для поперечного сдвига  $K_{II}$  при одностороннем теплообмене с внешней средой существенно больше, чем в условиях симметричного теплообмена.

Коэффициент интенсивности для продольного сдвига  $K_{III}$  при симметричном теплообмене отсутствует, а его абсолютные значения на три порядка меньше, чем значения  $K_{II}$ . Поэтому при оценке несущей способности тонкостенных элементов конструкций при наличии постоянных по толщине тепловых потоков коэффициент интенсивности для продольного сдвига можно не учитывать.

1. Саврук М.П. Двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами / М. П. Саврук, В. М. Зеленьяк. – Львів: Растр-7, 2009. – 211 с.
2. Зеленьяк В.М. Дослідження термопружного стану двовимірних композитних тіл з тріщинами / В.М. Зеленьяк // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2014. – **50**, № 1. – С. 18–24.
3. Кіт Г.С. Напружений стан тіл з термічними циліндричними включеннями та тріщинами (плоска деформація) / Г.С. Кіт, М.С. Черняк // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2010. – **46**, № 3. – С. 30–37.
4. Кіт Г.С. Осесиметричні задачі теплопровідності та термопружності для тіла з теплоактивним або теплоізолюваним дисковим включенням (тріщиною) / Г.С. Кіт, О.П. Сушко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 58–70.



5. *Zelenyak V.M.* Thermoelastic interaction of a two-component circular inclusion with a crack in the plate / V.M. Zelenyak // *Materials Science*. – 48, № 3, November 2012. – P. 301–307.
6. *Пелех Б.Л.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б.Л. Пелех, В.А. Лазько. – К.: Наук. думка, 1982. – 296 с.
7. *Пелех Б.Л.* Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек / Б. Л.Пелех, М.А. Сухорольский. – К.: Наук. думка, 1980. – 216 с.
8. *Bondarenko N.S.* Solution of the heat conduction problem for anisotropic plates under concentrated thermal loading using legendre polynomials / N.S. Bondarenko, A.S. Gol'tsev // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2011. – 174, № 3. – P. 400–414.
9. *Кит Г.С.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г.С. Кит, М.Г. Кривцун. – К.: Наук. думка, 1984. – 280 с.
10. *Шевченко В.П.* Задачи термоупругости тонких оболочек с разрезами: учебное пособие / В.П. Шевченко, А.С. Гольцев. – К.: УМК ВО, 1988. – 84 с.
11. *Бондаренко Н.С.* Использование обобщенной теории в задачах теплопроводности для изотропных пластин с теплоизолированным разрезом / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // *Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А*. – 2012. – Вип. 1. – С. 26–32.
12. *Бондаренко Н.С.* Коэффициенты интенсивности напряжений при термоупругом изгибе изотропных пластин с теплоизолированным разрезом в случае симметричного теплообмена / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // *Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А*. – 2013. – Вип. 1. – С. 20–26.
13. *Бондаренко Н.С.* Исследование влияния внешней среды на термоупругое состояние изотропной пластины с теплоизолированным разрезом при одностороннем теплообмене / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2014. – № 9 (55). – С. 42–52.
14. *Хижняк В.К.* Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учебное пособие // В.К. Хижняк, В.П. Шевченко. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.
15. *Панасюк В.В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацьшин. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
16. *Панасюк В.В.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, З.Т. Назарчук. – К.: Наук. думка, 1984. – 344 с.
17. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
18. *Партон В.З.* Механика упругопластического разрушения / В.З. Партон, Е.М. Морозов. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 504 с.

N. S. Bondarenko, A. S. Goltsev

**Investigation of the influence of cut length on the stress intensity factors in an isotropic plate on the basis of generalized theory.**

The thermoelastic problem for an isotropic plate with heat-insulated cut is solved on the basis of the generalized theory. The case of arbitrary heat exchange with the environment is considered. The integral representations of internal power factors and systems of singular integral equations leading to decision are obtained by using two-dimensional Fourier transform and the theory of generalized functions. The influence of cut length on the maximum values of stress intensity factors for the transverse and longitudinal shear is investigated.

**Keywords:**  $\{1,0\}$ -approximation, Legendre polynomials, heat-insulated cut, singular integral equations, stress intensity factors.

Донецкий национальный ун-т  
Ин-т прикл. математики и механики, Донецк  
bondarenko\_n\_s@mail.ru  
a.s.goltsev@gmail.com

Получено 03.10.15