УДК 531.38

©2014. **Е. А. Игнатова**

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В работе рассмотрен один из случаев интегрируемости уравнений движения гиростата с неподвижной точкой в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона, характеризующийся двумя линейными инвариантными соотношениями. Для случая, когда гирационный эллипсоид не является сферой, получены формулы, позволяющие установить зависимость вспомогательной переменной от времени.

Ключевые слова: *эффект Барнетта–Лондона, гиростат, метод инвариантных соотношений.*

1. Введение. Уравнения движения сверхпроводящего твердого тела и нейтрального ферромагнетика в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона [1, 2] имеют шестой порядок и два первых интеграла. Поэтому в отличие от классических задач для интегрирования уравнений движения тела в магнитном поле необходимо найти два дополнительных интеграла. В [3] указаны условия существования линейного первого интеграла, в [4] получен первый интеграл, в [5] рассмотрена связь между уравнениями движения тела в жидкости и уравнениями Кирхгофа–Пуассона. Наиболее эффективным методом построения частных решений уравнений движения тела и гиростата в магнитном поле является метод инвариантных соотношений [6]. С его помощью изучены многие классы решений: в [7] получено обобщение инвариантного соотношения Гесса; в [8] указаны полиномиальные решения; в [9–12] исследованы свойства двух линейных инвариантных соотношений.

Данная работа посвящена интегрированию уравнений движения гиростата в магнитном поле в случае двух инвариантных соотношений при условии, что гирационный эллипсоид не является сферой.

2. Постановка задачи. Рассмотрим движение нейтрального ферромагнетика в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Запишем уравнения движения гиростата с учетом того, что на него действуют и центральные ньютоновские силы

$$\dot{\bar{x}} = (\bar{x} + \bar{\lambda}) \times a\bar{x} + Ba\bar{x} \times \bar{\nu} + \bar{s} \times \bar{\nu} + \bar{\nu} \times C\bar{\nu}, \tag{1}$$

$$\dot{\bar{\nu}} = \bar{\nu} \times a\bar{x}. \tag{2}$$

Эти уравнения допускают два первых интеграла:

$$(x_1 + \lambda_1)\nu_1 + (x_2 + \lambda_2)\nu_2 + (x_3 + \lambda_3)\nu_3 = k, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \tag{3}$$

где k – произвольная постоянная.

В формулах (1)–(3) введены обычные обозначения: $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения гиростата; $\bar{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, характеризующий направление оси симметрии силовых полей и магнитного поля; $\bar{\lambda} = (\lambda_1.\lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент; $\bar{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор обобщенного центра масс; $a = (a_{ij})$ $(i, j = \overline{1,3})$ – гирационный тензор; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка. Точка над переменными обозначает относительную производную по времени t.

Рассмотрим вопрос об условиях существования у системы (1)–(2) двух линейных инвариантных соотношений:

$$x_1 = b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3, \quad x_2 = c_0 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3. \tag{4}$$

Согласно методу инвариантных соотношений [6], продифференцируем левую и правую части соотношений (4) в силу уравнений (1)–(2):

$$\begin{gathered}a_{23}x_3^2 + x_3[b_1(a_{33}\nu_2 - a_{23}\nu_3) + b_2(a_{13}\nu_3 - a_{33}\nu_1) + b_3(a_{23}\nu_1 - a_{13}\nu_2) - a_{33}(c_0 + \lambda_2 + \\ +c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3) + (\alpha_{20} + \alpha_{21}\nu_1 + \alpha_{22}\nu_2 + \alpha_{23}\nu_3) + a_{23}\lambda_3 - \nu_3 d_{23} + \nu_2 d_{33}] + \\ +b_1[\nu_2(\alpha_{30} + \alpha_{31}\nu_1 + \alpha_{32}\nu_2 + \alpha_{33}\nu_3) - \nu_3(\alpha_{20} + \alpha_{21}\nu_1 + \alpha_{22}\nu_2 + \alpha_{23}\nu_3)] + \\ +b_2[\nu_3(\alpha_{10} + \alpha_{11}\nu_1 + \alpha_{12}\nu_2 + \alpha_{13}\nu_3) - \nu_1(\alpha_{30} + \alpha_{31}\nu_1 + \alpha_{32}\nu_2 + \alpha_{33}\nu_3)] + \\ +b_3[\nu_1(\alpha_{20} + \alpha_{21}\nu_1 + \alpha_{22}\nu_2 + \alpha_{23}\nu_3) - \nu_2(\alpha_{10} + \alpha_{11}\nu_1 + \alpha_{12}\nu_2 + \alpha_{13}\nu_3)] - \\ -(c_0 + \lambda_2 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3)(\alpha_{30} + \alpha_{31}\nu_1 + \alpha_{32}\nu_2 + \alpha_{33}\nu_3) + \lambda_3(\alpha_{20} + \alpha_{21}\nu_1 + \\ +\alpha_{22}\nu_2 + \alpha_{23}\nu_3) - \nu_3[d_{21}(b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) + d_{22}(c_0 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3)] + \\ +\nu_2[d_{31}(b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) + d_{32}(c_0 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3)] - s_2\nu_3 + s_3\nu_2 - \\ -\nu_2(C_{13}\nu_1 + C_{23}\nu_2 + C_{33}\nu_3) + \nu_3(C_{12}\nu_1 + C_{22}\nu_2 + C_{23}\nu_3) = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}-a_{13}x_3^2 + x_3[c_1(a_{33}\nu_2 - a_{23}\nu_3) + c_2(a_{13}\nu_3 - a_{33}\nu_1) + c_3(a_{23}\nu_1 - a_{13}\nu_2) - \\ -(\alpha_{10} + \alpha_{11}\nu_1 + \alpha_{12}\nu_2 + \alpha_{13}\nu_3) - \lambda_3 a_{13} + a_{33}(b_0 + \lambda_1 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) - d_{33}\nu_1 + \\ +d_{13}\nu_3] + c_1[\nu_2(\alpha_{30} + \alpha_{31}\nu_1 + \alpha_{32}\nu_2 + \alpha_{33}\nu_3) - \nu_3(\alpha_{20} + \alpha_{21}\nu_1 + \alpha_{22}\nu_2 + \alpha_{23}\nu_3)] + \\ +c_2[\nu_3(\alpha_{10} + \alpha_{11}\nu_1 + \alpha_{12}\nu_2 + \alpha_{13}\nu_3) - \nu_1(\alpha_{30} + \alpha_{31}\nu_1 + \alpha_{32}\nu_2 + \alpha_{33}\nu_3)] + \\ +c_3[\nu_1(\alpha_{20} + \alpha_{21}\nu_1 + \alpha_{22}\nu_2 + \alpha_{23}\nu_3) - \nu_2(\alpha_{10} + \alpha_{11}\nu_1 + \alpha_{12}\nu_2 + \alpha_{13}\nu_3)] - \\ -\lambda_3(\alpha_{10} + \alpha_{11}\nu_1 + \alpha_{12}\nu_2 + \alpha_{13}\nu_3) + (b_0 + \lambda_1 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3)(\alpha_{30} + \alpha_{31}\nu_1 + \\ +\alpha_{32}\nu_2 + \alpha_{33}\nu_3) - \nu_1[d_{31}(b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) + d_{32}(c_0 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3)] + \\ +\nu_3[d_{11}(b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) + d_{12}(c_0 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3)] - s_3\nu_1 + s_1\nu_3 - \\ -\nu_3(C_{11}\nu_1 + C_{12}\nu_2 + C_{13}\nu_3) + \nu_1(C_{13}\nu_1 + C_{23}\nu_2 + C_{33}\nu_3) = 0,\end{gathered} \tag{6}$$

где $(d_{ij}) = Ba$.

Уравнения (5), (6) представляют собой систему двух функциональных равенств $F_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3, x_3) = 0 \quad (i = 1, 2)$. Их рассмотрение зависит от подхода, который применяется в процессе применения метода инвариантных соотношений.

3. Условия существования инвариантных соотношений (4). Потребуем, чтобы уравнения (5), (6) выполнялись тождественно для любых значений переменной x_3.

На основе метода инвариантных соотношений [6] условия существования инвариантных соотношений (4) у уравнений (1), (2) с интегралами (3) записаны формулами $(6)^*$, $(9)^*$ (Знак * над номером формулы обозначает нумерацию формул из работы [12]).

Условие $(6)^*$ означает, что третья координатная ось подвижной системы координат является главной. Принимая во внимание, что инвариантные соотношения (4) заданы для первой и второй проекций вектора момента количества движения на подвижные оси, а третья ось является главной, без ограничения общности задачи в качестве подвижной системы координат может быть принята главная система координат, в которой $a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$. Поэтому в дальнейшем для простоты записи формул примем обозначение $a_{ii} = a_i$ $(i = \overline{1,3})$.

Анализ системы уравнений $(9)^*$ позволяет установить одно общее свойство. Для того, чтобы система уравнений $a_3b_2 + c_1(a_3 - a_2) = 0$, $a_3c_1 + b_2(a_3 - a_1) = 0$ имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы выполнялось равенство $a_1a_3 + a_2a_3 - a_1a_2 = 0$. Введем главные моменты инерции гиростата $A_i = \dfrac{1}{a_i}$. Тогда из указанного равенства вытекает: $A_1 + A_2 - A_3 = 0$, что невозможно. Поэтому в системе соотношений (4) $b_2 = 0$, $c_1 = 0$. То есть

$$x_1 = b_0 + b_1\nu_1 + b_3\nu_3, \quad x_2 = c_0 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3. \tag{7}$$

Из системы $(9)^*$ вытекает

$$\begin{gathered} b_0\lambda_3 = 0,\ c_0\lambda_3 = 0,\ b_0c_3 = 0,\ c_0b_3 = 0,\ a_3\lambda_2 + c_0(a_3 - a_2) = 0, \\ -a_3\lambda_1 + b_0(a_1 - a_3) = 0,\ c_3(a_1b_1 - a_2c_2) = 0,\ b_3(a_1b_1 - a_2c_2) = 0, \\ a_1b_1 - a_2c_2 + 2a_3(c_2 - b_1) = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

4. Случай $\lambda_3 \neq 0,\ b_3 \neq 0,\ c_3 \neq 0,\ a_3 = 2a_1$**.** Если в системе (8) положить $b_3 = 0,\ c_3 = 0$, а в $(9)^*$ $B_{12} \neq 0$, то из уравнения (1) для x_3 вытекает, что $x_3 = \mathrm{const}$. Поэтому рассмотрим случай $b_3 \neq 0,\ c_3 \neq 0$. Из $(9)^*$ следует

$$b_0 = c_0 = 0,\ c_1 = 0,\ b_2 = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ a_2 = a_1,\ c_2 = b_1. \tag{9}$$

В силу (9) соотношения (7) упрощаются

$$x_1 = b_1\nu_1 + b_3\nu_3, \quad x_2 = c_2\nu_2 + c_3\nu_3. \tag{10}$$

Учтем в системе $(9)^*$ условия (9), при этом будем считать, что $a_3 = 2a_1$ (случай сферического гиростата рассмотрен в [12]). Тогда из $(9)^*$ имеем

$$\begin{gathered} a_1 = a_2,\ b_0 = b_2 = c_0 = c_1 = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ b_1 = -2B_{33},\ b_3 = -2B_{13},\ c_2 = b_1, \\ c_3 = -2B_{23},\ s_1 = -2a_1\lambda_3B_{13},\ s_2 = -2a_1\lambda_3B_{23},\ s_3 = 2a_1\lambda_3B_{33}, \\ B_{13}(B_{11} - 3B_{33}) + B_{12}B_{23} = 0,\ B_{23}(B_{22} - 3B_{33}) + B_{13}B_{12} = 0, \\ C_{12} = -2a_1(B_{12}B_{33} + 2B_{13}B_{23}),\ C_{13} = -2a_1B_{13}B_{33}, C_{23} = -2a_1B_{23}B_{33}, \\ C_{11} = C_{33} + 2a_1\left[2B_{33}^2 + B_{13}^2 - B_{11}B_{33} + 3B_{23}^2\right], \\ C_{22} = C_{33} + 2a_1\left[2B_{33}^2 + B_{23}^2 - B_{22}B_{33} + 3B_{13}^2\right]. \end{gathered} \tag{11}$$

Запишем уравнения (1)–(2) с учетом условий (10), (11):

$$\begin{gathered}\dot{\nu}_1 = a_1(2\nu_2 x_3 - (b_1\nu_2 + c_3\nu_3)\nu_3),\\ \dot{\nu}_2 = a_1(-2\nu_1 x_3 + (b_1\nu_1 + b_3\nu_3)\nu_3),\\ \dot{\nu}_3 = a_1\nu_3(c_3\nu_1 - b_3\nu_2),\\ \dot{x}_3 = a_1(b_3\nu_2 - c_3\nu_1)[-x_3 + (b_3\nu_1 + c_3\nu_2 - b_1\nu_3 + \lambda_3)].\end{gathered} \tag{12}$$

Из интеграла моментов (3) вытекает

$$(x_3 + \lambda_3 + b_3\nu_1 + c_3\nu_2 - b_1\nu_3)\cdot\nu_3 = l_0, \tag{13}$$

где $l_0 = k - b_1$ (произвольная постоянная).

Используя последние два уравнения системы (12) и (13), получим

$$\frac{dx_3}{d\nu_3} = \frac{1}{\nu_3}\left(2x_3 - \frac{l_0}{\nu_3}\right). \tag{14}$$

Выпишем общее решение уравнения (14)

$$x_3 = \frac{l_0}{3\nu_3} + C\nu_3^2, \tag{15}$$

где C – произвольная постоянная.

Таким образом, функция (15) зависит от двух произвольных постоянных l_0 и C.

Выполним интегрирование первых трех уравнений (12). Введем вместо ν_1, ν_2, ν_3 новые переменные

$$\nu_1 = \sin\theta\cos\xi,\ \nu_2 = \sin\theta\sin\xi,\ \nu_3 = \cos\theta \tag{16}$$

и вместо параметров b_3,c_3 параметры α_0, μ_0: $b_3 = \mu_0\cos\alpha_0$, $c_3 = \mu_0\sin\alpha_0$, $\mu_0 = \sqrt{b_3^2 + c_3^2}$. Тогда из соотношения (13) получим

$$\cos(\xi - \alpha_0) = \frac{q(\theta)}{\mu_0\sin\theta\cos\theta}, \tag{17}$$

где $q(\theta) = \dfrac{2l_0}{3} - \lambda_3\cos\theta + b_1\cos^2\theta - C\cos^3\theta$.

Третье уравнение системы (12) в силу (16) можно преобразовать к виду

$$\dot{\theta} = \mu_0 a_1\cos\theta\sin(\alpha_0 - \xi). \tag{18}$$

Исключим из уравнений (17), (18) переменную $(\alpha_0 - \xi)$

$$\dot{\theta} = \frac{a_1}{\sin\theta}\left\{\mu_0^2\sin^2\theta\cos^2\theta - q^2(\theta)\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

Из уравнения (19) обращением соответствующего интеграла можно найти $\theta = \theta(t)$. Тогда из (17) определим $\xi(t)$

$$\xi(t) = \alpha_0 + \arccos\frac{q(\theta)}{\mu_0\sin\theta(t)\cos\theta(t)}. \tag{20}$$

Соотношения (16) дают возможность найти $\nu_i = \nu_i(t)$, а соотношения (10), (15) – функции $x_i = x_i(t)$.

Для нахождения функции $\theta = \theta(t)$ преобразуем формулу (19)

$$\int_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{\sqrt{\mu_0^2\left(1-\nu_3^2\right)\nu_3^2-\varphi^2(\nu_3)}} = -a_1(t-t_0), \tag{21}$$

где

$$\varphi(\nu_3) = L_0 - \lambda_3\nu_3 + b_1\nu_3^2 - C\nu_3^3. \tag{22}$$

Здесь $L_0 = \dfrac{2l_0}{3}$ – новая произвольная постоянная.

Действительности функции $\nu_3(t)$, полученной из (21), можно добиться, использовав неравенство $|\nu_3| \leq 1$ и выбрав в выражении (22) параметры L_0, λ_3, b_1, C достаточно малыми. Для параметров L_0, C это можно сделать в силу их произвольности, а параметры λ_3, b_1 можно выбрать малыми, приняв на основании выражений из (11) малыми параметры s_3 и B_{33}. После получения $\nu_3(t)$ из (21), из (20) определим

$$\xi(t) = \alpha_0 + \arccos\frac{\varphi(\nu_3(t))}{\mu_0\nu_3(t)\sqrt{1-\nu_3^2(t)}}. \tag{23}$$

Из формул (16) найдем

$$\nu_1(t) = \sqrt{1-\nu_3^2(t)}\cos\xi(t),\ \nu_2(t) = \sqrt{1-\nu_3^2(t)}\sin\xi(t), \tag{24}$$

где $\xi(t)$ определяется формулой (23).

Из формулы (15) следует

$$x_3(t) = \frac{1}{\nu_3(t)}\left[L_0 + C\nu_3^3(t)\right]. \tag{25}$$

Тогда на основании (10), (24) функции $x_1(t)$, $x_2(t)$ находятся из равенств

$$x_1(t) = b_1\sqrt{1-\nu_3^2(t)}\cos\xi(t) + b_3\nu_3(t),\ x_2(t) = c_2\sqrt{1-\nu_3^2(t)}\sin\xi(t) + c_3\nu_3(t). \tag{26}$$

Соотношения (21), (24)–(26) задают решение уравнений (1), (2). Подставим x_3 из (15) в уравнения (12) и интеграл (13)

$$\begin{gathered}\dot\nu_1 = \frac{a_1}{\nu_3}\left[2\nu_2\left(L_0 + C\nu_3^3\right) - \nu_3^2(b_1\nu_2 + c_3\nu_3)\right],\\ \dot\nu_2 = -\frac{a_1}{\nu_3}\left[2\nu_1\left(L_0 + C\nu_3^3\right) - \nu_3^2(b_1\nu_1 + b_3\nu_3)\right],\\ \dot\nu_3 = a_1\nu_3(c_3\nu_1 - b_3\nu_2),\end{gathered} \tag{27}$$

$$\left(C\nu_3^2 - b_1\nu_3 + \lambda_3 + b_3\nu_1 + c_3\nu_2\right)\cdot\nu_3 = L_0. \tag{28}$$

Таким образом, система (27) допускает интеграл (28).

5. Случай $L_0 = 0$. Условия существования решения (21), (24)–(26) записаны формулами (11). Рассмотрим случай $L_0 = 0$, то есть

$$k = b_1. \tag{29}$$

Тогда функция (22) такова:

$$\varphi(\nu_3) = -\lambda_3\nu_3 + b_1\nu_3^2 - C\nu_3^3. \tag{30}$$

Запишем формулу (21) с учетом выражения (30)

$$\int \frac{d\nu_3}{\sqrt{D_1}} = a_1(t - t_0), \tag{31}$$

где

$$D_1 = \mu_0^2\nu_3^2(1-\nu_3^2) - \left[-C\nu_3^3 + b_1\nu_3^2 - \lambda_3\nu_3\right]^2. \tag{32}$$

6. Случай $C = \dfrac{-\lambda_3(b_1^2+\mu_2^2)}{\mu_0^2}$, $\lambda_3^2 = \dfrac{\mu_0^4}{b_1^2+\mu_0^2}$. Пусть

$$C = \frac{-\lambda_3(b_1^2+\mu_0^2)}{\mu_0^2}, \ \lambda_3^2 = \frac{\mu_0^4}{b_1^2+\mu_0^2}, \tag{33}$$

тогда D_1 из (32) примет вид

$$D_1 = (b_1^2+\mu_0^2)\nu_3^2\left(\nu_3 + \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+\mu_0^2}}\right)^2\left(\frac{\mu_0^2}{b_1^2+\mu_0^2} - \nu_3^2\right). \tag{34}$$

Для действительности решения, необходимо потребовать, чтобы выражение из (34) было положительным, то есть выполнялось условие:

$$\frac{\mu_0^2}{b_1^2+\mu_0^2} - \nu_3^2 > 0. \tag{35}$$

Неравенство (35) выполняется, если

$$-a < \nu_3 < a, \tag{36}$$

где $a = \sqrt{1 - \dfrac{B_{33}^2}{B_{33}^2+B_{13}^2+B_{23}^2}}$.

Отметим, что интервал в (36) содержится в интервале $(-1;1)$.

Интеграл (31) для рассматриваемого случая можно записать в виде

$$\int \frac{d\nu_3}{\nu_3\sqrt{\mu_0^2 - p_1^2\nu_3^2}} - \int \frac{p_1 d\nu_3}{(b_1+p_1\nu_3)\sqrt{\mu_0^2 - p_1^2\nu_3^2}} = p_2(t - t_0), \tag{37}$$

где $p_1 = \sqrt{b_1^2+\mu_0^2}$, $p_2 = a_1b_1/p_1$.

В зависимости от параметров задачи, вычисление интеграла (37) разбивается на следующие случаи.

6.1. Случай $\mu_0^2 - b_1^2 > 0$. В данном случае в силу принятых обозначений имеем неравенства

$$s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 > 0, \tag{38}$$

а также условия (11), (33), (29).

Тогда из интеграла (37) получим формулу, которая устанавливает зависимость $\nu_3(t)$

$$\left(\frac{p_1\nu_3}{\mu_0 + \sqrt{\mu_0^2 - p_1^2\nu_3^2}}\right)^{\frac{1}{\mu_0}} \left(\frac{p_3 + p_4\nu_3 + p_5\sqrt{\mu_0^2 - p_1^2\nu_3^2}}{b_1p_1 + p_1^2\nu_3}\right)^{\frac{2}{p_4}} = e^{p_2(t-t_0)}, \tag{39}$$

где $p_3 = 2\sqrt{\mu_0^4 - b_1^4}$, $p_4 = 2b_1(b_1 + p_1)$, $p_5 = 2\sqrt{\mu_0^2 - b_1^2}$.

Зависимость остальных переменных задачи (1), (2) от времени находится подстановкой функции $\nu_3 = \nu_3(t)$ из (39) в соотношения (24)–(26). Причем $\varphi(\nu_3)$ в соотношении (23) имеет вид (30). Запишем полученный результат

$$\nu_1 = \frac{1}{\mu_0^2}\left[b_3R_6(t) - c_3R_7(t)\right],\ \nu_2 = \frac{1}{\mu_0^2}\left[c_3R_6(t) + b_3R_7(t)\right], \tag{40}$$

$$x_1 = \frac{1}{\mu_0^2}(b_3R_8(t) - b_1c_3R_7(t)),\ x_2 = \frac{1}{\mu_0^2}(c_3R_8(t) - b_1b_3R_7(t)),\ x_3 = C\nu_3^2(t), \tag{41}$$

где $R_6(t) = b_1\nu_3(t) - \lambda_3 - C\nu_3^2(t)$, $R_7(t) = \frac{1}{p_1}(p_1\nu_3(t) + b_1)\sqrt{\mu_0^2 - p_1^2\nu_3^2(t)}$,
$R_8(t) = b_1R_6(t) + \mu_0^2\nu_3(t)$.

Таким образом, решение (39)–(41) существует при условиях (11), (29), (33), (38). При этом ν_3 удовлетворяет неравенству (36). Отметим, что выполнения условия (38) можно добиться следующим образом: задаем конкретные значения для s_1 и s_2, затем s_3 выбираем с учетом неравенства (38), а остальные параметры задачи выражаем через них по соотношениям (11). Произвольной постоянной остается только t_0 из (39).

6.2. Случай $\mu_0^2 - b_1^2 < 0$**.** Из интеграла (37) для рассматриваемого случая получим

$$\frac{1}{\mu_0}\ln\left|\frac{p_1\nu_3}{\mu_0 + \sqrt{\mu_0^2 - p_1^2\nu_3^2}}\right| + \frac{1}{\sqrt{b_1^2 - \mu_0^2}}\arcsin\frac{p_7\nu_3 - \mu_0}{p_1\nu_3^2 + b_1} = p_2(t - t_0), \tag{42}$$

где $p_7 = -\dfrac{b_1p_1}{\mu_0}$.

Находя зависимость $\nu_3 = \nu_3(t)$ из формулы (42), остальные переменные задачи (1), (2) определяем из соотношений (40), (41). При этом должны выполняться условия на параметры (11), (29), (33), а также неравенства (36) и

$$s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 < 0,$$

в котором значения s_1 и s_2 задаем.

6.3. Случай $b_1 = \mu_0$. Для нахождения зависимости $\nu_3 = \nu_3(t)$ вернемся к интегралу (31), в котором значение D_1 для рассматриваемого случая будет таковым:

$$D_1 = 2b_1^2\nu_3^2\left(\nu_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{1}{2} - \nu_3^2\right). \qquad (43)$$

Учитывая соотношение (43), интеграл (31) может быть записан в следующем виде:

$$\int \frac{d\nu_3}{\nu_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \nu_3\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \nu_3\right)^{\frac{1}{2}}} = a_1 b_1\sqrt{2}(t - t_0).$$

Отсюда получим, что

$$\ln\left|\frac{\sqrt{2}\nu_3}{1 + \sqrt{1 - 2\nu_3^2}}\right| + \sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}\nu_3}{1 + \sqrt{2}\nu_3}} = \frac{a_1 b_1}{\sqrt{2}}(t - t_0).$$

Остальные переменные задачи выражаются по формулам:

$$\nu_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}b_1}\left[b_3R_9(t) - c_3R_{10}(t)\right],\ \nu_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}b_1}\left[c_3R_9(t) + b_3R_{10}(t)\right],$$

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[b_3R_{11}(t) - c_3R_{10}(t)\right],\ x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[c_3R_{11}(t) + b_3R_{10}(t)\right],\ x_3 = -2\lambda_3\nu_3^2(t),$$

где $R_9(t) = 2\nu_3^2(t) + \sqrt{2}\nu_3(t) - 1$, $R_{10}(t) = 2\left(\nu_3(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\frac{1}{2} - \nu_3^2(t)}$, $R_{11}(t) = R_9(t) + \sqrt{2}\nu_3(t)$.

Полученное решение существует при условиях (11), (29), (33), а также при $b_1 = \mu_0$. Отметим, что равенства (33) при этих условиях на параметры таковы:

$$\lambda_3 = -\sqrt{2}B_{33}, \quad C = 2\sqrt{2}B_{33},$$

где $\nu_3 \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

1. *Егармин И.Е.* О магнитном поле вращающегося сверхпроводящего тела // Аэрофизика и космические исследования. – М.: Физ.–техн. ин-т, 1983. – С. 95–96.
2. *Киттель И.* Введение в физику твердого тела. – М.: Физматгиз, 1963. – 696 с.
3. *Козлов В.В.* К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1985. – № 6. – С. 28–33.
4. *Самсонов В.А.* О вращении твердого тела в магнитном поле // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1984. – № 4. – С. 32–34.
5. *Веселова Л.Е.* О двух задачах динамики твердого тела // Вестник МГУ. Сер. мат. мех. – 1986. – № 5. – С. 90–91.
6. *Леви–Чевита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. В 2-х т. Т. 2. Ч. 2. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – 555 с.
7. *Горр Г.В.* О линейном инвариантном соотношении в задаче о движении гиростата в магнитном поле // Прикладная математика и механика. – 1997. – Т. 61, вып. 4. – С. 566–569.

8. *Горр Г.В., Суворова Н.Г.* Об одном классе полиномиальных решений в задаче о движении гиростата в магнитном поле // Прикладная математика и механика.– 1997. – Т. 61, вып. 5. – С. 781–787.
9. *Скрыпник С.В.* О двух линейных инвариантных соотношениях в задаче о движении тела в магнитном поле // Прикладная механика. – 1999. – Т. 35, вып. 2. – С. 98–104.
10. *Ткаченко Н.В.* Некоторые классы прецессионных движений твердого тела в магнитном поле // Механика твердого тела. – 1997. – Вып. 29. – С. 26–11.
11. *Скрыпник С.В.* Один класс двух линейных инвариантных соотношений в задаче о движении тела в магнитном поле // Труды ИПММ НАНУ. – 2002. – Т. 7. – С. 175–180.
12. *Игнатова Е.А.* Об одном решении уравнений движения сферического гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 215–221.

K. Ignatova

Investigation of two linear invariant relations in the motion problem of the body in magnetic field.

One case of the integrability of the motion equations for a gyrostat with a fixed point in a magnetic field, taking into account the Barnett–London effect, was considered in the paper. These equations are characterized by two linear invariant relations. The formulas establishing a dependence of auxiliary variable on time are obtained in the case when the gyration ellipsoid is not a sphere.

Keywords: *Barnett–London effect, gyrostat, method of invariant relations.*

Донецкий нац. ун-т экономики и торговли
им. М. Туган–Барановского
`katerina-ignat@yandex.ru`

Получено 19.05.14