УДК 531.36; 519.21

©2014. **И. Г. Васильева, А. Л. Зуев**

АНАЛИЗ ПРЕДЕЛЬНОГО МНОЖЕСТВА ТРАЕКТОРИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ ДЛЯ ПОЧТИ ВСЕХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

В работе рассмотрен класс нелинейных систем дифференциальных уравнений со случайными воздействиями, которые имеют инвариантные многообразия произвольной размерности. Исследован вопрос об устойчивости таких многообразий для почти всех начальных значений фазового пространства. Доказана теорема о достаточных условиях притяжения к инвариантному множеству в терминах функции плотности меры, которая обладает свойством монотонности на фазовом потоке. Рассмотрен пример нелинейной системы, для которой функция плотности построена в явном виде.

Ключевые слова: *притягивающее множество, функция плотности, стохастическое уравнение Ито.*

1. Введение. Теория устойчивости систем дифференциальных уравнений со случайными воздействиями получила развитие в 60-х годах XX века в работах И.Я. Каца, Н.Н. Красовского [3], Дж. Кушнера [4], Р.З. Хасьминского [7]. Основным методом исследования задач устойчивости траекторий и инвариантных множеств является прямой метод Ляпунова. Однако для систем со случайными воздействиями, когда состояние системы не может быть предсказано с вероятностью 1, возникает задача о притяжении траекторий для почти всех начальных условий. Для детерминированных систем достаточное условие притяжения траекторий к особой точке получил шведский математик A. Rantzer [10] для всюду плотного множества начальных данных. Стохастический аналог этих условий получен в работе R. Van Handel [9]. В то же время остается открытым вопрос о применимости этого метода для описания притягивающих множеств более общего вида.

В данной работе рассматривается задача об описании притягивающего множества произвольной структуры для системы стохастических дифференциальных уравнений относительно почти всех начальных условий.

2. Основной результат. В данной статье (Ω, F, P) обозначает каноническое винеровское пространство. Будем рассматривать стохастические дифференциальные уравнения Ито в виде

$$dx = X_0(x)dt + \sum_{k=1}^{m} X_k(x)dW^k, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $X_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, функции класса $C^2, k = 0, ..., m$, $W(t,\omega) = (W^1(t), ..., W^m(t))$ – m-мерный винеровский процесс. Обозначим через $\xi_{s,t}(p,\omega)$ (или просто $\xi_{s,t}(p)$) решение уравнения (1), определенное при $t \geqslant s$, которое удовлетворяет начальному условию $\xi_{s,s}(p,\omega) = p$. Пусть $\mathcal{L}^*$ – оператор, который действует на функцию $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$

следующим образом:

$$\mathcal{L}^* f(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}(X_k^i(x) X_k^j(x) f(x)) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(X_0^i(x) f(x)).$$

Напомним [5], что непустое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется инвариантным для системы (1), если для всяких $x \in M$, $s \in \mathbb{R}$ выполнено свойство

$$\xi_{s,t}(x) \in M$$

при всех $t \geq s$ P-почти наверное.

Введем расстояние $\rho(p, M)$ от точки $p \in \mathbb{R}^n$ до множества $M \subset \mathbb{R}^n$ стандартным образом:

$$\rho(p, M) = \inf_{x \in M} |x - p|.$$

Для $\varepsilon > 0$ обозначим ε-окрестность множества M через $B_\varepsilon(M)$.

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n-$ инвариантное множество для системы (1) и пусть $D \in C^2(\mathbb{R}^n \backslash M)$ – функция с неотрицательными значениями. Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) функции $X_k, k = 0, ..., m$ удовлетворяют глобальному условию Липшица;

2) функция $D \in L^1(\mathbb{R}^n \backslash B_\varepsilon(M))$ при любом $\varepsilon > 0$;

3) $\mathcal{L}^* D < 0$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n \backslash M$;

4) существуют $\delta > 0$ и функция $\alpha \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), \alpha(0) = 0$:

$$\rho(\xi_{s,t}(p), M) \leqslant \alpha(\rho(p, M)),$$

P-почти наверное $\forall p \in B_\delta(M)$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [s, s+1]$.

Тогда для произвольного $s \geq 0$ и для μ-почти каждого $p \in \mathbb{R}^n$ выполнено свойство

$$\rho(\xi_{s,t}(p), M) \to 0$$

при $t \to +\infty$ P-почти наверное.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, докажем одну вспомогательную лемму.

Лемма. *Пусть в системе (1) функции X_k удовлетворяют условию*

$$|X_k(x)| \leq \tilde{c_k} + c_k \rho(x, M), \forall x \in R^n, \tilde{c_k} \geq 0, c_k \geq 0, \lambda > 0, k = 0, ..., m.$$

Тогда

$$P[\sup_{0 \leqslant \delta \leqslant \Delta} |\xi_{s,s+\delta}(x) - x| \geqslant \lambda] \leqslant \frac{8\Delta}{\lambda^2}[\tilde{c_0}^2 \Delta + \tilde{c_k}^2 m] + \frac{16 \tilde{c_k} c_k \alpha m}{\lambda^2} \Delta \rho(x, M) +$$

$$+ \left[\frac{8 c_0^2 \alpha^2 \Delta}{\lambda^2} + \frac{8 c_k^2 \alpha^2 m}{\lambda^2}\right] \Delta \rho^2(x, M).$$

Доказательство. Решение уравнения (1) можно представить в виде

$$\xi_{s,t}(x) = x + \int_s^t X_0(\xi_{s,\tau}(x))d\tau + \sum_{k=1}^m \int_s^t X_k(\xi_{s,\tau}(x))dW_\tau^k. \tag{2}$$

Тогда

$$P[\sup_{0\leqslant\delta\leqslant\Delta} |\xi_{s,s+\delta}(x) - x| \geqslant \lambda] \leqslant \frac{E[\sup_{0\leqslant\delta\leqslant\Delta} |\xi_{s,s+\delta} - x|^2]}{\lambda^2} \leqslant \frac{4}{\lambda^2} \sup_{0\leqslant\delta\leqslant\Delta} E|\xi_{s,s+\delta}(x) - x|^2.$$

Подставляя $\xi_{s,s+\delta}(x)$ из (2) и выполняя вспомогательные преобразования, получим

$$\frac{4}{\lambda^2} \sup_{0\leqslant\delta\leqslant\Delta} E|\xi_{s,s+\delta}(x)-x|^2 = \frac{4}{\lambda^2} \sup_{0\leqslant\delta\leqslant\Delta} E[|\int_s^t X_0(\xi_{s,\tau}(x))d\tau+\sum_{k=1}^m \int_s^t X_k(\xi_{s,\tau}(x))dW_\tau^k)|^2] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8}{\lambda^2} \sup_{0\leqslant\delta\leqslant\Delta} E[\int_s^t X_0(\xi_{s,\tau}(x))d\tau]^2 + m \sup_{0\leqslant\delta\leqslant\Delta} E \sum_{k=1}^m [\int_s^t X_k(\xi_{s,\tau}(x))dW_\tau^k)]^2].$$

Из последнего неравенства в силу того, что $|X_k(x)| \leq \tilde{c_k} + c_k\rho(x, M)$, следует

$$\frac{8}{\lambda^2} \sup_{0\leqslant\delta\leqslant\Delta} E[\int_s^t X_0(\xi_{s,\tau}(x))d\tau]^2 + m \sup_{0\leqslant\delta\leqslant\Delta} E \sum_{k=1}^m [\int_s^t X_k(\xi_{s,\tau}(x))dW_\tau^k)]^2] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8}{\lambda^2}\Delta[\tilde{c_0}^2\Delta + 2\tilde{c_0}c_0 \sup_{0\leqslant\delta\leqslant\Delta} E\alpha \int_s^t \rho(x, M)d\tau + c_0^2\alpha^2 \sup_{0\leqslant\delta\leqslant\Delta} E \int_s^t \rho^2(x, M)d\tau]+$$

$$+\frac{8m}{\lambda^2}[\tilde{c_k}^2\Delta + 2\tilde{c_k}c_k\alpha \sup_{0\leqslant\delta\leqslant\Delta} E\alpha \int_s^t \rho(x, M)d\tau + c_k^2\alpha^2 \sup_{0\leqslant\delta\leqslant\Delta} E \int_s^t \rho^2(x, M)d\tau] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8\Delta}{\lambda^2}[\tilde{c_0}^2\Delta + \tilde{c_k}^2 m] + \frac{16\tilde{c_k}c_k\alpha m}{\lambda^2}]\Delta\rho(x, M) + [\frac{8c_0^2\alpha^2\Delta}{\lambda^2} + \frac{8c_k^2\alpha^2 m}{\lambda^2}]\Delta\rho^2(x, M).$$

□

Перейдем к доказательству теоремы.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $Z = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > \varepsilon\}$. Начнем с применения Леммы 5.2 [9]. Определим $S_l = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, M) > l^{-1}\}$, $S = \bigcup_l S_l = \mathbb{R}^n\backslash M$, $\tau_l = \sup\{s < t : \xi_{s,t}^{-1}(x) \notin S_l\}$. Тогда D интегрируема на Z; зададим

$$D_l = \begin{cases} D, & x \in S_l, \\ 0, & x \notin S_l. \end{cases}$$

При таком определении $D_l \in C^2(\mathbb{R}^n\backslash M, \mathbb{R}^+)$. Нужно проверить, что $\tau_l \to -\infty$. Воспользуемся рассуждением от противного. Пусть $\tau_l \nrightarrow -\infty$, тогда с положительной вероятностью выполняется условие $\xi_{s,t}^{-1}(x) \in M$ для некоторого $x \in S, -\infty < s < t$.

Но $\xi_{s,t}^{-1}(x) \in M$ для всех $x \in M$, значит $S \subseteq M$, что невозможно. Следовательно, $\tau_l \to -\infty$. Все условия Леммы 5.2 [9] выполнены, следовательно,

$$0 \leq \int_Z D(x)dx + \int_s^t E \int_{\xi_{\tau,t}^{-1}(Z)} \mathcal{L}^* D(x) dx d\tau. \tag{3}$$

Выражение (3) не возрастает при убывающем s, так как $\mathcal{L}^* D \leq 0$, и является конечным, так как D интегрируема на Z.

Из монотонной сходимости следует, что существует конечный $\lim_{s \to -\infty}$. Отсюда

$$\int_{-\infty}^t D(\xi_{\tau,t}^{-1}(Z)) d\tau < \infty,$$

$$D(A) = -\int_A \mathcal{L}^* D(x)(P(d\omega) \times \mu(dx)),$$

$$D(\xi_{\tau,t}^{-1}(Z)) = D(\{(x,\omega) \in \Omega \times S : \xi_{\tau,t}^{-1}(x,\omega) \in Z\}).$$

Заметим, что $\mathcal{L}_* D \leq 0$ означает, что D задает меру на $\Omega \times S$, и D является τ-конечной, так как $D(\Omega \times \{x \in S : \frac{1}{l} < \rho(x, M) < l\}) < \infty, \forall l > 1$ и $\bigcup_2^\infty (\Omega \times \{x \in S : \frac{1}{l} < \rho(x,M) < l\}) = \Omega \times S$.

Зафиксируем теперь $m \in N$ и зададим $S_k^m = \{(k-1)2^{-m}, k2^{-m}\}, k \in N$. Из каждого S_k^m выбираем время t_k^m:

$$D(\xi_{t-t_k^m,t}^{-1}(Z)) \leq \inf_{s \in S_k^m} D(\xi_{t-s,t}^{-1}(Z)) + 2^{-k}.$$

Обозначим $T_m = \{t_k^m : k \in N\}$ для фиксированного m. Имеем

$$2^{-m} \sum_{k=1}^\infty D(\xi_{t-t_k^m,t}^{-1}(Z)) \leq 2^{-m} + \int_{-\infty}^t D(\xi_{\tau,t}^{-1}(Z)) d\tau < \infty.$$

Так как D – плотность τ-конечной меры, то применим лемму Бореля–Кантелли:

$$D(\lim_{k \to \infty} \sup \xi_{s,s+t_k^m}(Z)) = (P \times \mu)(\lim_{k \to \infty} \sup \xi_{s,s+t_k^m}(Z)) = 0.$$

Мы показали, что для всех начальных состояний x, кроме множества $N \subset \mathbb{R}^n$ меры 0, P-почти наверное для всех m существует только конечное число моментов времени $t \in T_m : \xi_{s,s+t}(x) \in Z$.

Пусть теперь $x \notin N$. Из доказанного свойства следует, что

$$\lim_{t \to \infty} \sup [\rho(\xi_{s,s+t}(x), M)] \leq \varepsilon,$$

P-почти наверное.

Пусть $\limsup_{t\to\infty}[\rho(\xi_{s,s+t}, M)] = \delta > 0$. Из монотонной сходимости имеем $E[\chi \limsup \rho(\xi_{s,t}(x), M) > \varepsilon'] \to \delta$ при $\varepsilon \to \varepsilon'$, следовательно, существует $\varepsilon' > \varepsilon$: $P\{\omega : \limsup_{t\to\infty} \rho(\xi_{s,t}(x), M) > \varepsilon'\} > 0$. Мы уже показали, что почти наверное

$\rho(\xi_{s,t}(x), M) \leq \varepsilon$ для бесконечного числа $t_n \to \infty$. Значит из утверждения $P\{\omega : \limsup_{t\to\infty} \rho(\xi_{s,t}(x), M) > \varepsilon'\} > 0$ следует

$$P\{\omega : \xi_{s,t}(x) \text{ пересекает } S_\varepsilon \text{ и } S'_\varepsilon \text{ бесконечно много раз } \} > 0,$$

где $S_\varepsilon = \{x : \rho(x, M) = \varepsilon\}$, $S'_\varepsilon = \{x : \rho(x, M) = \varepsilon'\}$.

Как только докажем последнее утверждение, доказательство теоремы будет завершено.

Для этого введем следующую последовательность моментов остановки. Пусть $\sigma_0 = \inf\{t > s : \rho(\xi_{s,t}(x), M) \leq \varepsilon\}$, $\tau_0 = \inf\{t > \sigma_0 : \rho(\xi_{s,t}(x), M) \leq \varepsilon'\}$, и для каждого $n > 0$ положим $\sigma_n = \inf\{t > \tau_{n-1} : \rho(\xi_{s,t}(x), M) \leq \varepsilon\}$, $\tau_n = \inf\{t > \sigma_n : \rho(\xi_{s,t}(x), M) \leq \varepsilon'\}$. Определим

$$\Omega_n(\Delta) = \{\omega \in \Omega : \tau_n < \infty, \rho(\xi_{s,\tau_n+\delta}(x), M) > \varepsilon, \forall 0 \leq \delta \leq \Delta\}.$$

Для каждого $\Delta > 0$, множество $\omega \in \Omega$ таких, что $\omega \in \Omega_n(\Delta)$ для бесконечно многих n, должно быть P-меры ноль. Мы можем выбрать m достаточно большое так, что каждый временной интервал длины Δ содержит по меньшей мере одну точку из T_m, и для точек $t \in T_m$ имеем $\rho(\xi_{s,t}(x), M) > \varepsilon$ только конечное число раз P-почти наверное. Таким образом, $\sum_n \chi\Omega_n(\Delta) < \infty$ P-почти наверное. Для продолжения доказательства используем следующее построение [8]. Введем дискретную фильтрацию $B_k = F_s^{\tau_k+1}$ и определим $Z_k = X_k - Y_k$ с

$$X_k = \sum_{n=1}^{k} \chi\Omega_n(\Delta),$$

$$Y_k = \sum_{n=1}^{k} E[\chi\Omega_n(\Delta)|B_{n-1}].$$

Так как $\Omega_n(\Delta) \in B_n$ для всех $k \leq n$, то Z_k является B_k-мартингалом. Определим для $a > 0$ момент остановки $\kappa(a) = \inf\{n : Z_n > a\}$. Так как $|Z_k - Z_{k-1}| \leq 1$ почти наверное, то остановленный процесс $Z'_k = Z_{k\wedge\kappa(a)}$ является мартингалом, ограниченным сверху, и по теореме сходимости для мартингалов Z'_k сходится почти наверное при $k \to \infty$ к конечной случайной переменной Z'_∞. Но, так как Z'_k и Z_k совпадает на $\{\omega : \sup_n Z_n < a\}$, и a было выбрано случайно, $Z_k \to Z_\infty < \infty$ на $\{\omega : \sup_n Z_n < \infty\}$.

Заметим, что X_n и Y_n положительные возрастающие процессы и ранее установлено, что $\sup_n X_n < \infty$ P-почти наверное, значит, $\sup_n Z_n < \infty$ P-почти наверное. Но это означает, что Z_k и, следовательно, Y_k, сходятся к конечному значению P-почти наверное. Итак, установлено, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[\chi\Omega_n(\Delta)|F_s^{\tau_n}] < \infty$$

P-почти наверное $\forall\Delta > 0$.

Заметим, что в силу непрерывности траекторий $\rho(\xi_{s,\tau_n}(x), M) = \varepsilon'$ при $\tau_n < \infty$. По Лемме 1, мы можем выбрать $\bar{\Delta}$ достаточно маленьким, чтобы выполнялось

$$P(y) = P\left[\sup_{0\le\delta\le\bar{\Delta}} |\xi_{s,s+\delta}(y) - y| < \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{2}\right] \ge \frac{1}{2}$$

для всех $|y| = \varepsilon'$. Используя строгую марковость, можем записать

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} E[\chi\Omega_n(\bar{\Delta})|F_s^{\tau_n}] \ge \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi_{s,\tau_n})\chi_{\tau_n<\infty} \ge \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{\tau_n<\infty}$$

P-почти наверное. Но это означает, что $\tau_n < \infty$ конечное число раз P-почти наверное, что противоречит утверждению

$$P\{\omega : \xi_{s,t}(x) \text{ пересекает } S_\varepsilon \text{ и } S'_\varepsilon \text{ бесконечно много раз } \} > 0.$$

Мы показали, что для μ-почти всех $x \in R^n$, P-почти наверное выполнено свойство

$$\lim_{t\to\infty} \sup \rho(\xi_{s,t}, M) \le \varepsilon,$$

т.е. для μ-почти всех $x \in R^n$, P-почти наверное $\exists t_e > \varepsilon : \rho(\xi_{s,t}(x), M) \le \varepsilon$ при $t \ge t_e$. Но, так как это выполняется $\forall \varepsilon > 0$, поток $\xi_{s,t}(x)$ должен сходиться к множеству M. $\square$

3. Пример. Рассмотрим уравнение Ито:

$$\begin{cases} dx = (x(x^2 - y^2 - a^2 + b^2) - 2y(xy - ab))dt + xdW_t, \\ dy = (y(x^2 - y^2 - a^2 + b^2) - 2x(xy - ab))dt + ydW_t. \end{cases} \tag{4}$$

Заметим, что одноточечное множество $M = \{(x, y) : x = 0, y = 0\}$ является инвариантным для системы (4) для любых значений параметров $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. В качестве искомой плотности меры рассмотрим $D(x, y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^\beta}$. Вычислим $\mathcal{L}^*D(x, y)$:

$$\mathcal{L}^*D(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\beta}[2(-\beta + 1)(a^2 - b^2) - 2(-\beta + 3)(x^2 - y^2) + (-\beta + 1)(-2\beta + 3)].$$

При $\beta = 3$ и параметрах (a, b) удовлетворяющих условию $a^2 - b^2 > \frac{3}{2}$, выражение для $\mathcal{L}^*D$ примет вид:

$$\mathcal{L}^*D(x, y) = (x^2 + y^2)^{-3}[-4(a^2 - b^2) + 6] < 0.$$

Тогда, применив следствие 6.2 из статьи [9] и теорему 1, приходим к выводу, что почти все траектории системы (4) притягиваются к началу координат. Т.е. для почти всех начальных условий соответствующее решение системы (4) обладает свойством $(x_t, y_t) \to (0, 0)$ почти наверное при $t \to \infty$.

4. Выводы. В работе получены достаточные условия сходимости решений системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений к инвариантному множеству для почти всех начальных условий из фазового пространства. При исследовании асимптотического поведения решений использована функция плотности меры, обладающая свойством монотонности на потоке. Представляет дальнейший интерес поиск функций плотности для классов механических систем со случайными воздействиями.

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Наук. думка, 1968. – 354 с.
2. *Грушковская В.В., Зуев А.Л.* Условия устойчивости нелинейных динамических систем с монотонной мерой на фазовом потоке // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т. 22. – С. 62–70.
3. *Кац И.Я., Красовский Н.Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математ. и мех. – 1960. – Т. 24. – Вып. 5. – С. 809–823.
4. *Кушнер Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. – М.: Мир, 1969. – 199 с.
5. *Леваков А.А.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Минск: БГУ, 2009. – 231 с.
6. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 2003. – 408 с.
7. *Хасьминский Р.З* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
8. *Loeve M.* Probability theory. 3rd ed. – Van Nostrand, 1963. – 405 p.
9. *Van Handel R.* Almost global stochastic stability // SIAM Journal on Control and Optimization. – 2006. – Vol. 45. – P. 1297–1313.
10. *Rantzer A.* A dual to Lyapunov's stability theorem // Systems and Control Letters. – 2001. – Vol. 42. – P. 161–168.

I. G. Vasylieva, A. L. Zuyev

Analysis of limit set for trajectories of nonlinear system with random actions for almost all initial conditions.

We consider a class of nonlinear differential equations with random actions that admit invariant manifolds of an arbitrary dimension. We study the problem of stability for such manifolds for almost all initial values of the phase space. Sufficient conditions for the attraction to the invariant set in terms of the density function of a measure that has the property of monotonicity on the phase flow are proved. As an illustration, we consider an example of a nonlinear system for which the density function is constructed explicitly.

Keywords: *density function, attractive set, Ito stochastic equation.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Донецкий национальный ун-т
al_zv@mail.ru
shurko-irina@mail.ru

Получено 13.06.14