УДК 517.9

©2013. **С. М. Чуйко, П. В. Кулиш**

СЛАБОНЕЛИНЕЙНАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА В СЛУЧАЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

Найдены необходимые и достаточные условия существования и сходящийся итерационный алгоритм для построения решений, а также собственных функций периодических краевых задач, в случае параметрического резонанса. Предложено уравнение для порождающих амплитуд для периодических краевых задач, которое в случае параметрического резонанса существенно отличается от традиционного уравнения для порождающих амплитуд в отсутствие параметрического резонанса зависимостью от малого параметра, как самого уравнения, так и его корней. В качестве примера эффективности необходимых и достаточных условий существования, а также демонстрации сходимости итерационных алгоритмов для построения решений и собственных функций периодических краевых задач в случае параметрического резонанса, исследована периодическая задача для уравнения типа Дюффинга с параметрическим возбуждением.

Ключевые слова: *Параметрический резонанс, периодическая задача, оператор Грина.*

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о построении T-периодического решения [1, 2, 3] $z(t,\varepsilon) \in C^1[0,T],\ C[0,\varepsilon_0]$ и собственной функции $\mu(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0]$ слабонелинейной системы

$$dz/dt = A(t)z + f(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z,\mu(\varepsilon),t,\varepsilon) \tag{1}$$

в малой окрестности T-периодического решения порождающей системы

$$dz_0/dt = A(t)z_0 + f(t,\varepsilon).$$

Здесь $A(t)-$ $(n\times n)$-мерная матрица и $f(t,\varepsilon)-$ n-мерный вектор-столбец, элементы которых – непрерывные на отрезке $[0,T]$ действительные функции. Предположим нелинейную действительную вектор-функцию $Z(z,\mu(\varepsilon),t,\varepsilon)$ непрерывно дифференцируемой по z и непрерывно дифференцируемой по μ в малой окрестности решения порождающей задачи и начального значения $\mu_0(\varepsilon)$ собственной функции $\mu(\varepsilon)$. Кроме того, считаем нелинейную вектор-функцию $Z(z,\mu(\varepsilon),t,\varepsilon)$ и неоднородность порождающей задачи $f(t,\varepsilon)$ непрерывными по t на отрезке $[0,T]$ и по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Считаем также неоднородность $f(t,\varepsilon)$ порождающей задачи T-периодической по независимой переменной. Обозначим $X(t)$ – нормальную $(X(0)=I_n)$ фундаментальную матрицу однородной части порождающей системы. Исследуем критический случай [1, 2, 3], когда однородная часть порождающей задачи имеет r линейно-независимых решений, составляющих столбцы $(n\times r)$-матрицы $X_r(t)$. При условии [1, с. 109]

$$\int_0^T H_r^*(s)\ f(s,\varepsilon)\ ds = 0 \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0109U000381.

порождающая задача имеет r-параметрическое семейство решений [4, 5]

$$z_0(t, c_0(\varepsilon)) = X_r(t)c_0(\varepsilon) + G\Big[f(s, \varepsilon)\Big](t), \ c_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $G[f(s, \varepsilon)](t)$ – обобщенный оператор Грина порождающей задачи, $H_r(t)$ – $(n \times r)$-матрица, составленная из r-линейно-независимых решений системы, сопряженной к однородной части порождающей, $H_r^*(t)$ – $(r \times n)$-матрица, сопряженная к матрице $H_r(t)$. Поскольку, согласно принятым соглашениям, исследуемая задача для системы (1) поставлена в действительной области, постольку операция сопряжения "*" эквивалентна операции транспонирования. Поставленная задача обобщает традиционные периодические краевые задачи в случае параметрического резонанса, исследованные в монографиях [2, 6, 7, 8] на случай явной зависимости неоднородности $f(t, \varepsilon)$ порождающей системы от малого параметра. Актуальность изучения периодических краевых задач в случае параметрического резонанса связана с многочисленными приложениями в электронике [6], геодезии [12] теории плазмы [13], нелинейной оптике, механике [14], станкостроении [15] и теории специальных функций [16, 17].

2. Условия существования решения. Предположим, что система (1) имеет T-периодическое решение $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon), \ c_0(0) := c_0^* \in \mathbb{R}^r$ в малой окрестности порождающего решения $z_0(t, c_0(\varepsilon))$, при этом в достаточно малой окрестности функции $\mu_0(\varepsilon)$ существует непрерывная собственная функция $\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \ \mu_0(0) := \mu_0^*$ системы (1). Таким образом, приходим к задаче о нахождении T-периодического решения $x(t, \varepsilon) \in C^1[0, T], \ C[0, \varepsilon_0]$ и собственной функции $\zeta(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0]$ слабонелинейной системы

$$dx(t, \varepsilon)/dt = A(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon), \tag{3}$$

разрешимой тогда и только тогда, когда

$$\int_0^T H_r^*(s) \ Z(z_0(s, c_0(\varepsilon)) + x(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), s, \varepsilon) \ ds = 0.$$

В силу непрерывности по z и по μ нелинейной функции $Z(z, \mu(\varepsilon), t, \varepsilon)$ в малой окрестности решения порождающей задачи и начального значения $\mu_0(\varepsilon)$ собственной функции $\mu(\varepsilon)$, приходим к следующему уравнению:

$$\mathcal{F}(\check{c}_0(\varepsilon)) := \int_0^T H_r^*(s) \ Z(z_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), s, \varepsilon) \ ds = 0, \ \check{c}_0(\varepsilon) := \begin{bmatrix} c_0(\varepsilon) \\ \mu_0(\varepsilon) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Следующая лемма определяет необходимые условия существования T-периодического решения системы (1) в случае параметрического резонанса.

Лемма. *Пусть задача о нахождении T-периодического решения $z(t, \varepsilon)$ и собственной функции $\mu(\varepsilon)$ слабонелинейной системы (1) представляет критический случай и выполнено условие разрешимости порождающей T-периодической задачи. Предположим также, что в малой окрестности решения $z_0(t, c_0(\varepsilon))$ порождающего уравнения слабонелинейная система (1) имеет T-периодическое решение*

$z(t,\varepsilon) \in C^1[0,T],\ C[0,\varepsilon_0]$, *при этом в достаточно малой окрестности функции* $\mu_0(\varepsilon)$ *существует непрерывная собственная функция* $\mu(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0]$. *Тогда имеет место равенство* $\mathcal{F}(\check{c}_0(\varepsilon)) = 0$.

Уравнение (4) по аналогии с периодическими задачами в отсутствие параметрического резонанса [1, 2, 4, 5] будем называть уравнением для порождающих амплитуд задачи о нахождении периодического решения и собственной функции слабонелинейной системы (1) в случае параметрического резонанса. Доказанная лемма является обобщением соответствующих утверждений [10, 16, 17].

Фиксируя одно из решений $\check{c}_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{r+1}$ уравнения (4), приходим к задаче об отыскании T-периодического решения уравнения (1) $z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_0(\varepsilon)) + x(t,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $z_0(\tau,c_0(\varepsilon))$, а также собственной функции $\mu(\varepsilon) := \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon)$ в малой окрестности точки $\mu_0(\varepsilon)$. В малой окрестности порождающего решения $z_0(t,c_0(\varepsilon))$ и функции $\mu_0(\varepsilon)$ имеет место следующее разложение:

$$Z(z_0(t,c_0(\varepsilon)) + x(t,\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon) = Z(y_0(t,c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), t, \varepsilon) +$$

$$+\mathcal{A}_1\Big(z_0(t,c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\Big)x(t,\varepsilon) + \mathcal{A}_2\Big(z_0(t,c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\Big)\zeta(\varepsilon) +$$

$$+\mathcal{R}(z_0(t,c_0(\varepsilon)) + x(t,\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon),$$

где

$$\mathcal{A}_1\Big(y_0(t,c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\Big) = \frac{\partial Z(z,\mu,t,\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_0(\varepsilon)),\\ \mu\ =\ \mu_0(\varepsilon),}}$$

$$\mathcal{A}_2\Big(z_0(t,c_0), \mu_0\Big) = \frac{\partial Z(z,\mu,t,\varepsilon)}{\partial \mu}\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_0(\varepsilon)),\\ \mu\ =\ \mu_0(\varepsilon).}}$$

Остаток $\mathcal{R}(z_0(t,c_0(\varepsilon)) + x(t,\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon)$ разложения более высокого порядка малости по $x(t,\varepsilon)$ и $\zeta(\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $z_0(t,c_0(\varepsilon))$ и функции $\mu_0(\varepsilon)$, чем первые три члена разложения, поэтому

$$\mathcal{R}(z(t,\varepsilon), \mu(\varepsilon), t, \varepsilon)\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_0(\varepsilon)),\\ \mu\ =\ \mu_0(\varepsilon)}} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}(z(t,\varepsilon), \mu(\varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_0(\varepsilon)),\\ \mu\ =\ \mu_0(\varepsilon)}} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}(z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon)}{\partial \zeta}\Bigg|_{\substack{z\ =\ z_0(t,c_0(\varepsilon)),\\ \mu\ =\ \mu_0(\varepsilon)}} \equiv 0.$$

Решение T-периодической задачи для уравнения (3) представим в виде

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)\nu(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon),\ x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon \cdot G\Big[Z(z(s,\varepsilon),\mu(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](t),\ \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r.$$

Обозначим $(r \times (r+1))$-мерную матрицу

$$D_0\Big(\check{c}_0(\varepsilon)\Big) = \int_0^T H_r^*(s)\ \Big[\mathcal{A}_1\Big(y_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)X_r(s);\mathcal{A}_2\Big(y_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)\Big]\ ds.$$

Условие разрешимости T-периодической задачи для уравнения (3) приводит к уравнению

$$D_0\Big(\check{c}_0(\varepsilon)\Big) \cdot \begin{bmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{bmatrix} = -\int_0^T H_r^*(s)\ \Big[\mathcal{A}_1\Big(y_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)x^{(1)}(s,\varepsilon)+$$

$$+\mathcal{R}(z_0(s,c_0(\varepsilon)) + x(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]\ ds.$$

Таким образом, при условии $P_{D_0^*(\check{c}_0(\varepsilon))} = 0,\ D_0^+(\check{c}_0(\varepsilon)) \in C[0,\varepsilon_0]$, по меньшей мере, одно решение T-периодической задачи для уравнения (3) определяет операторная система

$$x(t,\varepsilon) = \nu(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon), \tag{5}$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon \cdot G\Big[Z(z_0(s,c_0(\varepsilon)) + x(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\nu(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](t),$$

$$\begin{bmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+\Big(\check{c}_0(\varepsilon)\Big)\int_0^T H_r^*(s)\ \Big[\mathcal{A}_1\Big(y_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)x^{(1)}(s,\varepsilon)+$$

$$+\mathcal{R}(z_0(s,c_0(\varepsilon)) + x(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]\ ds.$$

Здесь $P_{D_0^*(\check{c}_0(\varepsilon))}$ – $(r \times r)$–матрица-ортопроектор: $P_{D_0^*(\check{c}_0(\varepsilon))}\ :\ \mathbb{R}^r \to \mathbb{N}(D_0^*(\check{c}_0(\varepsilon)))$, $D_0^+(\check{c}_0(\varepsilon))$ – псевдообратная по Муру–Пенроузу матрица [3]. Для построения решения операторной системы (5) в случае простоты корней уравнения для порождающих амплитуд (4) применим метод простых итераций [2, 3]. Первое приближение к решению T-периодической задачи для уравнения (3)

$$x_1(t,\varepsilon) = X_r(t)\nu_1(\varepsilon) + x_1^{(1)}(t,\varepsilon),\ \nu_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$$

ищем, как T-периодическое решение уравнения

$$dx_1(t,\varepsilon)/dt = A(t)x_1(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),t,\varepsilon). \tag{6}$$

Разрешимость T-периодической задачи для уравнения (6) гарантирована надлежащим выбором корней уравнения для порождающих амплитуд (4); частное решение этой задачи имеет вид $x_1^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(z_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),s,\varepsilon)](t)$. Таким образом, при условии простоты корней уравнения для порождающих амплитуд (4), находим первое приближение к решению T-периодической задачи для уравнения (3), а также приближение к собственной функции $\mu_1(\varepsilon) := \mu_0(\varepsilon) + \zeta_1(\varepsilon)$, где

$$\begin{bmatrix} \nu_1(\varepsilon) \\ \zeta_1(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+\Big(\check{c}_0(\varepsilon)\Big)\int_0^T H_r^*(s)\ \Big[\mathcal{A}_1\Big(y_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)x_1^{(1)}(s,\varepsilon)+$$

$$+\mathcal{R}(z_0(s,c_0(\varepsilon)) + x_1^{(1)}(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]\ ds.$$

Продолжая рассуждения, предположим, что найдено приближение $x_{k+1}(t,\varepsilon)$ к решению T-периодической задачи для уравнения (3), а также приближение к собственной функции $\mu_{k+1}(\varepsilon) := \mu_0(\varepsilon) + \zeta_{k+1}(\varepsilon)$. Следующее приближение

$$x_{k+2}(t,\varepsilon) = X_r(t)\nu_{k+2}(\varepsilon) + x_{k+2}^{(1)}(t,\varepsilon),\ x_{k+2}^{(1)}(t,\varepsilon) = x_1^{(1)}(t,\varepsilon) + x_{k+2}^{(2)}(t,\varepsilon)$$

к решению T-периодической задачи для уравнения (3), а также приближение к собственной функции $\mu_{k+2}(\varepsilon) := \mu_0(\varepsilon) + \zeta_{k+2}(\varepsilon)$ ищем, как T-периодическое решение уравнения

$$dx_{k+2}(t,\varepsilon)/dt = A(t)x_{k+2}(t,\varepsilon) + \varepsilon\Big[Z(z_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),t,\varepsilon)+ \tag{7}$$

$$+\mathcal{A}_1\Big(z_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)x_{k+1}(t,\varepsilon) + \mathcal{A}_2\Big(z_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)\zeta_{k+1}(\varepsilon)+$$

$$+\mathcal{R}(z_0(t,c_0(\varepsilon)) + x_{k+1}(t,\varepsilon),\mu_k(\varepsilon),t,\varepsilon)\Big].$$

Частное решение T-периодической задачи для дифференциального уравнения (7) имеет вид $x_{k+2}^{(1)}(t,\varepsilon) = x_1^{(1)}(t,\varepsilon) + x_{k+2}^{(2)}(t,\varepsilon)$, где

$$x_{k+2}^{(2)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[\mathcal{A}_1\Big(z_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)x_{k+1}(s,\varepsilon) + \mathcal{A}_2\Big(z_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)\zeta_{k+1}(\varepsilon)+$$

$$+\mathcal{R}(z_0(s,c_0(\varepsilon)) + x_{k+1}(s,\varepsilon),\mu_k(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](t).$$

Таким образом, находим следующее приближение к решению T-периодической задачи для уравнения (3), а также следующее приближение к собственной функции $\mu_{k+2}(\varepsilon) := \mu_0(\varepsilon) + \zeta_{k+2}(\varepsilon)$, где

$$\begin{bmatrix} \nu_{k+2}(\varepsilon) \\ \zeta_{k+2}(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+\Big(\check{c}_0(\varepsilon)\Big)\int_0^T H_r^*(s)\ \Big[\mathcal{A}_1\Big(y_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)x_{k+2}^{(1)}(s,\varepsilon)+$$

$$+\mathcal{R}(z_0(s, c_0(\varepsilon)) + x^{(1)}_{k+2}(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta_{k+1}(\varepsilon), s, \varepsilon)\Big] \, ds.$$

Итак, доказано следующее утверждение, которое является обобщением соответствующих утверждений [10, 16, 17].

Теорема. *Пусть в задаче о построении T-периодического решения $z(t,\varepsilon) \in C^1[0,T]$, $C[0,\varepsilon_0]$ и собственной функции $\mu(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0]$ слабонелинейной системы (1) имеет место критический случай и выполнено условие разрешимости (2) порождающей задачи. Тогда для каждого корня $c_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$, $\mu_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^1$ уравнения (4) при условии простоты корней этого уравнения и дополнительном требовании $D_0^+(\check{c}_0(\varepsilon)) \in C[0,\varepsilon_0]$ в малой окрестности решения порождающего уравнения $z_0(t, c_0(\varepsilon))$ слабонелинейная система (1) имеет, по меньшей мере, одно T-периодическое решение $z(t,\varepsilon) \in C^1[0,T]$, $C[0,\varepsilon_0]$, причем в малой окрестности собственной функции $\mu_0(\varepsilon)$ существует непрерывная функция $\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon)$, $\zeta(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0]$, которую определяет операторная система (5). Для построения решения операторной системы (5) для $\varepsilon \in [0,\varepsilon^*]$ применима итерационная схема*

$$x_1(t,\varepsilon) = X_r(t)\nu_1(\varepsilon) + x^{(1)}_1(t,\varepsilon), \ \mu_1(\varepsilon) := \mu_0(\varepsilon) + \zeta_1(\varepsilon),$$

$$x^{(1)}_1(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), s, \varepsilon)\Big](t),$$

$$\begin{bmatrix} \nu_1(\varepsilon) \\ \zeta_1(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+\Big(\check{c}_0(\varepsilon)\Big) \int_0^T H_r^*(s) \ \Big[\mathcal{A}_1\Big(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\Big) x^{(1)}_1(s,\varepsilon) +$$

$$+\mathcal{R}(z_0(s, c_0(\varepsilon)) + x^{(1)}_1(s,\varepsilon), \mu_0(\varepsilon), s, \varepsilon)\Big] \ ds, \ \dots ,$$

$$x_{k+2}(t,\varepsilon) = X_r(t)\nu_{k+2}(\varepsilon) + x^{(1)}_{k+2}(t,\varepsilon), \ \mu_{k+2}(\varepsilon) := \mu_0(\varepsilon) + \zeta_{k+2}(\varepsilon), \tag{8}$$

$$x^{(1)}_{k+2}(t,\varepsilon) = x^{(1)}_1(t,\varepsilon) + x^{(2)}_{k+2}(t,\varepsilon),$$

$$x^{(2)}_{k+2}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[\mathcal{A}_1\Big(z_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\Big) x_{k+1}(s,\varepsilon) + \mathcal{A}_2\Big(z_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\Big)\zeta_{k+1}(\varepsilon) +$$

$$+\mathcal{R}(z_0(s, c_0(\varepsilon)) + x_{k+1}(s,\varepsilon), \mu_k(\varepsilon), s, \varepsilon)\Big](t),$$

$$\begin{bmatrix} \nu_{k+2}(\varepsilon) \\ \zeta_{k+2}(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+\Big(\check{c}_0(\varepsilon)\Big) \int_0^T H_r^*(s) \ \Big[\mathcal{A}_1\Big(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\Big) x^{(1)}_{k+2}(s,\varepsilon) +$$

$$+\mathcal{R}(z_0(s, c_0(\varepsilon)) + x^{(1)}_{k+2}(s,\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta_{k+1}(\varepsilon), s, \varepsilon)\Big] \ ds; \ k = 0, \ 1, \ 2, \ \dots .$$

Длина отрезка $[0,\varepsilon^*]$ может быть оценена, как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [2, 3], так и непосредственно из условия сжимаемости оператора, определяемого системой (1) аналогично [9, 11].

Пример. Условия доказанной теоремы выполняются в случае 2π-периодической задачи для уравнения типа Дюффинга

$$y'' + y = \sin 3t + \varepsilon \left(\sin \varepsilon + \mu(\varepsilon)\right) y + \varepsilon y^3. \tag{9}$$

Уравнение (9) приводится к виду (1) при

$$z(t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} z^{(a)}(t,\varepsilon) \\ z^{(b)}(t,\varepsilon) \end{bmatrix}, \ f(t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin 3t \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Z(z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Big(\sin\varepsilon + \mu(\varepsilon)\Big) z^{(a)}(t,\varepsilon) + \Big(z^{(a)}(t,\varepsilon)\Big)^3 \end{bmatrix}.$$

Поскольку условие (2) выполнено, постольку порождающая 2π-периодическая задача для уравнения (9) разрешима, и при соответствующей фиксации начала отсчета независимой переменной имеет общее вида

$$z_0(t, c_0(\varepsilon)) = X_r(t) c_0(\varepsilon) + G\Big[f(s,\varepsilon)\Big](t), \ c_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^2.$$

Здесь

$$X(t) = X_r(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}, \ G\Big[f(s,\varepsilon)\Big](t) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2\sin t - \sin 3t \\ 3\cos t - 9\cos 3t \end{bmatrix}.$$

Уравнение для порождающих амплитуд (4) в случае 2π-периодической задачи для уравнения (9) имеет корень

$$\check{c}_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^3, \ c_0(\varepsilon) = 0 \in \mathbb{R}^2, \ \mu_0(\varepsilon) = -\frac{1}{64}\Big(3 + 64\sin\varepsilon\Big),$$

которому отвечает матрица полного ранга

$$D_0\Big(\check{c}_0(\varepsilon)\Big) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{9\pi}{128} & \frac{\pi}{4} \\ \frac{9\pi}{128} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, согласно доказанной теореме, периодическая задача для уравнения (9) имеет единственное решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $y_0(t, c_0)$, для нахождения которого применима итерационная схема (8). Первое приближение к решению 2π-периодической задачи для уравнения (9) определяет функция

$$x_1^{(1)}(t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} x_{1a}^{(1)}(t,\varepsilon) \\ x_{1b}^{(1)}(t,\varepsilon) \end{bmatrix}, \ x_{1b}^{(1)}(t,\varepsilon) = \Big(x_{1a}^{(1)}(t,\varepsilon)\Big)',$$

где

$$x_{1a}^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{163\ 840}\Big(- 31\sin t + 70\sin 3t - 20\sin 5t - 10\sin 7t - \sin 9t\Big).$$

Первое приближение к функции $\nu_1(\varepsilon)$ и к собственной функции $\mu_1(\varepsilon) := \mu_0 + \zeta_1(\varepsilon)$ согласно итерационной схеме (8) определяет вектор

$$\left[\begin{array}{c} \nu_1(\varepsilon) \\ \zeta_1(\varepsilon) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{123\ \varepsilon}{2\ 621\ 440} - \frac{86\ 727\ \varepsilon^2}{214\ 748\ 364\ 800} - \frac{1\ 585\ 509\ \varepsilon^3}{4\ 398\ 046\ 511\ 104\ 000} \end{array}\right].$$

Второе приближение к частному решению 2π-периодической задачи для уравнения (9) определяет функция

$$x_2^{(1)}(t,\varepsilon) = \left[\begin{array}{c} x_{2a}^{(1)}(t,\varepsilon) \\ x_{3b}^{(1)}(t,\varepsilon) \end{array}\right],\ x_{2b}^{(1)}(t,\varepsilon) = \Big(x_{2a}^{(1)}(t,\varepsilon)\Big)',$$

где

$$\begin{gathered}
x_{2a}^{(2)}(t,\varepsilon) = \frac{265\ 847}{46\ 976\ 204\ 800}\ \varepsilon^2 \sin t + \frac{786\ 652\ 087}{31\ 748\ 398\ 252\ 032\ 000}\ \varepsilon^3 \sin t + \\
+ \frac{376\ 664\ 318\ 977}{8\ 452\ 693\ 550\ 620\ 999\ 680\ 000}\ \varepsilon^4 \sin t - \frac{195}{67\ 108\ 864}\ \varepsilon^2 \sin 3t - \\
- \frac{23\ 847}{2\ 748\ 779\ 069\ 440}\ \varepsilon^3 \sin 3t - \frac{5\ 239\ 211}{281\ 474\ 976\ 710\ 656\ 000}\ \varepsilon^4 \sin 3t + \\
+ \frac{23}{335\ 544\ 320}\ \varepsilon^2 \sin 5t + \frac{9\ 837}{6\ 871\ 947\ 673\ 600}\ \varepsilon^3 \sin 5t + \\
+ \frac{9\ 723}{3\ 518\ 437\ 208\ 883\ 200}\ \varepsilon^4 \sin 5t + \frac{309}{671\ 088\ 640}\ \varepsilon^2 \sin 7t - \\
- \frac{6\ 261}{6\ 871\ 947\ 673\ 600}\ \varepsilon^3 \sin 7t - \frac{167\ 381}{281\ 474\ 976\ 710\ 656\ 000}\ \varepsilon^4 \sin 7t - \\
- \frac{3}{838\ 860\ 800}\ \varepsilon^2 \sin 9t - \frac{1\ 047}{8\ 589\ 934\ 592\ 000}\ \varepsilon^3 \sin 9t + \\
+ \frac{441\ 739}{1\ 407\ 374\ 883\ 553\ 280\ 000}\ \varepsilon^4 \sin 9t - \frac{3}{83\ 886\ 080} \varepsilon^2 \sin 11t + \\
+ \frac{2\ 389}{17\ 179\ 869\ 184\ 000}\ \varepsilon^3 \sin 11t - \frac{69\ 291}{703\ 687\ 441\ 776\ 640\ 000}\ \varepsilon^4 \sin 11t - \\
- \frac{1}{167\ 772\ 160}\ \varepsilon^2 \sin 13t + \frac{359}{24\ 051\ 816\ 857\ 600}\ \varepsilon^3 \sin 13t - \\
- \frac{261}{9\ 851\ 624\ 184\ 872\ 960}\ \varepsilon^4 \sin 13t - \frac{3}{9\ 395\ 240\ 960}\ \varepsilon^2 \sin 15t - \\
- \frac{1\ 497}{192\ 414\ 534\ 860\ 800}\ \varepsilon^3 \sin 15t + \frac{4\ 993}{394\ 064\ 967\ 394\ 918\ 400}\ \varepsilon^4 \sin 15t - \\
- \frac{89}{41\ 231\ 686\ 041\ 600}\ \varepsilon^3 \sin 17t + \frac{1\ 737}{562\ 949\ 953\ 421\ 312\ 000}\ \varepsilon^4 \sin 17t - \\
- \frac{11}{51\ 539\ 607\ 552\ 000}\ \varepsilon^3 \sin 19t - \frac{1\ 031}{2\ 111\ 062\ 325\ 329\ 920\ 000}\ \varepsilon^4 \sin 19t - \\
- \frac{3}{377\ 957\ 122\ 048\ 000}\ \varepsilon^3 \sin 21t - \frac{199}{774\ 056\ 185\ 954\ 304\ 000}\ \varepsilon^4 \sin 21t -
\end{gathered}$$

$$-\frac{3}{77\ 405\ 618\ 595\ 430\ 400}\ \varepsilon^4 \sin 23t - \frac{1}{365\ 917\ 469\ 723\ 852\ 800}\ \varepsilon^4 \sin 25t.$$

Второе приближение к функции $\nu_2(\varepsilon)$ и к собственной функции $\mu_2(\varepsilon)$ согласно итерационной схеме (8) определяет вектор

$$\begin{bmatrix} \nu_2(\varepsilon) \\ \zeta_2(\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{123\ \varepsilon}{2\ 621\ 440} + \frac{43\ 510\ \varepsilon^2}{75\ 507\ 533\ 871} + \frac{9\ 013\ \varepsilon^3}{642\ 171\ 932\ 973} - \frac{62\ \varepsilon^4}{2\ 477\ 177\ 165\ 417} - \ \dots \end{bmatrix}.$$

Найденные два приближения к 2π-периодическому решению уравнения (9) и его собственной функции $\mu(\varepsilon)$ характеризуют невязки

$$\Delta_k(\varepsilon) = \Big\| y_k''(t,\varepsilon) + y_k(t,\varepsilon) - \sin 3t - \varepsilon \sin\varepsilon \cdot y_k(t,\varepsilon) -$$

$$-\varepsilon\mu_k(\varepsilon)\cdot y_k(t,\varepsilon) - \varepsilon\cdot y_k^3(t,\varepsilon)\Big\|_{C[0;2\pi]},\ k = 0,\ 1,\ 2\ .$$

В частности, при $\varepsilon = 0,1$ имеем:

$$\Delta_0(0,1) \approx 0,000\ 684\ 845,\ \Delta_1(0,1) \approx 4,78\ 247 \times 10^{-7},\ \Delta_2(0,1) \approx 2,81\ 063 \times 10^{-10}.$$

При $\varepsilon = 0,01$ невязки уменьшаются:

$$\Delta_0(0,01) \approx 0,0000\ 684\ 845,\ \Delta_1(0,01) \approx 4,78\ 227 \times 10^{-9},\ \Delta_2(0,01) \approx 2,81\ 182 \times 10^{-13}.$$

1. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
2. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
3. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV + 317 pp.
4. *Лыкова О.Б., Бойчук А.А.* Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 1. – С. 62–69.
5. *Бойчук А.А.* Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях // Асимптотические методы. Сб. научных трудов ИМ АН УССР. – Киев, 1985. – С. 24–30.
6. *Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д.* О параметрическом возбуждении электрических колебаний. Журн. техн. физики. – 1934. – № 3.– С. 5–29.
7. *Шмидт Г.* Параметрические колебания. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
8. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. – М.: Наука, 1987. – 328 с.
9. *Чуйко А.С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелинейные колебания. – 2005. – **8**, № 2.– С. 278–288.
10. *Чуйко С.М., Кулиш П.В.* Линейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – Т. 24. – С. 243 – 252.
11. *Чуйко С.М.* Область сходимости итерационной процедуры для автономной краевой задачи // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, № 3. – С. 416–432.
12. *Люлько Н.А.* Основной и комбинационный резонансы в нелинейной системе двух осциляторов. Новосибирск, 2012. – 33 с. (Препринт / РАН Сиб. отд-ние. Инст. математики; № 281).
13. *Силин В.П.* Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. – М.: Наука, 1973. – 287 с.

14. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
15. *Копелев Ю.Ф.* Параметрические колебания станков. – Металлорежущие станки: респ межвед. науч.-техн. сб. – Киев, 1984. – Вып. 12. – С. 3–8.
16. *Чуйко С.М., Старкова О.В.* Двухшаговая итерационная техника для построения функций Матье // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформатика. – 2011. – **22**, № 1. – С. 157–172.
17. *Чуйко С.М., Старкова О.В.* Модифицированная двухшаговая итерационная техника для построения функций Матье // Комп. исследов. и моделированиею – 2012. – **4**, №1. – С. 31–43.

S. M. Chuiko, П. В. Куліш

Parametric resonance in the semi-nonlinear periodic boundary-value problem.

We construct necessary and sufficient conditions for the existence of solution of seminonlinear periodical boundary value problem for a parametric excitation system of ordinary differential equations. The convergent iteration algorithms for the construction of the solutions of the semi-nonlinear periodical boundary value problem for a parametric excitation system differential equations in the critical case have been found. Using the convergent iteration algorithms we expand solution of seminonlinear periodical boundary value problem for a parametric excitation Duffing type equation in the neighborhood of the generating solution. Estimates for the value of residual of the solutions of the seminonlinear periodical boundary value problem for a parametric excitation Duffing type equation are found.

Keywords: *Parametric excitation system, periodic boundary value problem, Green operator.*

С. М. Чуйко, P. V. Kulish

Слабконелінейна періодична задача у випадку параметричного резонансу.

Знайдено необхідні та достатні умови існування і збіжний ітераційний алгоритм для побудови розв'язків, а також власних функцій періодичних крайових задач, у випадку параметричного резонансу. Запропоноване рівняння для породжувальних амплітуд для періодичних крайових задач у випадку параметричного резонансу істотно відрізняється від традиційного рівняння для породжувальних амплітуд у відсутності параметричного резонансу залежністю від малого параметра, як самого рівняння, так і його коренів. Як приклад ефективності необхідних і достатніх умов існування, а також демонстрації збіжності ітераційних алгоритмів для побудови розв'язків і власних функцій періодичних крайових задач, у випадку параметричного резонансу, досліджено періодичну задачу для рівняння типу Дюффінга з параметричним збудженням.

Ключові слова: *Параметричний резонанс, періодична задача, оператор Гріна.*

Донбасский государственный педагогический ун-т
`chujko-slav@inbox.ru`

Получено 25.06.13