УДК 519.21

©2013. **А. А. Хархота**

СВОЙСТВА МОДЕЛИ САМУЭЛЬСОНА С ТЕЛЕГРАФНЫМ ТРЕНДОМ

В работе рассмотрена модель Самуэльсона, в которой динамику тренда описывает интеграл от обобщенной телеграфной волны. Изучены свойства самой модели, а также свойства базовой последовательности измерений значений процесса.

Ключевые слова: *модель Самуэльсона, телеграфная волна, стационарный процесс, эргодический процесс.*

1. Постановка задачи. Одна из первых попыток описать динамику стоимости финансового актива с помощью стохастических уравнений была предпринята П. Самуэльсоном в 1965г. В работе [1] он рассмотрел процесс

$$S(t) = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)},$$

который является решением задачи

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad t \geq 0, \quad S(0) = S_0 > 0. \tag{1}$$

Здесь $W(t)$ – стандартный винеровский процесс со значениями в $\mathbb{R}^1$; μ называют коэффициентом роста, а σ – коэффициентом волатильности. Простота и наличие хороших свойств сделали эту модель популярным объектом исследования. Так, в 90-х годах XX-го века А.Н. Ширяев и его ученики разработали теорию опционов для финансовых активов, описываемых моделью Самуэльсона (см. [2]).

Статистика модели Самуэльсона не представляет трудностей. Пусть $t_k = kh$ и $S_k = S(kh)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ и $h > 0$. Таким образом, измерения производятся с фиксированным шагом h по времени, что типично для биржевых торгов. Тогда

$$ln \frac{S_{k+1}}{S_k} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) h + \sigma(W(k+1)h - W(kh)), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Последовательность $\left\{\ln \frac{S_{k+1}}{S_k}\right\}_{k=0}^{\infty}$ является последовательностью независимых гауссовских величин с параметрами $\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) h; \sigma^2 h\right)$ и оценки параметров μ и σ^2 могут быть построены и исследованы классическими методами математической статистики. Однако, модель Самуэльсона не нашла широкого применения на практике. Прежде всего это связано с тем, что модель предполагает постоянство коэффициентов волатильности σ и роста μ, что трудно встретить в реальности. Поэтому многими авторами предлагались различные усовершенствования модели Самуэльсона. Так, Б. Дюпири [3] была предложена модель типа (1), где коэффициентом волатильности является детерминированная функция $\sigma(S, t)$. Другое усложнение модели Самуэльсона представлено моделями стохастической волатильности, одной из которых является модель Гестона [4]. Эта модель состоит из двух нелинейных стохастических уравнений. Одно описывает динамику курса финансового актива и имеет вид (1), но со случайной переменной волатильностью $\sigma = \sigma(t)$. Второе уравнение описывает динамику квадрата волатильности $\sigma^2(t)$. В работе [5] Г.Л. Бухбиндер и К.М. Чистилин построили оценки неизвестных параметров модели Гестона и применили полученные результаты к мониторингу реальных курсов акций российских компаний на ММВБ. Еще одной альтернативой классической модели служат модели диффузии со скачками. В модели такого типа, предложенной Р. Мертоном [6], динамика логарифма цены актива описывается суммой броуновского движения со сносом и сложного процесса Пуассона с нормально распределенными размерами скачков. Однако, в указанных моделях коэффициент роста μ оставался постоянным, что существенно снижало адекватность модели по отношению к реальным процессам, протекающим на финансовых рынках. Поэтому актуальной является задача построения модели, допускающей тренды, которые меняют свое направление в случайные моменты времени и имеют различные коэффициенты роста. В данной работе построена модель типа модели Самуэльсона, у которой волатильность постоянна, а динамику тренда описывает интеграл от обобщенной телеграфной волны.

2. Обобщенная модель Самуэльсона. Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, \Im, \{\Im_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ заданы независимые процесс Пуассона $\nu(t)$ с параметром $\lambda > 0$ и винеровский процесс $W(t)$, а также последовательность независимых случайных величин $\{\eta_k\}_{k=0}^{\infty}$, имеющих нормальное распределение с параметрами $(0; \sigma_0^2)$. Случайный процесс $\eta_{\nu(t)}$ называют обобщенной телеграфной волной.

Определим процесс $\mu(t)$ равенством

$$\mu(t) = \int\limits_0^t \eta_{\nu(s)} ds, \tag{2}$$

правую часть которого будем понимать как интеграл Лебега в смысле сходимости в среднем квадратическом.

Определение 1. Будем говорить, что процесс $S(t)$ является моделью Самуэльсона с телеграфным трендом, если

$$S(t) = S_0 e^{\mu(t) - \frac{\sigma^2 t}{2} + \sigma W(t)}, \quad t \in [0; T].$$

Таким образом, в предлагаемой модели, в отличие от модели Самуэльсона, коэффициент роста является случайным процессом $\mu(t)$ и описывает динамику тренда курса $S(t)$.

Прежде всего, покажем, что процесс $\mu(t)$ определен корректно и является непрерывным процессом.

Теорема 1. *Процесс $\mu(t)$ существует и непрерывен в среднем квадратическом по $t \in (0; T)$.*

Доказательство. Для сходимости интеграла из (2) в указанном смысле достаточно, чтобы корреляционная функция $R_\eta(t,s)$ процесса $\eta_{\nu(t)}$ была интегрируема по Риману на $[0; T] \times [0; T]$. Имеем

$$R_\eta(t,s) = E\eta_{\nu(t)}\eta_{\nu(s)} = E\{\eta_{\nu(t)}\eta_{\nu(s)} | \nu(t) \neq \nu(s)\} P\{\nu(t) \neq \nu(s)\} +$$

$$+ E\{\eta^2_{\nu(t)}|\nu(t) = \nu(s)\}P\{\nu(t) = \nu(s)\} = \sigma_0^2 e^{-\lambda|t-s|}.$$

Значит, процесс $\mu(t)$ существует.

По теореме Фубини

$$E\mu(t) = \int\limits_0^t E\eta_{\nu(s)}ds = 0,$$

$$R_\mu(t,s) = E\mu(t)\mu(s) = \sigma_0^2 \int\limits_0^t \int\limits_0^s e^{-\lambda|z_2-z_1|}dz_1dz_2 =$$

$$= \frac{\sigma_0^2}{\lambda^2}\left(2\lambda\min(s;t) - 1 - e^{-\lambda|t-s|} + e^{-\lambda\max(s;t)} + e^{-\lambda\min(s;t)}\right).$$

При $s \to t$ имеем

$$E\left(\mu(s) - \mu(t)\right)^2 = E\left(\mu(s)\right)^2 - 2E\mu(s)\mu(t) + E\left(\mu(t)\right)^2 =$$
$$= \frac{2\sigma_0^2}{\lambda^2}\left(\lambda s - 1 + e^{-\lambda s} - 2\lambda\max(s;t) + 1 + e^{-\lambda|t-s|} - e^{-\lambda\max(s;t)} -\right.$$
$$\left. - e^{-\lambda\min(s;t)} + \lambda t - 1 + e^{-\lambda t}\right) \to 0,$$

значит, процесс $\mu(t)$ непрерывен в среднем квадратическом на интервале $(0;T)$. Теорема 1 доказана. □

Примеры траекторий процессов $\mu(t)$ и $S(t)$ приведены на рис. 1.

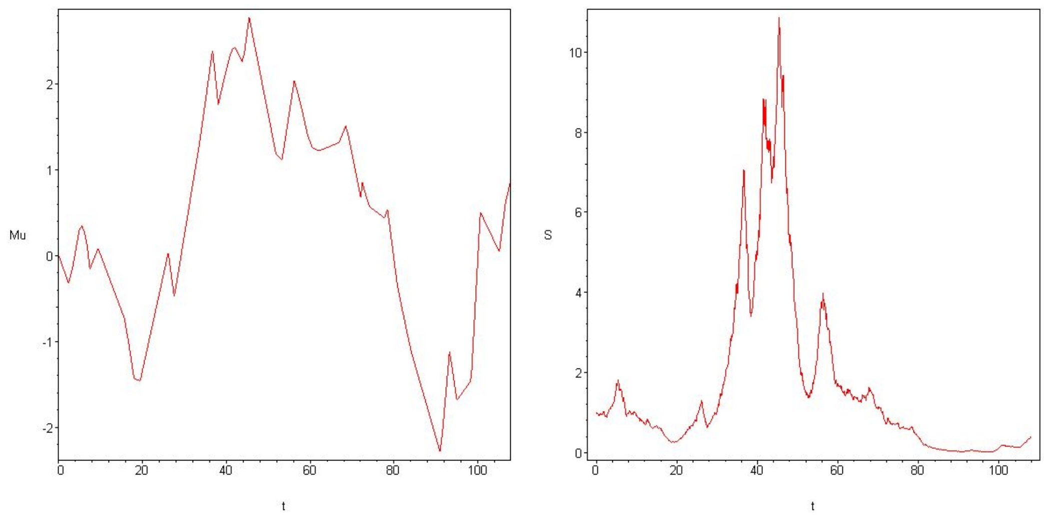

Рис. 1. Траектории процессов $\mu(t)$ (слева) и $S(t)$ (справа) для значений параметров $\lambda = 0,5$, $\sigma_0 = 0,3$, $\sigma = 0,1$, $T = 108$

Произведем классификацию процесса $\mu(t)$. Очевидно, что $\mu(t)$ не является гауссовским. Так как $R_\mu(t,s) \neq R_\mu(t-s)$, то $\mu(t)$ не является стационарным процессом.

Покажем, что $\mu(t)$ не является процессом с независимыми приращениями. Действительно, для любых t_1, t_2, t_3, t_4 таких, что $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < T$, имеем

$$E[\mu(t_2) - \mu(t_1)][\mu(t_4) - \mu(t_3)] = \sigma_0^2 \int\limits_{t_3}^{t_4} \int\limits_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda(z_2 - z_1)} dz_1 dz_2 =$$

$$= \frac{\sigma_0^2}{\lambda^2} \left(e^{\lambda t_2} - e^{\lambda t_1}\right) \left(e^{-\lambda t_3} - e^{-\lambda t_4}\right) \neq 0,$$

то есть приращения $\mu(t)$ коррелированны, а значит, зависимы.

3. Корреляционный анализ базовой последовательности измерений для модели Самуэльсона с телеграфным трендом. Для решения задач статистики (например, задачи оценивания параметров) необходимо определить порядок формирования выборки значений изучаемого процесса и выяснить свойства этой выборки.

Пусть ось времени разбита с постоянным шагом $h > 0$ точками $t_k = kh$, $k = 0, 1, \ldots$. Обозначим

$$\Delta_k \mu = \mu(t_{k+1}) - \mu(t_k) = \int\limits_{kh}^{(k+1)h} \eta_{\nu(s)} ds,$$

$$\Delta_k W = W((k+1)h) - W(kh),$$

$$z_k = z(t_{k+1}) - z(t_k) = \Delta_k \mu - \frac{\sigma^2 h}{2} + \sigma \Delta_k W.$$

Последовательность $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ будем называть базовой последовательностью измерений (БПИ).

Изучим свойства последовательностей $\{\Delta_k \mu\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$. Вначале рассмотрим $\{\Delta_k \mu\}_{k=0}^{\infty}$.

Теорема 2. *Последовательность* $\{\Delta_k \mu\}_{k=0}^{\infty}$ *является стационарной в широком смысле.*

Доказательство. Имеем

$$E\Delta_k \mu = \int\limits_{kh}^{(k+1)h} E\eta_{\nu(s)} ds = 0.$$

Построим корреляционную функцию $R_{\Delta\mu}(k, m)$. Если $k = m$, то

$$R_{\Delta\mu}(k, k) = D\Delta_k \mu = E(\Delta_k \mu)^2 = \frac{2\sigma_0^2}{\lambda^2} \left(\lambda h - 1 + e^{-\lambda h}\right) > 0.$$

Если $k \neq m$, то

$$R_{\Delta\mu}(k, m) = E\Delta_k \mu \Delta_m \mu = \frac{\sigma_0^2}{\lambda^2} \left(e^{\lambda h} - 1\right)^2 e^{-\lambda h} e^{-\lambda h |m-k|}. \tag{3}$$

Так как $R\Delta_\mu(k, m) = R\Delta_\mu(|m - k|)$, то последовательность $\{\Delta_k \mu\}_{k=0}^{\infty}$ является стационарной в широком смысле. Теорема 2 доказана. □

Теорема 3. *Последовательность* $\{\Delta_k \mu\}_{k=0}^{\infty}$ *является стационарной в узком смысле.*

Доказательство. Построим доказательство следующим образом: вначале докажем стационарность в узком смысле процесса $\eta_{\nu(s)}$, а затем – последовательности $\{\Delta_k \mu\}_{k=0}^{\infty}$.

По определению процесс $\eta_{\nu(s)}$, $s \in [0;T]$ стационарен в узком смысле, если

$$\begin{aligned} &P\{\eta_{\nu(t_1)} < x_1, \eta_{\nu(t_2)} < x_2, \dots, \eta_{\nu(t_n)} < x_n\} = \\ &= P\{\eta_{\nu(t_1+\tau)} < x_1, \eta_{\nu(t_2+\tau)} < x_2, \dots, \eta_{\nu(t_n+\tau)} < x_n\}, \end{aligned} \tag{4}$$

для любых $\tau, t_k \in [0;T]$, $k = 1, 2, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ таких, что $t_1+\tau, t_2+\tau, \dots, t_n+\tau \in [0;T]$. Докажем это при помощи метода математической индукции. Покажем, что

$$P\{\eta_{\nu(t_1)} < x_1, \eta_{\nu(t_2)} < x_2\} = P\{\eta_{\nu(t_1+\tau)} < x_1, \eta_{\nu(t_2+\tau)} < x_2\}. \tag{5}$$

По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} &P\{\eta_{\nu(t_1)} < x_1, \eta_{\nu(t_2)} < x_2\} = \\ &= P\{\eta_{\nu(t_1)} < x_1, \eta_{\nu(t_2)} < x_2 | \nu(t_1) = \nu(t_2)\} P\{\nu(t_1) = \nu(t_2)\} + \\ &+ P\{\eta_{\nu(t_1)} < x_1, \eta_{\nu(t_2)} < x_2 | \nu(t_1) \neq \nu(t_2)\} P\{\nu(t_1) \neq \nu(t_2)\} = \\ &= P\{\eta_{\nu(t_1)} < \min(x_1, x_2)\} e^{-\lambda|t_2 - t_1|} + P\{\eta_{\nu(t_1)} < x_1\} P\{\eta_{\nu(t_2)} < x_2\} \left(1 - e^{-\lambda|t_2 - t_1|}\right), \end{aligned} \tag{6}$$

где последнее равенство имеет место в силу независимости величин η_k, $k = 0, 1, \dots$. Аналогичный вид имеет и правая часть (5):

$$\begin{aligned} &P\{\eta_{\nu(t_1+\tau)} < x_1, \eta_{\nu(t_2+\tau)} < x_2\} = \\ &= P\{\eta_{\nu(t_1+\tau)} < \min(x_1, x_2)\} e^{-\lambda|t_2 - t_1|} + \\ &+ P\{\eta_{\nu(t_1+\tau)} < x_1\} P\{\eta_{\nu(t_2+\tau)} < x_2\} \left(1 - e^{-\lambda|t_2 - t_1|}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что распределение η_k совпадает с распределением $\eta_{\nu(t)}$. Действительно,

$$P\{\eta_{\nu(t)} < x\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{\eta_k < x\} P\{\nu(t) = k\} = P\{\eta_k < x\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = P\{\eta_k < x\}.$$

Значит, соответствующие вероятности в правых частях выражений (6) и (7) равны, то есть имеет место (5).

Далее, предположим, что (4) верно для некоторого $n = N - 1$. При $n = N$ имеем

$$\begin{aligned} &P\{\eta_{\nu(t_1)} < x_1, \dots, \eta_{\nu(t_{N-1})} < x_{N-1}, \eta_{\nu(t_N)} < x_N\} = \\ &= P\{\eta_{\nu(t_1)} < x_1, \dots, \eta_{\nu(t_N)} < x_N | \nu(t_{N-1}) = \nu(t_N)\} P\{\nu(t_{N-1}) = \nu(t_N)\} + \\ &+ P\{\eta_{\nu(t_1)} < x_1, \eta_{\nu(t_N)} < x_N | \nu(t_{N-1}) \neq \nu(t_N)\} P\{\nu(t_{N-1}) \neq \nu(t_N)\} = \end{aligned}$$

$$= P\{\eta_{\nu(t_1)} < x_1, \ldots, \eta_{\nu(t_{N-1})} < \min(x_{N-1}, x_N)\} e^{-\lambda|t_N - t_{N-1}|} +$$
$$+ P\{\eta_{\nu(t_1)} < x_1, \ldots, \eta_{\nu(t_{N-1})} < x_{N-1}\} P\{\eta_{\nu(t_N)} < x_N\} \left(1 - e^{-\lambda|t_N - t_{N-1}|}\right) =$$
$$= P\{\eta_{\nu(t_1+\tau)} < x_1, \ldots, \eta_{\nu(t_{N-1}+\tau)} < \min(x_{N-1}, x_N)\} e^{-\lambda|t_N - t_{N-1}|} +$$
$$+ P\{\eta_{\nu(t_1+\tau)} < x_1, \ldots, \eta_{\nu(t_{N-1}+\tau)} < x_{N-1}\} P\{\eta_{\nu(t_N+\tau)} < x_N\} \left(1 - e^{-\lambda|t_N - t_{N-1}|}\right) =$$
$$= P\{\eta_{\nu(t_1+\tau)} < x_1, \ldots, \eta_{\nu(t_{N-1}+\tau)} < x_{N-1}, \eta_{\nu(t_N+\tau)} < x_N\}$$

в силу предположения индукции. Таким образом, (4) доказано.

Теперь рассмотрим последовательность $\{\Delta_k \mu\}_{k=0}^{\infty}$. Нужно доказать равенство:

$$P\{\Delta_{k_1}\mu < x_1, \ldots, \Delta_{k_n}\mu < x_n\} = P\{\Delta_{k_1+l}\mu < x_1, \ldots, \Delta_{k_n+l}\mu < x_n\} \tag{8}$$

для любых $k_i = 0, 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим правую часть (8):

$$\begin{aligned} &P\{\Delta_{k_1+l}\mu < x_1, \ldots, \Delta_{k_n+l}\mu < x_n\} = \\ &= P\left\{ \int\limits_{(k_1+l)h}^{(k_1+l+1)h} \eta_{\nu(s)} ds < x_1, \ldots, \int\limits_{(k_n+l)h}^{(k_n+l+1)h} \eta_{\nu(s)} ds < x_n \right\} = \\ &= P\left\{ \int\limits_{k_1 h}^{(k_1+1)h} \eta_{\nu(\tilde{s}+lh)} d\tilde{s} < x_1, \ldots, \int\limits_{k_n h}^{(k_n+1)h} \eta_{\nu(\tilde{s}+lh)} d\tilde{s} < x_n \right\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Выберем разбиения: $k_i h = r_{i_0} < r_{i_1} < \ldots < r_{i_{m_i-1}} < r_{i_{m_i}} = (k_i+1)h$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и представим интегралы из (9) в виде среднеквадратических пределов интегральных сумм:

$$\int\limits_{k_i h}^{(k_i+1)h} \eta_{\nu(\tilde{s}+lh)} d\tilde{s} = \mathtt{l.i.m.}_{\max \Delta r_{i_j} \to 0} \sum_{j=0}^{m_i-1} \eta_{\nu(s_{i_j}+lh)} \Delta r_{i_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Из (10) следует сходимость распределений интегральных сумм к распределениям интегралов, поэтому (9) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} &P\left\{ \int\limits_{k_1 h}^{(k_1+1)h} \eta_{\nu(\tilde{s}+lh)} d\tilde{s} < x_1, \ldots, \int\limits_{k_n h}^{(k_n+1)h} \eta_{\nu(\tilde{s}+lh)} d\tilde{s} < x_n \right\} = \\ &= \lim_{\max \Delta r_{i_j} \to 0} P\left\{ \sum_{j=0}^{m_1-1} \eta_{\nu(s_{1_j}+lh)} \Delta r_{1_j} < x_1, \ldots, \sum_{j=0}^{m_n-1} \eta_{\nu(s_{n_j}+lh)} \Delta r_{n_j} < x_n \right\} = \\ &= \lim_{\max \Delta r_{i_j} \to 0} \int\limits_G \cdots \int f_{\eta_{\nu(s_{1_0}+lh)}, \ldots, \eta_{\nu(s_{n_{m_n-1}}+lh)}}(y_{1_0}, \ldots y_{n_{m_n-1}}) dy_{1_0} \ldots dy_{n_{m_n-1}}, \end{aligned}$$

где область $G = \left\{ \sum\limits_{j=0}^{m_1-1} y_{1_j} \Delta r_{1_j} < x_1 \right\} \bigcap \ldots \bigcap \left\{ \sum\limits_{j=0}^{m_n-1} y_{n_j} \Delta r_{n_j} < x_n \right\}$ и $f_{\eta_1,\ldots,\eta_n}(y_1,\ldots,y_n)$ – совместная плотность величин $\eta_1,\ldots,\eta_n$.
В силу стационарности в узком смысле процесса $\eta_{\nu(s)}$ имеем

$$\lim_{\max \Delta r_{i_j} \to 0} \int\limits_G \cdots \int f_{\eta_{\nu(s_{1_0}+lh)},\ldots,\eta_{\nu(s_{n_{m_n-1}}+lh)}}(y_{1_0},\ldots,y_{n_{m_n-1}}) dy_{1_0} \ldots dy_{n_{m_n-1}} =$$

$$= P \left\{ \int\limits_{k_1 h}^{(k_1+1)h} \eta_{\nu(\tilde{s})} d\tilde{s} < x_1, \ldots, \int\limits_{k_n h}^{(k_n+1)h} \eta_{\nu(\tilde{s})} d\tilde{s} < x_n \right\},$$

то есть мы получили левую часть (8). Теорема 3 доказана. □

При решении задач статистики случайных процессов важную роль играет эргодичность процесса. Наличие у стационарной последовательности таких свойств как эргодичность по математическому ожиданию и эргодичность по корреляционной функции позволяет решать задачи статистики, основываясь на одной достаточно длинной траектории процесса.

Определение 2. Говорят, что процесс $\{\Delta_k \mu\}_{k=0}^{\infty}$ является эргодическим (по математическому ожиданию), если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k \mu = E \Delta_k \mu$$

с вероятностью 1.

Определение 3. Если последовательность $\{\Delta_k \mu \Delta_{k+l} \mu\}_{k=0}^{\infty}$, $l > 0$ эргодична в смысле определения 1, то будем говорить, что $\{\Delta_k \mu\}_{k=0}^{\infty}$ эргодична по корреляционной функции (см., напр., [7, с. 252]).

Теорема 4. *Последовательность* $\{\Delta_k \mu\}_{k=0}^{\infty}$ *эргодична по математическому ожиданию и по корреляционной функции.*

Доказательство. Из (3) следует, что $R_{\Delta\mu}(l) = O(|l|^{-\beta})$, при любом $\beta > 0$. Значит, согласно [8, с. 101], последовательность $\{\Delta_k \mu\}_{k=0}^{\infty}$ эргодична по математическому ожиданию. Рассмотрим последовательность $\{M_k(p)\}_{k=0}^{\infty} = \{\Delta_k \mu \Delta_{k+p} \mu\}_{k=0}^{\infty}$, $p > 0$. Найдем $E\Delta_k \mu \Delta_{k+p} \mu \Delta_{k+l} \mu \Delta_{k+p+l} \mu$ при $l > p$:

$$E\Delta_k \mu \Delta_{k+p} \mu \Delta_{k+l} \mu \Delta_{k+p+l} \mu =$$
$$= \int\limits_{(k+p+l)h}^{(k+p+l+1)h} \int\limits_{(k+l)h}^{(k+l+1)h} \int\limits_{(k+p)h}^{(k+p+1)h} \int\limits_{kh}^{(k+1)h} E \prod_{j=1}^{4} \eta_{\nu(r_j)} dr_1 dr_2 dr_3 dr_4,$$

где

$$E\eta_{\nu(r_1)} \eta_{\nu(r_2)} \eta_{\nu(r_3)} \eta_{\nu(r_4)} =$$

$$= 3\sigma_0^4 P\{\nu(r_1) = \nu(r_2) = \nu(r_3) = \nu(r_4)\} +$$
$$+ \sigma_0^4 P\{\nu(r_1) = \nu(r_2), \nu(r_2) \neq \nu(r_3), \nu(r_3) = \nu(r_4)\} =$$
$$= 3\sigma_0^4 e^{-\lambda(r_4-r_1)} + \sigma_0^4 e^{-\lambda(r_2-r_1)} e^{-\lambda(r_4-r_3)} \left(1 - e^{-\lambda(r_3-r_2)}\right).$$

Тогда получим

$$E\Delta_k\mu\Delta_{k+p}\mu\Delta_{k+l}\mu\Delta_{k+p+l}\mu =$$
$$= \frac{2\sigma_0^4 h^2}{\lambda^2} e^{-\lambda h(p-1)} e^{-\lambda hl} \left(1 - e^{-\lambda h}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_0^2}{\lambda^2}\left(e^{\lambda h} - 1\right)^2 e^{-\lambda h} e^{-\lambda hp}\right)^2$$

и

$$R_M(l) = \frac{2\sigma_0^4 h^2}{\lambda^2} e^{-\lambda h(p-1)} e^{-\lambda hl} \left(1 - e^{-\lambda h}\right)^2. \tag{11}$$

Из (11) следует эргодичность по корреляционной функции последовательности $\{\Delta_k\mu\}_{k=0}^{\infty}$. Теорема 4 доказана. □

Следствие 1. *Для последовательности* $\{\Delta_k\mu\}_{k=0}^{\infty}$ *верно следующее:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k\mu = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-l} \sum_{k=0}^{n-l-1} \Delta_k\mu\Delta_{k+l}\mu = \begin{cases} \dfrac{2\sigma_0^2}{\lambda^2}\left(\lambda h - 1 + e^{-\lambda h}\right), & l = 0, \\ \dfrac{\sigma_0^2}{\lambda^2}\left(e^{\lambda h} - 1\right)^2 e^{-\lambda h} e^{-\lambda hl}, & l > 0 \end{cases}$$

с вероятностью 1.

Следствие 2. *Для последовательности* $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ *верно следующее:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z_k = -\frac{\sigma^2 h}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-l} \sum_{k=0}^{n-l-1} \mathring{z}_k \mathring{z}_{k+l} = \begin{cases} \dfrac{2\sigma_0^2}{\lambda^2}\left(\lambda h - 1 + e^{-\lambda h}\right) + \sigma^2 h, & l = 0, \\ \dfrac{\sigma_0^2}{\lambda^2}\left(e^{\lambda h} - 1\right)^2 e^{-\lambda h} e^{-\lambda hl}, & l > 0 \end{cases}$$

с вероятностью 1.

4. Выводы. БПИ $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ обладает набором важных свойств.

1. Последовательность $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ стационарна в узком смысле.

2. Последовательность $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ эргодична по математическому ожиданию, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z_k = Ez_k = -\frac{\sigma^2 h}{2}$$

с вероятностью 1.

3. Последовательность $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ эргодична по корреляционной функции, то есть

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-l}\sum_{k=0}^{n-l-1}\mathring{z}_k\mathring{z}_{k+l}=R_{\mathring{z}}(l)=\begin{cases}\dfrac{2\sigma_0^2}{\lambda^2}\left(\lambda h-1+e^{-\lambda h}\right)+\sigma^2 h, & l=0,\\ \dfrac{\sigma_0^2}{\lambda^2}\left(e^{\lambda h}-1\right)^2 e^{-\lambda h}e^{-\lambda h|l|}, & l\neq 0\end{cases}$$

с вероятностью 1.

Полученные результаты создают теоретическую основу для построения и изучения свойств статистических оценок параметров λ, σ_0^2 и σ^2.

1. *Samuelson P.A.* Rational theory of warrant pricing // Industrial Management Review. – 1965. – Vol. 6 – P. 13–31.
2. *Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В.* К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. II. Непрерывное время. Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – Т. 39, вып. 1. – С. 80–130.
3. *Dupire B.* Pricing with a smile // RISK-magazin. – 1994. – Vol. 7, No. 1. – P. 18–20.
4. *Heston S.L.* A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options // Rev. Financial Studies. – 1993. – Vol. 6, No. 2. – P. 327–343.
5. *Merton R.* Option pricing when underlying stock returns are discontinuous // J. Financial Economics. – 1976. – **3**. – P. 125–144.
6. *Бухбиндер Г.Л., Чистилин К.М.* Описание российского фондового рынка в рамках модели Гестона // Мат. моделирование. – 2005. – Т. 17, № 10. – С. 31–38.
7. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Прикладные задачи теории вероятностей. – М.: Радио и связь, 1983. – 416 с.
8. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. – М.: Мир, 1969. – 398 с.

A. A. Kharkhota

Properties of the Samuelson model with a telegraph trend.

In this paper we study the Samuelson model, in which the trend dynamics is described by the integral of the generalized telegraph wave. The model properties, as well as the properties of the basic sequence of process values have been studied.

Keywords: *Samuelson model, telegraph wave, stationary process, ergodic process.*

А. О. Хархота

Властивості моделі Самуельсона з телеграфним трендом.

У роботі розглянуто модель Самуельсона, в якій динаміку тренда описує інтеграл від узагальненої телеграфної хвилі. Вивчено властивості самої моделі, а також властивості базової послідовності вимірювань значень процесу.

Ключові слова: *модель Самуельсона, телеграфна хвиля, стаціонарний процес, ергодичний процес.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
annaharhota@yandex.ru

Получено 25.09.13