УДК 517.956.4

©2013. **Е. В. Степанова**

О ЛОКАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ ПОТЕНЦИАЛОМ

В работе изучается эволюция носителей решений задачи Коши–Дирихле для многомерного параболического уравнения с вырождающимся при $t = 0$ потенциалом $g(t, x)$; методом локальных интегральных априорных оценок доказан эффект локализации.

Ключевые слова: *нелинейные параболические уравнения, абсорбция, локализация.*

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}$ ограниченная область в $\mathbb{R}^{n\geqslant 1}$ с липшицевой границей $\partial\Omega = \partial_0\Omega \cup \partial_1\Omega$, где $\partial_0\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}, \partial_1\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > l = const > 1\}$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \big(a_i(t, x, u, \nabla_x u)\big)_{x_i} + g(t, x)|u|^{q-1}\, u = 0 \ \text{ в } \ Q_T = (0, T) \times \Omega,\ 0 < T < \infty; \quad (1)$$

$$u(t, x) = f(t, x) \ \text{ на } \ (0, T) \times \partial_0\Omega, \qquad u(t, x) = 0 \ \text{ на } \ (0, T) \times \partial_1\Omega; \quad (2)$$

$$u(0, x) = 0,\ \ x \in \Omega. \quad (3)$$

В уравнении (1) функции $a_i(t, x, s, \xi)$ $(i = 1, ..., n)$ непрерывные по совокупности аргументов при всех $(t, x, s, \xi) \in (0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют условиям:

$$|a_i(t, x, s, \xi)| \le d_1|\xi|,\ d_1 = const < \infty, \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_i(t, x, s, \xi) - a_i(t, x, s, \eta)\big)(\xi_i - \eta_i) \ge d_2|\xi - \eta|^2,\ d_2 = const > 0, \quad (5)$$

$g(t, x)$ – непрерывная неотрицательная функция, 0<q<1. Граничный режим $f(t, x)$ из (2) определен на всей области Q_T и $f(t, \cdot) \in L_2(0, T; H^1(\Omega, \partial_1\Omega)) \cap H^1(0, T; L_2(\Omega))$, здесь через $H^1(\Omega, \Gamma)$ обозначено замыкание в норме соболевского пространства $W_2^1(\Omega)$ множества функций из $C^\infty(\Omega)$, обращающихся в нуль в окрестности Γ. Отметим, что существование решения задачи (1)–(3) следует из результатов [1].

Определение. Решением задачи (1)–(3) называется функция $u(t, \cdot) \in f(t, \cdot) + L_2\big(0, T; H^1(\Omega, \partial\Omega)\big)$ с $u_t(t, \cdot) \in L_2\big(0, T; \big(H^1(\Omega, \partial\Omega)\big)^*\big)$, для которой выполняется начальное условие (3) и справедливо интегральное тождество:

$$\int\limits_{(0,T)} \langle u_t,\ \xi\rangle\ dt\ +\int\limits_{(0,T)\times\Omega} \sum_{i=1}^{n} a_i(t, x, u, \nabla_x u)\xi_{x_i}\, dx\, dt\ + \\ + \int\limits_{(0,T)\times\Omega} g(t, x)|u|^{q-1}u\,\xi\, dx\, dt = 0 \qquad \forall\ \xi \in L_2(0, T; H^1(\Omega, \partial\Omega)). \quad (6)$$

Эволюция носителей решений для одномерных полулинейных параболических уравнений изучалась в [2]–[5], где можно найти дальнейшие ссылки. Подчеркнем, что результаты в вышеприведенных работах получены барьерной техникой, которая в принципе не применима к уравнениям, не допускающим соответствующих теорем сравнения. В настоящей работе изучается распространение носителей решений многомерного параболического уравнения с абсорбционным потенциалом $g(t,x)$; предложен новый метод исследования, с помощью которого доказан эффект локализации решения рассматриваемой задачи.

2. Формулировка результата.

Теорема. *Пусть* g *из (1) удовлетворяет условию:* $\inf_{x\in\Omega} g(t,x) = g_0(t) > 0$ $\forall\, t > 0,\ g_0(0) = 0$. *Тогда решение задачи (1)–(3) обладает свойством локализации, т.е.* $\sup\{\zeta(t) : 0 < \delta \le t < T\} < c < \infty$, *где* $\zeta(t) := \sup\{|x| : x \in supp\, u(t,\cdot)\}$.

3. Доказательство Теоремы. В силу объемного доказательства представленного результата, проведем его разбивку на этапы в виде лемм.

Лемма 1. *Для произвольных* $\tau \leqslant T$ *справедлива априорная оценка:*

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau}\int\limits_{\Omega}|u(t,x)|^2dx + \int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\left(|\nabla_x u|^2 + g(t,x)|u(t,x)|^{q+1}\right)dx\,dt \leqslant CF(\tau), \qquad (7)$$

где $0 < C = const < \infty$, *а граничный режим* $f(t,x)$ *из (2) описывается функцией*

$$F(t) := \sup_{0\leqslant s\leqslant t}\int\limits_{\Omega}|f(s,x)|^2dx + \int\limits_0^{t}\int\limits_{\Omega}\left(|\nabla_x f|^2 + g(t,x)|f(t,x)|^{q+1}\right)dx\,dt + \\ + \int\limits_0^{t}\int\limits_{\Omega}|f_t(t,x)|^2dx\,dt.$$

Доказательство. Для произвольного $\tau \in (0,T]$ определим пробную функцию

$$\xi(t,x) := \xi_\tau(t,x) = \begin{cases} u(t,x) - f(t,x), & \text{если } t \leqslant \tau,\\ 0, & \text{если } t > \tau.\end{cases}$$

Подстановка этой функции в тождество (6) даёт:

$$\int\limits_{(0,\tau)}\langle u_t, u-f\rangle\,dt + \int\limits_{(0,\tau)\times\Omega}\sum_{i=1}^{n}a_i(t,x,u,\nabla_x u)(u-f)_{x_i}dx\,dt + \\ + \int\limits_{(0,\tau)\times\Omega}g(t,x)|u|^{q-1}u(u-f)\,dx\,dt = 0. \qquad (8)$$

В силу формулы интегрирования по частям [1] имеем:

$$\int\limits_{(0,\tau)} \langle u_t, u-f\rangle\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u(\tau,x)|^2 dx + \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega u(t,x)f_t(t,x)\,dx\,dt\ - \int\limits_\Omega u(\tau,x)f(\tau,x)\,dx.$$

Поэтому из (8) с учетом структурных условий (4) и (5) следует:

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u(\tau,x)|^2dx + \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \Big(|\nabla_x u|^2 + g(t,x)|u(x,t)|^{q+1}\Big)dxdt \leqslant$$
$$\leqslant d_1\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega |\nabla_x u|\,|\nabla_x f(t,x)|dx\,dt + \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega g(t,x)|u(t,x)|^q\,|f(t,x)|\,dx\,dt +$$
$$+\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega |u(t,x)|\,|f_t(t,x)|\,dx\,dt + \int\limits_\Omega |u(\tau,x)|\,|f(\tau,x)|dx. \tag{9}$$

Оценивая сверху при помощи неравенств Юнга с ε слагаемые справа в неравенстве (9), приходим после простых вычислений к:

$$\int\limits_\Omega |u(\tau,x)|^2dx + \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \Big(|\nabla_x u|^2 + g(t,x)|u(t,x)|^{q+1}\Big)dxdt \leqslant \frac{1}{2T}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega |u(t,x)|^2\,dx\,dt +$$
$$c_1\int\limits_\Omega |f(\tau,x)|^2\,dx + c_2\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \Big(|\nabla_x f(t,x)|^2 + g(t,x)|f(t,x)|^{q+1} + |f_t(t,x)|^2\Big)dx\,dt, \tag{10}$$

здесь и далее по тексту через $c_i = c_i(q,n,l,d_1,d_2) < \infty$ обозначены положительные постоянные. Определим число $s\in[0,\tau]$ так, что $\int\limits_\Omega |u(s,x)|^2dx = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant\tau}\int\limits_\Omega |u(t,x)|^2dx$. В силу произвольности τ из (10) следует также:

$$\int\limits_\Omega |u(s,x)|^2dx + \int\limits_0^s\int\limits_\Omega \Big(|\nabla_x u|^2 + g(t,x)|u(t,x)|^{q+1}\Big)dxdt \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u(s,x)|^2\,dx +$$
$$c_1\int\limits_\Omega |f(s,x)|^2\,dx + c_2\int\limits_0^s\int\limits_\Omega \Big(|\nabla_x f(t,x)|^2 + g(t,x)|f(t,x)|^{q+1} + |f_t(t,x)|^2\Big)dx\,dt, \tag{11}$$

Комбинируя соотношения (10) и (11), приходим к доказываемому неравенству. □

Лемма 2. *При произвольных $0\le a < b\le T$ и почти всех $s > 1$ для произвольного решения $u(t,x)$ задачи (1)–(3) справедливо следующее соотношение:*

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega(s)} |u(b,x)|^2\,dx + \int\limits_a^b\int\limits_{\Omega(s)} \left(\sum_{i=1}^n a_i(t,x,u,\nabla_x u)\,u_{x_i} + g(t,x)|u|^{q+1}\right)dx\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega(s)} |u(a,x)|^2\,dx + \int\limits_a^b\int\limits_{\partial_0\Omega(s)} \sum_{i=1}^n a_i(t,x,u,\nabla_x u)\,u\nu_i\,d\sigma\,dt, \quad (12)$$

где $\Omega(s) := \Omega\cap\{x\in\mathbb{R}^n : |x| > s = const > 1\}$, $\partial_0\Omega(s) = \partial\Omega(s)\cap\{|x| = s\}$, $\overrightarrow{\nu} = \overrightarrow{\nu}(x) = \{\nu_i\}$ *– единичный вектор внешней нормали к* $\partial_0\Omega(s)$ *в точке* x.

Доказательство. Фиксируем числа $s > 1$, $\delta > 0$. Введём срезающую функцию: $\eta_{s,\delta}(r) = 0\ \forall r < s$, $\eta_{s,\delta}(r) = 1\ \forall r > s+\delta$, $\eta_{s,\delta}(r) = \delta^{-1}(r-s)\forall r : s < r < s+\delta$. Поставим в интегральное тождество (6) пробную функцию

$$\xi(t,x) = \begin{cases} u(t,x)\eta_{s,\delta}(|x|)\ \ \forall\ t : a\leqslant t\le b, \\ 0 \qquad\quad \forall\ t\subset\{t<a\}\cup\{t>b\}. \end{cases} \quad (13)$$

В силу формулы интегрирования по частям имеем:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega(s)} |u(b,x)|^2\eta_{s,\delta}\,dx + \int\limits_a^b\int\limits_{\Omega(s)} \left(\sum_{i=1}^n a_i(t,x,u,\nabla_x u)\,u_{x_i} + g(t,x)|u|^{q+1}\right)\eta_{s,\delta}\,dx\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega(s)} |u(a,x)|^2\eta_{s,\delta}\,dx - \int\limits_a^b\int\limits_{\Omega(s)\setminus\Omega(s+\delta)} \sum_{i=1}^n a_i(t,x,u,\nabla_x u)u\big(\eta_{s,\delta}(|x|)\big)_{x_i}dx\,dt.$$

Переходя в равенстве к пределу при $\delta\to 0$ устанавливаем, что при п.в. s существует $\int\limits_a^b\int\limits_{\partial_0\Omega(s)}\sum\limits_{i=1}^n a_i(t,x,u,\nabla_x u)\,u\nu_i\,d\sigma\,dt$ и справедливо соотношение (12). □

Зафиксируем произвольное число $R : 0 < R < diam\Omega - 1$ и точку $x_R\in\Omega : |x_R| = R+1$. Наряду с $\Omega(s)$ из Леммы 2, введём семейство равномерно ограниченных подобластей: $\Omega_R(s) := \{x\in\Omega : |x-x_R| < 1-s\}\ \ \forall s\in[0,1)$, $diam\,\Omega_R(s)\le 2$, а также семейства функций, связанные с решением $u(t,x)$ исходной задачи:

$$H_\tau(s) := \int\limits_{\Omega_R(s)} |u(\tau,x)|^2dx, \quad E_\tau(s) := \int\limits_{\Omega_R(s)} \big(|\nabla_x u(\tau,x)|^2 + g_0(\tau)|u(\tau,x)|^{q+1}\big)dx,$$
$$(14)$$
$$I_\tau^b(s) := \int\limits_\tau^b E_t(s)dt, \qquad J_\tau^b(s) := \int\limits_\tau^b\int\limits_{\partial_0\Omega_R(s)} |\nabla_x u(t,x)|^2\,d\sigma\,dt,$$

где $g_0(t)$ – миноранта потенциала $g(t,x)$ из Теоремы.

Лемма 3. *Функции $H_\tau(\cdot)$, $J^b_\tau(\cdot)$, $I^b_\tau(\cdot)$, определенные в (14), при всех $\tau \le T$ и почти всех $s > 1$ удовлетворяют соотношению:*

$$H_T(s) + I^T_\tau(s) \leqslant 2H_\tau(s) + c_1 g_0(\tau)^{-\frac{2}{q+1}}[J^T_\tau(s)]^{\frac{2}{q+1}} + \\ + c_2 g_0(\tau)^{-\frac{2(1-\theta)}{2-(1-\theta)(1-q)}}[J^T_\tau(s)]^{\frac{2}{2-(1-\theta)(1-q)}}, \quad (15)$$

где $0 < \theta := \frac{(q+1)+n(1-q)}{2(q+1)+n(1-q)} < 1$.

Доказательство. В силу интерполяционного неравенства из [6]:

$$\int\limits_{\partial_0\Omega_R(s)} |u(t,x)|^2\, d\sigma \leqslant c_3 \Bigg(\int\limits_{\Omega_R(s)} |\nabla_x u|^2\, dx \Bigg)^{\theta} \Bigg(\int\limits_{\Omega_R(s)} |\, u(t,x)|^{q+1}\, dx \Bigg)^{\frac{2(1-\theta)}{q+1}} + \\ + c_4 \Bigg(\int\limits_{\Omega_R(s)} |\, u(t,x)|^{q+1}\, dx \Bigg)^{\frac{2}{q+1}} \qquad \forall\, t > 0, \quad (16)$$

где θ из Леммы 3. Применим неравенство (16) для оценки второго слагаемого в правой части (12), используя условие (4), а также неравенства Гёльдера и Юнга:

$$|M_1(t)| := \Bigg| \int\limits_{\partial_0\Omega_R(s)} \sum_{i=1}^n a_i(t,x,u,\nabla_x u) u \nu_i d\sigma \Bigg| \le c_5 \Bigg(\int\limits_{\partial_0\Omega_R(s)} |\nabla_x u(t,x)|^2\, d\sigma \Bigg)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \Bigg(\int\limits_{\partial_0\Omega_R(s)} |u(t,x)|^2\, d\sigma \Bigg)^{\frac{1}{2}} \le c_6 \Bigg(\int\limits_{\partial_0\Omega_R(s)} |\nabla_x u|^2\, d\sigma \Bigg)^{\frac{1}{2}} \Bigg(\int\limits_{\Omega_R(s)} |\nabla_x u|^2\, dx \Bigg)^{\frac{\theta}{2}} \times \\ \times \Bigg(\int\limits_{\Omega_R(s)} |u|^{q+1}\, dx \Bigg)^{\frac{1-\theta}{2}} \Bigg(\int\limits_{\Omega_R(s)} |u|^{q+1}\, dx \Bigg)^{\frac{(1-q)(1-\theta)}{2(q+1)}} + c_7 \Bigg(\int\limits_{\partial_0\Omega_R(s)} |\nabla_x u|^2\, d\sigma \Bigg)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \Bigg(\int\limits_{\Omega_R(s)} |u|^{q+1}\, dx \Bigg)^{\frac{1}{q+1}} \le c_6 \Bigg(\int\limits_{\partial_0\Omega_R(s)} |\nabla_x u|^2\, d\sigma \Bigg)^{\frac{1}{2}} \Bigg(\int\limits_{\Omega_R(s)} |\nabla_x u|^2 + g_0(t)|u|^{q+1}\, dx \Bigg)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times g_0(t)^{-\frac{1-\theta}{2}} \Bigg(\int\limits_{\Omega_R(s)} |u|^{q+1}\, dx \Bigg)^{\frac{(1-q)(1-\theta)}{2(q+1)}} + c_7 \Bigg(\int\limits_{\partial_0\Omega_R(s)} |\nabla_x u|^2\, d\sigma \Bigg)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times g_0(t)^{-\frac{1}{2}} \Bigg(\int\limits_{\Omega_R(s)} |\nabla_x u|^2 + g_0(t)|u|^{q+1}\, dx \Bigg)^{\frac{1}{2}} \Bigg(\int\limits_{\Omega_R(s)} |u|^{q+1}\, dx \Bigg)^{\frac{1-q}{2(q+1)}}. \quad (17)$$

В силу неравенства Гёльдера имеем:

$$\int\limits_{\Omega_R(s)} |u(t,x)|^{q+1}\,dx \le c_8^{\frac{1-q}{2}} \Bigg(\int\limits_{\Omega_R(s)} |u(t,x)|^2\,dx \Bigg)^{\frac{q+1}{2}}, \tag{18}$$

что после подстановки в (17) даёт:

$$|M_1(t)| \le c_6 \Bigg(\int\limits_{\partial_0\Omega_R(s)} |\nabla_x u|^2\,d\sigma \Bigg)^{\frac12} \Bigg(\int\limits_{\Omega_R(s)} |\nabla_x u|^2 + g_0(t)|u|^{q+1}\,dx \Bigg)^{\frac12} g_0(t)^{-\frac{1-\theta}{2}} \times$$
$$\times\, c_8^{\frac{(1-q)(1-q)(1-\theta)}{4(q+1)}} \Bigg(\int\limits_{\Omega_R(s)} |u(t,x)|^2\,dx \Bigg)^{\frac{(1-q)(1-\theta)}{4}} + c_7 c_8^{\frac{(1-q)(1-q)}{4(q+1)}} \Bigg(\int\limits_{\partial_0\Omega_R(s)} |\nabla_x u|^2\,d\sigma \Bigg)^{\frac12} \times$$
$$\times\, g_0(t)^{-\frac12} \Bigg(\int\limits_{\Omega_R(s)} |\nabla_x u|^2 + g_0(t)|u|^{q+1}\,dx \Bigg)^{\frac12} \Bigg(\int\limits_{\Omega_R(s)} |u(t,x)|^2\,dx \Bigg)^{\frac{1-q}{4}} \quad \forall\, t>0. \tag{19}$$

Интегрируя (19) по t и используя неравенство Юнга с ε, получаем:

$$\Bigg|\int\limits_a^b \int\limits_{\partial_0\Omega_R(s)} \sum_{i=1}^n a_i(t,x,u,\nabla_x u)\,u\nu_i\,d\sigma\,dt\Bigg| \le \varepsilon \int\limits_a^b \int\limits_{\Omega_R(s)} (|\nabla_x u|^2 + g_0(t)|u|^{q+1})dx\,dt +$$
$$c(\varepsilon)c_6^2 c_8^{\frac{(1-q)(1-q)(1-\theta)}{2(q+1)}} g_0(a)^{-(1-\theta)} \Bigg(\int\limits_{\Omega_R(s)} |u(b_1,x)|^2\,dx \Bigg)^{\frac{(1-q)(1-\theta)}{2}} \int\limits_a^b \int\limits_{\partial_0\Omega_R(s)} |\nabla_x u|^2 d\sigma\,dt +$$
$$c(\varepsilon)c_7^2 c_8^{\frac{(1-q)(1-q)}{2(q+1)}} g_0(a)^{-1} \Bigg(\int\limits_{\Omega_R(s)} |u(b_1,x)|^2\,dx \Bigg)^{\frac{1-q}{2}} \int\limits_a^b \int\limits_{\partial_0\Omega_R(s)} |\nabla_x u|^2 d\sigma\,dt \quad \forall\, \varepsilon>0. \tag{20}$$

Для $a \le b_1 = b_1(a,b) \le b$ справедливо $\int\limits_{\Omega_R(s)} |u(b_1,x)|^2 dx = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} \int\limits_{\Omega_R(s)} |u(t,x)|^2 dx$. Из (12) с $b=b_1$, в силу (20) и неравенства Юнга с ε:

$$\frac14 \int\limits_{\Omega_R(s)} |u(b_1,x)|^2\,dx \;+\; \frac12 \int\limits_a^{b_1} \int\limits_{\Omega_R(s)} (|\nabla_x u|^2 + g_0(t)|u|^{q+1})dx\,dt \;\le$$
$$\le \frac12 \int\limits_{\Omega_R(s)} |u(a,x)|^2\,dx \;+\; c_9 g_0(a)^{-\frac{2(1-\theta)}{2-(1-q)(1-\theta)}} \Bigg(\int\limits_a^{b_1} \int\limits_{\Omega_R(s)} |\nabla_x u|^2\,d\sigma\,dt \Bigg)^{\frac{2}{2-(1-q)(1-\theta)}} +$$

$$+ c_{10} g_0(a)^{-\frac{2}{q+1}} \left(\int\limits_a^{b_1} \int\limits_{\Omega_R(s)} |\nabla_x u|^2 \, d\sigma \, dt \right)^{\frac{2}{q+1}}. \quad (21)$$

При произвольных $s > 1$, $\nu > 0$ (21) дает соотношение для функций из (14):

$$[H_{b_1}(s)]^{\nu} \leqslant c_{11} \left[H_a(s)\right]^{\nu} + c_{12} g_0(a)^{-\frac{2(1-\theta)\nu}{2-(1-\theta)(1-q)}} \left[J_a^{b_1}(s)\right]^{\frac{2\nu}{2-(1-\theta)(1-q)}} + c_{13} g_0(a)^{-\frac{2\nu}{q+1}} \left[J_a^{b_1}(s)\right]^{\frac{2\nu}{q+1}}. \quad (22)$$

Из равенства (12) с учетом условия (5) и оценки (20) выводим:

$$\frac{1}{2} H_b(s) + \frac{d_2}{2} I_a^b(s) \leqslant \frac{1}{2} H_a(s) + c_{14} g_0(a)^{-(1-\theta)} J_a^b(s) \Big(H_{b_1}(s) \Big)^{\frac{(1-q)(1-\theta)}{2}} + c_{15} g_0(a)^{-1} J_a^b(s) \Big(H_{b_1}(s) \Big)^{\frac{1-q}{2}}. \quad (23)$$

Из (23) благодаря (22) с $\nu_1 = \frac{(1-q)(1-\theta)}{2}$ и $\nu_2 = \frac{1-q}{2}$ имеем:

$$\begin{aligned} H_b(s) + I_a^b(s) \leqslant H_a(s) &+ c_{16} g_0(a)^{-(1-\theta)} J_a^b(s) H_a(s)^{\nu_1} + c_{17} g_0(a)^{\left(-(1-\theta) - \frac{2\nu_1}{q+1}\right)} \left[J_a^b(s)\right]^{1+\frac{2\nu_1}{q+1}} \\ &+ c_{18} g_0(a)^{-(1-\theta)\left(1+\frac{2\nu_1}{2-(1-\theta)(1-q)}\right)} \left[J_a^b(s)\right]^{1+\frac{2\nu_1}{2-(1-\theta)(1-q)}} + c_{19} g_0(a)^{-1} J_a^b(s) H_a(s)^{\nu_2} \\ &+ c_{20} g_0(a)^{\left(-1-\frac{2(1-\theta)\nu_2}{2-(1-\theta)(1-q)}\right)} \left[J_a^b(s)\right]^{1+\frac{2\nu_2}{2-(1-\theta)(1-q)}} + c_{21} g_0(a)^{\left(-1-\frac{2\nu_2}{q+1}\right)} \left[J_a^b(s)\right]^{1+\frac{2\nu_2}{q+1}}. \quad (24) \end{aligned}$$

Оцениваем слагаемые справа в (24) при помощи неравенства Юнга с ε и после простых преобразований с использованием указанных значений ν_i, приходим к соотношению (15) при $b = T$, $a = \tau$. $\square$

Лемма 4. *Для функций $H_\tau(\cdot)$, $E_\tau(\cdot)$ из (14) при всех $\tau \leq T$ и почти всех $s > 1$ справедливо неравенство:*

$$H_\tau(s) \leqslant c_3 \; g_0(\tau)^{-\frac{2(1-\psi)}{2-(1-\psi)(1-q)}} \left[E_\tau(s)\right]^{\frac{2}{2-(1-\psi)(1-q)}} + c_4 \; g_0(\tau)^{-\frac{2}{q+1}} \left[E_\tau(s)\right]^{\frac{2}{q+1}}, \quad (25)$$

где $0 < \psi := \frac{n(1-q)}{2(q+1)+n(1-q)} < 1$.

Доказательство. В силу интерполяционного неравенства Ниренберга–Гальярдо

$$\int\limits_{\Omega_R(s)} |u(\tau,x)|^2 \, dx \leqslant c_5 \left(\int\limits_{\Omega_R(s)} |\nabla_x u(\tau,x)|^2 \, dx \right)^{\psi} \left(\int\limits_{\Omega_R(s)} |u(\tau,x)|^{q+1} \, dx \right)^{\frac{2(1-\psi)}{q+1}} + \left(\int\limits_{\Omega_R(s)} |u(\tau,x)|^{q+1} \, dx \right)^{\frac{2}{q+1}}, \quad (26)$$

где ψ из Леммы 4. Продолжая неравенство (26), получаем:

$$H_\tau(s) \leqslant c_5 \Bigg(\int\limits_{\Omega_R(s)} |\nabla_x u(\tau,x)|^2\,dx \Bigg)^{\psi} \Bigg(\int\limits_{\Omega_R(s)} g_0(\tau)|u(\tau,x)|^{q+1}\,dx \Bigg)^{1-\psi} g_0(\tau)^{-(1-\psi)} \times$$
$$\times \Bigg(\int\limits_{\Omega_R(s)} |u(\tau,x)|^{q+1}\,dx \Bigg)^{\frac{(1-\psi)(1-q)}{q+1}} + g_0(\tau)^{-\frac{2}{q+1}} \Bigg(\int\limits_{\Omega_R(s)} g_0(\tau)|u(\tau,x)|^{q+1}\,dx \Bigg)^{\frac{2}{q+1}} \quad \forall\, s > 1. \tag{27}$$

Из (27), применяя соотношение (18) и неравенство Юнга, выводим оценку (25). □

Лемма 5. *Для функций $H_\tau(\cdot)$, $E_\tau(\cdot)$, $I^b_\tau(\cdot)$, $J^b_\tau(\cdot)$ из (14) справедливо соотношение:*

$$H_T(s) + I^T_\tau(s) \leqslant c_4 g_0(\tau)^{-\frac{2}{q+1}} E_\tau(s)^{\frac{2}{q+1}} + c_3 g_0(\tau)^{-\frac{2(1-\psi)}{2-(1-\psi)(1-q)}} E_\tau(s)^{\frac{2}{2-(1-\psi)(1-q)}} +$$
$$c_2 g_0(\tau)^{-\frac{2(1-\theta)}{2-(1-\theta)(1-q)}} J^T_\tau(s)^{\frac{2}{2-(1-\theta)(1-q)}} + c_1 g_0(\tau)^{-\frac{2}{q+1}} J^T_\tau(s)^{\frac{2}{q+1}} \quad \forall\, s > 1,\ \forall\, \tau \le T, \tag{28}$$

где постоянные θ и ψ из Лемм 3 и 4 соответственно, $0 < c_i = const < \infty$.

Доказательство. Подставляя оценку (25) в правую часть (15), приходим к доказываемому соотношению (28). □

Введем двухпараметрическое семейство энергетических функций

$$P_T(\tau) := I^T_{\frac{T}{2}+\tau}(\tau) \quad \big(\text{где } I^T_{T/2+\tau}(\tau) \text{ из } (14)\big) \qquad \forall\, 0 < \tau < \frac{T}{2}. \tag{29}$$

Лемма 6. *Энергетическая функция $P_T(\cdot)$ из (29) для всех $\tau : 0 < \tau < \frac{T}{2}$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному неравенству:*

$$P_T(\tau) \leqslant c_1 \left(-\frac{P'_T(\tau)}{g_0(\frac{T}{2})^{1-\theta}} \right)^{1+\lambda_1} + c_2 \left(-\frac{P'_T(\tau)}{g_0(\frac{T}{2})^{1-\psi}} \right)^{1+\lambda_2} + c_3 \left(-\frac{P'_T(\tau)}{g_0(\frac{T}{2})} \right)^{1+\lambda_3}, \tag{30}$$

где постоянные θ, ψ из Лемм 3 и 4,

$$\lambda_3 := \frac{1-q}{1+q} > \lambda_2 := \frac{(1-\psi)(1-q)}{2-(1-\psi)(1-q)} > \lambda_1 := \frac{(1-\theta)(1-q)}{2-(1-\theta)(1-q)} > 0.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$E_\tau(s) := \int\limits_{\Omega_R(s)} (|\nabla_x u(\tau,x)|^2 + g_0(\tau)|u(\tau,x)|^{q+1})\,dx \le -\frac{dP_T(\tau)}{d\tau},$$

$$J_\tau^T(s) := \int\limits_\tau^T \int\limits_{\partial_0\Omega_R(s)} |\nabla_x u|^2\, d\sigma\, dt \le \int\limits_\tau^T \int\limits_{\partial_0\Omega_R(s)} (|\nabla_x u|^2 + g_0(t)|u|^{q+1}) d\sigma\, dt \le -\frac{dP_T(\tau)}{d\tau}\ .$$

Подставляя эти неравенства в (28), выводим доказываемое соотношение. □

Очевидно, что из (30) для $0 < \tau < T/2$ следует справедливость неравенства:

$$P_T(\tau) \leqslant c_4 \max\left\{\left(-\frac{P_T'(\tau)}{g_0(T/2)^{1-\theta}}\right)^{1+\lambda_1}, \left(-\frac{P_T'(\tau)}{g_0(T/2)^{1-\psi}}\right)^{1+\lambda_2}, \left(-\frac{P_T'(\tau)}{g_0(T/2)}\right)^{1+\lambda_3}\right\}$$

которое, в свою очередь, легко переписывается в следующем эквивалентном виде:

$$\overline{P}_T'(\tau) = -\min\left\{c_5 g_0\left(\frac{T}{2}\right)\overline{P}_T(\tau)^{\frac{1}{1+\lambda_3}},\ c_6 g_0\left(\frac{T}{2}\right)^{1-\psi}\overline{P}_T(\tau)^{\frac{1}{1+\lambda_2}},\right.$$
$$\left. c_7 g_0\left(\frac{T}{2}\right)^{1-\theta}\overline{P}_T(\tau)^{\frac{1}{1+\lambda_1}}\right\} \quad \forall\, \tau\colon 0 < \tau < \frac{T}{2}. \tag{31}$$

Введем еще одно семейство функций, связанное с решением задачи (1)–(3):

$$D_\tau(s) := \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega(s)} (|\nabla_x u|^2 + \mu_\tau^2(s)u^2 + g_0(t)|u|^{q+1})\, dx\, dt \quad \forall\, \tau \in (0, T],\ \forall\, s > 1,$$

$$\text{где}\quad \mu_\tau(s) := \frac{s-1}{8d_3\tau}, \qquad d_3 := \max\{1, d_1^2 d_2^{-1}\}, \qquad g_0(t) = \inf_{x\in\Omega} g(t,x), \tag{32}$$

d_1, d_2 – постоянные из условий (4) и (5), а $g(t,x)$–абсорбционный потенциал из (1).

Лемма 7. *Пусть u – произвольное решение рассматриваемой задачи (1)–(3). Тогда при любых $\tau \in (0,T)$ имеет место соотношение:*

$$D_\tau(s_2) \le \exp\left(-\frac{1}{32d_3^2\tau}\left(\frac{(s_2-1)^2}{2} - (s_1-1)^2\right)\right) D_\tau(s_1) \quad \forall\, s_2 > s_1 \ge 1 + 4d_3\sqrt{2\tau}, \tag{33}$$

где функция $D_\tau(s)$ и постоянная d_3 из (32).

Доказательство. Отметим здесь, что оценка (33) является содержательной только при $s_2 - 1 > \sqrt{2}(s_1 - 1)$. В интегральном тождестве (6) положим

$$\xi(t,x) = \begin{cases} u(t,x)e_{\tau,s}(t)\eta_{s,\delta}(|x|) & \text{при}\ t \in (0,\tau],\ \ \tau \le T,\\ 0 & \text{при}\ t \ge \tau, \end{cases}$$

где $e_{\tau,s}(t) = \exp(-\mu_\tau^2(s)t)$, $\mu_\tau(s)$ из (32), $\eta_{s,\delta}(|x|)$ – срезающая функция из доказательства Леммы 2. Применяя формулу интегрирования по частям и осуществляя переход к пределу при $\delta \to 0$, приходим при почти всех $s > 1$ к равенству:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega(s)} u(\tau,x)^2 e_{\tau,s}(t)\, dx\ +\ \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega(s)} \sum_{i=1}^n a_i(t,x,u,\nabla_x u)u_{x_i} e_{\tau,s}(t)\, dx\, dt\ +$$

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega(s)} (\mu_\tau^2(s)u^2+g(t,x)|u|^{q+1})e_{\tau,s}(t)\,dx\,dt = \int\limits_0^\tau \int\limits_{\partial_0\Omega(s)} \sum_{i=1}^n a_i(t,x,u,\nabla_x u)\,u\,\nu_i\,e_{\tau,s}(t)\,d\sigma\,dt. \tag{34}$$

В силу условия (4) и неравенства Юнга имеем:

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_{\partial_0\Omega(s)} \sum_{i=1}^n a_i(t,x,u,\nabla_x u)\,u\,\nu_i\,e_{\tau,s}(t)\,d\sigma\,dt \leq \frac{1}{\mu_\tau(s)} \int\limits_0^\tau \int\limits_{\partial_0\Omega(s)} \Big(d_1^2|\nabla_x u|^2 + \mu_\tau^2(s)u^2\Big)e_{\tau,s}(t)\,d\sigma\,dt. \tag{35}$$

Теперь из равенства (34) в силу структурного условия (5) и оценки (35) следует:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega(s)} u(\tau,x)^2 e_{\tau,s}(t)\,dx + \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega(s)} \Big(|\nabla_x u|^2 + \mu_\tau^2(s)u^2 + g_0(t)|u|^{q+1}\Big)e_{\tau,s}(t)\,dx\,dt \leq \frac{1}{\mu_\tau(s)} \int\limits_0^\tau \int\limits_{\partial_0\Omega(s)} \Big(d_1^2\,|\nabla_x u|^2 + \mu_\tau^2(s)u^2\Big)e_{\tau,s}(t)\,d\sigma\,dt. \tag{36}$$

Для удобства обозначим

$$A_\tau(s) := \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega(s)} \Big(|\nabla_x u|^2 + \mu_\tau^2(s)u^2 + g_0(t)|u|^{q+1}\Big)e_{\tau,s}(t)\,dx\,dt \qquad \forall\, s > 1$$

и заметим, что

$$\frac{dA_\tau(s)}{ds} = -\int\limits_0^\tau \int\limits_{\partial_0\Omega(s)} \Big(|\nabla_x u|^2 + \mu_\tau^2(s)u^2 + g_0(t)|u|^{q+1}\Big)e_{\tau,s}(t)\,d\sigma\,dt - \\ - 2\mu_\tau(s)\mu_\tau'(s)\int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega(s)} t\Big(|\nabla_x u|^2 + \mu_\tau^2(s)u^2 + g_0(t)|u|^{q+1}\Big)e_{\tau,s}(t)\,dx\,dt + \\ + 2\mu_\tau(s)\mu_\tau'(s)\int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega(s)} u^2 e_{\tau,s}(t)\,dx\,dt,$$

откуда с учетом неравенства $\mu_\tau'(s) \geq 0$, следует

$$\frac{1}{\mu_\tau(s)}\int\limits_0^\tau\int\limits_{\partial_0\Omega(s)}\Big(d_1^2|\nabla_x u|^2+\mu_\tau^2(s)u^2\Big)e_{\tau,s}(t)\,d\sigma\,dt\ \le$$

$$\frac{d_3}{\mu_\tau(s)}\int\limits_0^\tau\int\limits_{\partial_0\Omega(s)}\Big(d_2|\nabla_x u|^2+\mu_\tau^2(s)u^2+g_0(t)|u|^{q+1}\Big)e_{\tau,s}(t)\,d\sigma\,dt\ \le$$

$$-\frac{d_3}{\mu_\tau(s)}\frac{dA_\tau(s)}{ds}+\frac{2d_3\mu_\tau'(s)}{\mu_\tau^2(s)}A_\tau(s). \quad (37)$$

Используя неравенство (37) для оценки правой части соотношения (36), после приведения подобных членов, получаем:

$$\Big(1-2d_3\mu_\tau'(s)\mu_\tau^{-2}(s)\Big)A_\tau(s)\le-\frac{d_3}{\mu_\tau(s)}\frac{dA_\tau(s)}{ds}. \quad (38)$$

Очевидно, что для выбранной нами функции μ_τ из (32) выполняется соотношение:

$$1-2d_3\mu_\tau'(s)\mu_\tau^{-2}(s)\ge\ \frac{1}{2}\qquad \forall\, s\ge 1+4d_3\sqrt{2\tau}. \quad (39)$$

Таким образом, из (38) и (39) вытекает, что функция $A_\tau(s)$ удовлетворяет следующему дифференциальному неравенству

$$\frac{1}{2}\,A_\tau(s)\le-\frac{d_3}{\mu_\tau(s)}\frac{dA_\tau(s)}{ds}. \quad (40)$$

Интегрируем (40) по $s\in(s_1,s_2), s_1\ge 1+4d_3\sqrt{2\tau}$:

$$A_\tau(s_2)\le A_\tau(s_1)\ \exp\Big(-\frac{1}{2\,d_3}\int\limits_{s_1}^{s_2}\mu_\tau(s)\,ds\Big)\qquad\forall\,\tau\in(0,T].$$

Отсюда в результате простых вычислений следует

$$\exp\Big(-\frac{(s_2-1)^2}{64\,d_3^2\,\tau}\Big)\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega(s_2)}\Big(|\nabla_x u|^2+\Big(\frac{s_2-1}{8\,d_3\,\tau}\Big)^2u^2+g_0(t)|u|^{q+1}\Big)\,dx\,dt\le$$

$$\exp\Big(-\frac{(s_2-1)^2-(s_1-1)^2}{32\,d_3^2\,\tau}\Big)\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega(s_1)}\Big(|\nabla_x u|^2+\Big(\frac{s_1-1}{8\,d_3\,\tau}\Big)^2u^2+g_0(t)|u|^{q+1}\Big)\,dxdt,$$

что соответствует доказываемому неравенству (33). □

Легко видеть, что из априорной оценки (7) следует также соотношение:

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\Big(|\nabla_x u|^2+\frac{\lambda}{\tau}u^2+g_0(t)|u|^{q+1}\Big)\,dx\,dt\leqslant C\max\{1,\lambda\}F(\tau)\qquad\forall\,\tau\le T,\quad\forall\,\lambda>0, \quad (41)$$

где постоянная C и функция F из (7).

Лемма 8. *Для функции $D_\tau(\cdot)$, определенной в (32), справедлива оценка:*

$$D_\tau(s) \leqslant C_1 \exp\left(-\frac{(s-1)^2}{64\, d_3^2\, \tau}\right) F(\tau) \qquad \forall\, \tau > 0,\ \ \forall\, s > \bar{s}(\tau) = 1 + 4d_3\sqrt{2\tau}, \tag{42}$$

где $C_1 = C\, \exp\big(1\big)$, постоянная C и функция F из (7).

Доказательство. В силу того, что $\mu_\tau^2(\bar{s}(\tau)) = \frac{1}{2\,\tau}$, из неравенства (41) при $\lambda = \frac{1}{2}$ выводим оценку $\forall\, \tau > 0$:

$$D_\tau(\bar{s}(\tau)) \;=\; \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega(\bar{s}(\tau))} \left(|\nabla_x u|^2 + \frac{u(t,x)^2}{2\,\tau} + g_0(t)|u(t,x)|^{q+1}\right) dx\, dt \;\leqslant\; C\, F(\tau). \tag{43}$$

Теперь из соотношения (33) при $s_2 = s > s_1 = \bar{s}(\tau)$ и с учетом (43) имеем:

$$\begin{gathered} D_\tau(s) \le \exp\left(-\frac{1}{32\, d_3^2\, \tau}\left(\frac{(s-1)^2}{2} - (\bar{s}-1)^2\right)\right) D_\tau(\bar{s}(\tau)) \le \\ \exp\left(-\frac{(s-1)^2}{64\, d_3^2\, \tau}\right) \exp\left(\frac{(\bar{s}-1)^2}{32\, d_3^2\, \tau}\right) D_\tau(\bar{s}(\tau)) \le\, \exp\left(-\frac{(s-1)^2}{64\, d_3^2\, \tau}\right) \exp\big(1\big)\, C\, F(\tau), \end{gathered} \tag{44}$$

что и соответствует необходимой оценке (42). □

Лемма 9. *Для функции $P_T(\cdot)$ из (29) справедливо соотношение*

$$P_T(0) \leqslant C_1 \exp\left(-\frac{(R-1)^2}{64\, d_3^2\, T}\right) F(T). \tag{45}$$

Доказательство. Из определения (29) имеем: $P_T(0) = I_{T/2}^T(0) \le D_T(R)$, поэтому продолжая оценку (42) при $s = R$, с легкостью приходим к (45). □

Дальнейшее доказательство Теоремы состоит в анализе решений задачи Коши (31), (45) от параметра R. Вопрос о локализации решений (31), (45) сводится к проверке того, что при любом $T > 0$ существует $R = R(T) < \infty$:

$$\overline{P}_T\left(\frac{T}{2} - \delta\right) \le 0 \qquad \text{со сколь угодно малым} \;\; \delta :\; 0 < \delta < \frac{T}{2}. \tag{46}$$

Отсюда следует локализация решения и оценка для границы носителя решения u: $\zeta(T) \le R(T) + T/2$. Решениями обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\overline{P}'_T(\tau) = -c_7 g_0\left(\frac{T}{2}\right)^{1-\theta} \overline{P}_T(\tau)^{\frac{1}{1+\lambda_1}}, \qquad \overline{P}'_T(\tau) = -c_6 g_0\left(\frac{T}{2}\right)^{1-\psi} \overline{P}_T(\tau)^{\frac{1}{1+\lambda_2}},$$

$$\overline{P}'_T(\tau) = -c_5 g_0\left(\frac{T}{2}\right) \overline{P}_T(\tau)^{\frac{1}{1+\lambda_3}} \qquad\qquad \forall\, 0 < \tau < \frac{T}{2}$$

с начальным условием (45), являются функции:

$$\overline{P}^{(1)}_{T,R}(\tau) = \exp\left(-\frac{(R-1)^2}{64\,d_3^2\,T}\right)F(T) - \left(\frac{(1-\theta)(1-q)}{2}c_7 g_0\left(\frac{T}{2}\right)^{1-\theta}\tau\right)^{\frac{2}{(1-\theta)(1-q)}}$$

$$\overline{P}^{(2)}_{T,R}(\tau) = \exp\left(-\frac{(R-1)^2}{64\,d_3^2\,T}\right)F(T) - \left(\frac{(1-\psi)(1-q)}{2}c_6 g_0\left(\frac{T}{2}\right)^{1-\psi}\tau\right)^{\frac{2}{(1-\psi)(1-q)}},$$

$$\overline{P}^{(3)}_{T,R}(\tau) = \exp\left(-\frac{(R-1)^2}{64\,d_3^2\,T}\right)F(T) - \left(\frac{1+q}{2}c_5 g_0\left(\frac{T}{2}\right)\tau\right)^{\frac{2}{1+q}} \quad \text{соответственно.}$$

В силу того, что $\frac{2}{(1-\theta)(1-q)} = \frac{4}{(1-\psi)(1-q)} > \frac{2}{(1-\psi)(1-q)} > \frac{2}{1+q}$, следуют соотношения $\overline{P}^{(1)}_{T,R}(\tau) > \overline{P}^{(2)}_{T,R}(\tau) > \overline{P}^{(3)}_{T,R}(\tau) \quad \forall\, 0 < \tau < \frac{T}{2}$ при достаточно малых T. Из (31) теперь легко следует, что решением задачи Коши (31), (45) $\forall\, 0 < \tau \leq \frac{T}{2}$ является:

$$\overline{P}_{T,R}(\tau) = \exp\left(-\frac{(R-1)^2}{64\,d_3^2\,T}\right)F(T) - \left(\frac{(1-\theta)(1-q)}{2}c_7 g_0\left(\frac{T}{2}\right)^{1-\theta}\tau\right)^{\frac{2}{(1-\theta)(1-q)}}. \quad (47)$$

Неравенство (46) с учетом (47) приводит к достаточному условию локализации:

$$\exp\left(-\frac{(R-1)^2}{64\,d_3^2\,T}\right)F(T) \leq c_8\, g_0\left(\frac{T}{2}\right)^{\frac{2}{1-q}} \tau^{\frac{2}{(1-\theta)(1-q)}} \qquad \forall\, 0 < \tau \leq \frac{T}{2}. \quad (48)$$

Отсюда находим условие на параметр $R = R(T)$:

$$R > 1 + 8\, d_3 \sqrt{c_9 T \ln F(T) - c_{10} T \ln g_0(T/2) - c_{11} T \ln(T/2)},$$

для которого справедливо (48).

1. *Alt H.W., Luckhaus S.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. – 1983. – V. 183. – № 3. – C. 311–341.
2. *Антонцев С.Н.* О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений // ДАН СССР. – 1981. – Т. 260. – № 6. – С. 1289–1293.
3. *Калашников А.С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // УМН. – 1987. – Т. 42. – № 2 (254). – С. 135–176.
4. *Antontsev S.N., Diaz J.I., Shmarev S.I.* The Support Shrinking Properties for Solutions of Quasilinear Parabolic Equations with Strong Absorption Terms // Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse Math. – 1995. – V. 6. – № 4. – P. 5–30.
5. *Калашников А.С.* О начальном скачке свободной границы в краевой задаче для полулинейного уравнения теплопроводности с поглощением // УМН. – 1997. – Т. 52. – № 6 (318). – С. 163–164.
6. *Diaz J.I., Veron L.* Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1985. – V. 290. – № 2. – C. 787–814.

K. V. Stiepanova

About localization of solutions for nonlinear parabolic equations with degenerate potential.

In paper we study the evolution of the supports of solutions to Cauchy–Dirichlet problem for parabolic equation in multidimensional case with a potential $g(t,x)$ that is degenerate at $t = 0$; effect of localization was establish by the method of local integral a priori estimates.

Keywords: *nonlinear parabolic equations, absorption, localization.*

К. В. Стєпанова

Про локалізацію розв'язків нелінійних параболічних рівнянь з виродженним потенціалом.

В роботі вивчається еволюція розв'язків задачі Коши–Діріхле для багатомірного параболічного рівняння з виродженним при $t = 0$ потенціалом $g(t,x)$; методом локальних інтегральних апріорних оцінок доведено ефект локалізації.

Ключові слова: *нелінійні параболічні рівняння, абсорбція, локалізація.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`stepanova@iamm.ac.donetsk.ua`

Получено 25.06.13