УДК 519.7

©2013. **А. Н. Курганский**

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА ДОСТИЖИМОСТИ В 1-МЕРНЫХ 2-ИНТЕРВАЛЬНЫХ КУСОЧНО-АФФИННЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Рассматривается открытая проблема достижимости в одномерных кусочно-аффинных отображениях с двумя интервалами. Найдены частные случаи алгоритмической разрешимости рассматриваемой проблемы, сформулированные на языке топологических свойств орбит в таких системах.

Ключевые слова: *кусочно-аффинные отображения, проблема достижимости.*

1. Введение. При исследовании непрерывных динамических систем наряду с методами теории динамического хаоса, определяющими такие свойства, как эргодичность, перемешивание, топологическая транзитивность, устойчивость и т.д., применение методов теории алгоритмов представляется также интересным и, главное, естественным и полезным с точки зрения приложения теории детерминированного хаоса в задачах криптографической защиты информации. Аналогии или проводимые параллели между хаотическими и криптографическими системами мотивируют исследования в области применения дискретных аналогов непрерывных хаотических систем в задачах криптографического преобразования информации [1, 2, 3, 4]. Однако, математические связи относящихся к делу свойств дискретных систем и их непрерывных прототипов скорее находятся на уровне взаимосвязи узелков на память и запоминаемых фактов. Поэтому поиск таких способов перехода от непрерывных систем к их дискретным аналогам, при которых существует математическая взаимосвязь хаотического поведения первых с алгоритмическими свойствами вторых, является фундаментальной проблемой.

В связи с этим приобретает значение изучение алгоритмических свойств и вычислительных возможностей самих непрерывных хаотических систем. И, таким образом, в частности, на стыке теории динамических систем и теории алгоритмов возникает проблема вычислительной универсальности непрерывных динамических систем и тесно с ней связанная проблема достижимости. Близкий к теме обзор по вычислительным системам с непрерывным временем см. [5]. Там же обращается внимание на сложность понимания уже самого понятия вычислительной универсальности непрерывной динамической системы, хотя ясно в общих чертах, что вычислительная универсальность системы связана с подходящей алгоритмической интерпретацией поведения системы, при которой моделируется машина Тьюринга. Пример исследования в области определения универсальных вычислительных систем можно найти в [6]. Проблема достижимости формулируется как вопрос: существует ли для данной системы алгоритм, определяющий по любым данным точкам или областям фазового пространства проходит ли через них одна и та же фазовая кривая или орбита системы?

Непрерывные хаотические динамические системы показывают сложное поведение, позволяющее предполагать для некоторых из них алгоритмическую неразрешимость проблемы достижимости из точки точки. До сих пор единственным способом доказательства алгоритмической неразрешимости является моделирование с помощью изучаемой системы универсальной машины Тьюринга. Публикации показывают в какой-то мере безуспешный поиск таких доказательств для различных непрерывных динамических систем. В связи с этим представляет интерес исследование вычислительной универсальности гибридных дискретно-непрерывных систем и систем с дискретным временем. Примеры и обзор таких исследований с дальнейшим списком литературы см. [7].

На практике оказывается, что чем выше размерность фазового пространства, тем проще доказать универсальность системы. Поэтому теоретически более интересны системы низкой размерности. В [8] для одномерных кусочно-элементарных отображений в базисе функций $\{x^2, x^3, x^{1/2}, x^{1/3}, 2x, x+1, x-1\}$, а также дробно-рациональных функций, доказана алгоритмическая неразрешимость достижимости из точки точки. Однако при этом уже долгое время остается открытой проблема достижимости в одномерных кусочно-аффинных отображениях даже в простейшем случае двух интервалов [7]. Настоящая работа посвящена обратимым кусочно-аффинным отображениям с двумя интервалами. В ней мы приводим достаточные условия на языке теории динамических систем в виде ограничений на инвариантные меры обратимых кусочно-аффинных отображений, при которых проблема достижимости в таких системах оказывается алгоритмически разрешимой.

2. Обозначения. Обозначим через $N = \{1, 2, \ldots\}$, Z, P, Q и R множества натуральных, целых, простых, рациональных и действительных чисел, соответственно, $Z^+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Зафиксируем произвольное конечное множество $F = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\} \subset P$ простых чисел, упорядоченное индексами по возрастанию. Обозначим $m = p_1 p_2 \ldots p_k$. Пусть x положительное рациональное число и $x = \prod_{p \in F} p^{\alpha_p}$ его каноническое разложение, где $\alpha_p \in Z$, $p \in F$. Обозначим через $|x|_p$ p-адическую норму числа x, а через $\|x\|_p = \log_p(|x|_p)$, т.е. $\|x\|_p = -\alpha_p$. Назовем $\|x\|_p$ логарифмом p-адической нормы числа x. Приведем следующие полезные далее свойства логарифма p-адической нормы, которые прямо следуют из свойств p-адической нормы:

$$\|x\|_p < \|y\|_p \Rightarrow \|x + y\|_p = \|y\|_p, \tag{1}$$

$$\|x \cdot y\|_p = \|x\|_p + \|y\|_p, \tag{2}$$

$$\|x^r\|_p = r\|x\|_p, \tag{3}$$

$$\|x\|_p = \|y\|_p \Rightarrow \|x + y\|_p \leq \|y\|_p. \tag{4}$$

Если существует такое простое $p \notin F$, что $\|x\|_p > 0$, то положим по определению $\|x\|_m = +\infty$, иначе положим $\|x\|_m = \max\limits_{p \in F} \|x\|_p$. Назовем число $\|x\|_m$ и вектор-столбец $(\|x\|_{p_1}, \|x\|_{p_2}, \ldots, \|x\|_{p_k})^T$, соответственно, логарифмической m-нормой и логарифмической m-вектор-нормой числа x. Содержательно логарифмическая m-норма числа, если $\|x\|_m > 0$, представляет собой число цифр после запятой в записи числа x в системе счисления по основанию m, то есть x можно представить в виде $x = y \cdot m^{-\|x\|_m}$, где y целое число, последняя цифра которого в m-ичной системе счисления отлична от 0. Если $\|x\|_m \leq 0$, то x целое. Логарифмическую вектор-норму числа x обозначим через $(\|x\|)_m$. Логарифмическая m-норма не является нормой в точном смысле этого слова.

Пусть X – отрезок $[0, 1]$ с отождествленными концами, т.е. $X = R/Z$, и отображение $f : X \to X$ такое, что $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_l$ – разбиение на не пересекающиеся интервалы и $f(x) = a_i x + b_i \Leftrightarrow x \in X_i$, $\|a_i\|_m < +\infty$, $\|b_i\|_m < +\infty$. Обозначим $f'(x) = a_i$, если $x \in X_i$. Обозначим через $f^*(x) = \{f^n(x)\}_{n \in N}$ орбиту точки x. Далее везде предполагаем, что функция f имеет указанный вид.

3. Проблема достижимости. Проблема достижимости из точки точки звучит так: существует ли для данного отображения $f : X \to X$ алгоритм, отвечающий для произвольных точек $x_0, x_1 \in X$ на вопрос принадлежит или нет точка x_1 множеству $x_1 \in f^*(x_0)$. Ограничимся в проблеме достижимости рассмотрением только рациональных точек X, то есть возьмем $X = R/Z \cap Q$, по следующим соображениям. Как хорошо известно из теории динамических систем, кусочно-аффинное отображение $f(x) = 2x \pmod 1$ является хаотическим для почти всех $x \in X$. Но ни одно число этого множества почти всех из X, очевидно не содержащего рациональных чисел, не представимо на компьютере, если под числом не понимать алгоритм, его порождающий. Если же под числом понимать произвольный алгоритм его порождающий, проблема достижимости для $f(x) = 2x \pmod 1$ оказывается тривиально алгоритмически неразрешимой в общем случае, несмотря на то, что отображение очень простое. Таким образом, принятие во внимание нерациональных чисел принципиально усложняет уже только формулировку проблемы достижимости даже для простейших кусочно-аффинных отображений. Приведенный пример обращает на себя внимание еще тем, что он лишний раз показывает необходимость аккуратного понимания математических теорем с точки зрения компьютерных наук: несмотря на то, что с точки зрения теории динамического хаоса отображение $2x \pmod 1$ является хаотическим для почти всех $x \in [0, 1]$, это отображение не показывает хаотического или вообще сколько-нибудь сложного поведения ни для одного числа из доступных в языках программирования встроенных типов данных. Можно сказать, что сложность орбиты $f^*(x)$, $f(x) = 2x \pmod 1$, следует из сложности x. Стоит при этом заметить, что некоторые топологически сопряженные с $f(x) = 2x \pmod 1$ отображения показывают хаотическое поведение на множестве рациональных точек, если язык программирования поддерживает арифметику произвольной точности.

Ряд важных асимптотических свойств динамических систем оказывается инвариантным относительного топологического сопряжения. Но не ясно, влечет ли сопряженность двух систем их эквивалентность с точки зрения проблемы достижимости. Ответ на этот вопрос не очевиден. Поэтому, имея в виду как гипотезу алгоритмическую разрешимость проблемы достижимости в 2-PAM, имеет смысл находить связи топологических и алгоритмических свойств орбит и проводить соответствующую классификацию систем, возможно более тонкую, чем сопряженность. В качестве иллюстрации простой связи топологических и алгоритмических свойств можно привести следующий пример. Если для динамической системы доказано свойство перемешивания или эргодичности, то проблема достижимости открытой области фазового пространства становится, очевидно, тривиальной. В этом случае ответ всегда – да, достижима. Пример менее тривиального утверждения, связывающий топологические и алгоритмические свойства кусочно-аффинных отображений, приведен далее в основной части работы.

4. Основной результат. Здесь мы докажем, что как минимум для обратимого кусочно-аффинного отображения с двумя интервалами при определенных ограничениях на ее инвариантные меры проблема достижимости из точки точки алгоритмически разрешима. Компьютерное моделирование показывает, что инвариантные меры обратимых кусочно-аффинных отображений с двумя интервалами, по всей видимости, необходимо обладают требуемыми свойствами для алгоритмической разрешимости проблемы достижимости, но в настоящей работе мы оставляем это утверждение как гипотезу.

Не ограничивая общности, рассматриваем далее только такие $x \in X$, для которых $\|x\|_m < +\infty$. В противном случае, если $\|x\|_m = +\infty$, достаточно изменить множество $F = \{p_1, ..., p_k\}$, чтобы выполнилось требование $\|x\|_m < +\infty$.

Обозначим через A матрицу (a_{ij}), где $a_{ij} = \|a_i\|_{p_j}$, $1 \le i \le l$, $1 \le j \le k$. Через $\mathrm{rank}(A)$ обозначим ранг матрицы A.

Лемма 1. *Для любого положительного $a \in R$ существует зависящее от a и F число $b \in R$ такое, что для всех $x \in [0,1]$ с ограничением сверху $\|x\|_m < a$, выполняется ограничение снизу $\|x\|_p > b$ для всех $p \in F$.*

Доказательство. Пусть выполняются условия леммы. Обозначим

$$\alpha = -\sum_{p \in F, \|x\|_p \le 0} \|x\|_p$$

и

$$\beta = \sum_{p \in F, \|x\|_p \ge 1} \|x\|_p.$$

Тогда

$$\frac{p_1^{\alpha}}{p_k^{ka}} \le \frac{p_1^{\alpha}}{p_k^{\beta}} \le x \le 1.$$

Отсюда следует $-\alpha \ge -ka\frac{\ln p_k}{\ln p_1}$. Что и требовалось доказать. □

Лемма 2. *Пусть Φ множество инвариантных мер инъективного кусочно-аффинного отображения $f : X \to X$. Пусть существуют такие $K_{min} > 0$, $K_{max} < +\infty$, что для любых $\phi \in \Phi$ и $x \in X$ таких, что $\phi(x) \ne 0$, выполняется $K_{min} < \phi(x) < K_{max}$. Тогда для отрезка произвольной орбиты $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$, где $x_{i+1} = f(x_i)$, выполняется $\frac{K_{min}}{K_{max}} \le |c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n| \le \frac{K_{max}}{K_{min}}$, где $c_i = a_j$, если $x_i \in X_j$.*

Доказательство. Пусть ϕ инвариантная мера на X отображения f. Тогда $y = f(x)$ влечет $\phi(y) = \frac{\phi(x)}{|f'(x)|}$ (оператор Перрона–Фробениуса). Обозначим $c_i = f'(x_i)$. Тогда $\phi(x_{n+1}) = \frac{\phi(x_1)}{|c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n|}$ и $|c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n| = \frac{\phi(x_1)}{\phi(x_{n+1})}$. Отсюда следует утверждение леммы. □

Теорема 1. *Если для инъективного кусочно-аффинного отображения $f : X \to X$ с двумя интервалами существуют такие $K_{min} > 0$ и $K_{max} < +\infty$, что для любой инвариантной меры $\phi : X \to R$ отображения f и для любых $x \in X$ таких, что $\phi(x) \neq 0$, выполняется $K_{min} < \phi(x) < K_{max}$, то проблема достижимости для f алгоритмически разрешима.*

Доказательство. Напомним обозначения: $X = X_1 \cup X_2$ и $f(x) = a_i x + b_i$, если $x \in X_i$. Рассмотрим произвольные $x, y \in X$ такие, что $y \in f^*(x)$. Пусть последовательность (отрезок орбиты $f^*(x)$) $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ такая, что $x_1 = x$, $x_{n+1} = y$, $x_{i+1} = f(x_i)$, $1 \leq i \leq n$. Если мы найдем вычислимую из K_{min}, K_{max}, a_1, a_2, b_1, b_2, x, y верхнюю оценку $M = M(K_{min}, K_{max}, a_1, a_2, b_1, b_2, x, y)$ длины n отрезка орбиты, то тем самым мы докажем алгоритмическую разрешимость проблемы достижимости, поскольку для проверки достижимости из точки x точки y достаточно рассмотреть начальный отрезок орбиты длины, не превышающей числа M. Но для доказательства существования вычислимой оценки M длины n достаточно доказать, что логарифмические нормы $\|x_i\|_m$ для всех $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ ограничены сверху некоторым вычислимым числом $M_1 = M_1(K_{min}, K_{max}, a_1, a_2, b_1, b_2, x, y)$. Отсюда, поскольку $\|x_i\|_m$ есть число знаков после запятой в записи числа x_i в системе счисления по основанию m, сразу следует оценка сверху числа n: $n < M < m^{M_1}$. Если отрезок орбиты длины, большей m^{M_1}, состоит из чисел, логарифмические m-нормы которых меньше M_1, то он обязательно содержит два одинаковых числа. Поскольку f функция, то орбита в этом случае зацикливается. В свою очередь, для доказательства вычислимого ограничения сверху на $\|x_i\|_m$ достаточно доказать, что для любого $p \in F$ логарифмические нормы $\|x_i\|_p$ ограничены сверху одним вычислимым числом M_2 для всех $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. В силу определения логарифмической m-нормы, $M_2 = M_1$.

Обозначим $h = \max\{\|b_1\|_m + 1, \|b_2\|_m + 1, \|x_1\|_m, \|x_{n+1}\|_m\}$. Возьмем произвольное $p \in F$ и выделим в последовательности x_1, x_2, …, x_{n+1} произвольную подпоследовательность x_j, x_{j+1}, …, x_r такую, что её элементы $x \in \{x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_{r-1}\}$ обладают свойством $\|x\|_p > h$, при этом $\|x_j\|_p \leq h$ и $\|x_r\|_p \leq h$. Для простоты, но не ограничивая общности рассуждений, положим $j = 1$, $r = n + 1$ и $\|x_1\|_p = \|x_{n+1}\|_p = h$.

Далее, рассматривая частные случаи, мы либо укажем верхнюю вычислимую оценку числа n, либо укажем вычислимое число $M_2 = M_2(K_{min}, K_{max}, a_1, a_2, h)$ такое, что для всех $x \in \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ $\|x\|_p \leq M_2$. Как сказано выше, этого будет достаточно для доказательства теоремы.

Пусть $x_{i+1} = f(x_i) = c_i x_i + d_i$, где $c_i \in \{a_1, a_2\}$, $d_i \in \{b_1, b_2\}$. Из свойств (1) и (2) логарифма p-адической нормы и того, что $\|x_i\|_p > \|b_j\|_p$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2\}$, следует $\|x_{i+1}\|_p = \|x_i\|_p + \|c_i\|_p$. Откуда получаем:

$$\|x_{n+1}\|_p = \|x_1\|_p + \sum_{i=1}^{n} \|c_i\|_p = \|x_1\|_p + \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \|a_i\|_p$$

для некоторых целых неотрицательных α_1 и α_2, $\alpha_1 + \alpha_2 = n$. Учитывая $\|x_1\|_p = \|x_{n+1}\|_p$, получим

$$\sum_{i=1}^{2} \alpha_i \|a_i\|_p = 0.$$

Пусть r наибольшее общее кратное чисел α_1 и α_2. Обозначим $\alpha = \alpha_1/r$ и $\beta = \alpha_2/r$, то есть α и β минимальные неотрицательные целые такие, что $\alpha\|a_1\|_p + \beta\|a_2\|_p = 0$. Таким образом, получаем

$$\sum_{i=1}^{2} \alpha_i \|a_i\|_p = r(\alpha\|a_1\|_p + \beta\|a_2\|_p).$$

Напомним, что в силу условий теоремы выполняется

$$\frac{K_{min}}{K_{max}} \le |c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n| \le \frac{K_{max}}{K_{min}},$$

т.е.

$$\frac{K_{min}}{K_{max}} \le |a_1^{\alpha} a_2^{\beta}|^r \le \frac{K_{max}}{K_{min}},$$

Рассмотрим два случая $|a_1^{\alpha} a_2^{\beta}| \ne 1$ и $|a_1^{\alpha} a_2^{\beta}| = 1$. Первый случай, другими словами, означает линейную независимость столбцов матрицы A: $\operatorname{rank}(A) = 2$, а второй означает их линейную зависимость: $\operatorname{rank}(A) < 2$.

Пусть $|a_1^{\alpha} a_2^{\beta}| \ne 1$, тогда либо $|a_1^{\alpha} a_2^{\beta}| > 1$, либо $|a_1^{\alpha} a_2^{\beta}| < 1$. Если выполняется $|a_1^{\alpha} a_2^{\beta}| > 1$, то и из условия $|a_1^{\alpha} a_2^{\beta}|^r \le \frac{K_{max}}{K_{min}}$ следует $r \le \frac{\ln \frac{K_{max}}{K_{min}}}{\ln |a_1^{\alpha} a_2^{\beta}|}$. Если выполняется $|a_1^{\alpha} a_2^{\beta}| < 1$, то и из условия $|a_1^{\alpha} a_2^{\beta}|^r \ge \frac{K_{min}}{K_{max}}$ следует $r \le \frac{\ln \frac{K_{min}}{K_{max}}}{\ln |a_1^{\alpha} a_2^{\beta}|}$. Таким образом, в обоих случаях мы имеем вычислимое ограничение сверху на число $n = r(\alpha + \beta)$.

Предположим теперь $|a_1^{\alpha} a_2^{\beta}| = 1$. Поскольку при $|a_1| = 1$ и $|a_2| = 1$ мы получаем вырожденный случай кусочно-аффинного отображения, то интересен только случай $a_1 \ne 1$ и $a_2 \ne 1$. Не ограничивая общности рассуждений, положим $a_1 > 1$ и $a_2 < 1$. Заметим также, что $\|a_2\|_p = -\frac{\alpha}{\beta}\|a_1\|_p$. Рассмотрим произвольную подпоследовательность $x_1 x_2 \ldots x_{j+1}$, $j \le n$, рассматриваемой последовательности. Пусть α_1, α_2 такие, что $|c_1 c_2 \ldots c_j| = |a_1|^{\alpha_1} |a_2|^{\alpha_2}$. Тогда

$$\|x_{j+1}\|_p = \|x_1\|_p + \alpha_1\|a_1\|_p + \alpha_2\|a_2\|_p = (\alpha_1 - \alpha_2 \frac{\alpha}{\beta})\|a_1\|_p.$$

С другой стороны, в силу леммы 2,

$$\frac{K_{min}}{K_{max}} \le |a_1|^{\alpha_1} |a_2|^{\alpha_2} \le \frac{K_{max}}{K_{min}}.$$

Поскольку $|a_1^\alpha a_2^\beta| = 1$, то $|a_2| = |a_1|^{-\frac{\alpha}{\beta}}$ и

$$\frac{K_{min}}{K_{max}} \le |a_1|^{\alpha_1 - \alpha_2 \frac{\alpha}{\beta}} \le \frac{K_{max}}{K_{min}}.$$

Учитывая предположение $|a_1| > 1$, получаем

$$\alpha_1 - \alpha_2 \frac{\alpha}{\beta} \le \frac{\ln \frac{K_{max}}{K_{min}}}{\ln |a_1|}.$$

Отсюда следует, что

$$\|x_{j+1}\|_p = \|x_1\|_p + (\alpha_1 - \alpha_2 \frac{\alpha}{\beta})\|a_1\|_p \le h + \left(\frac{\ln \frac{K_{max}}{K_{min}}}{\ln |a_1|} \right) \|a_1\|_m.$$

Таким образом, мы показали вычислимую границу сверху для логарифмических p-норм элементов орбиты и тем самым, в силу приведенных в начале доказательства рассуждений, доказали теорему. □

5. Заключение. Заметим, что мы доказали алгоритмическую разрешимость проблемы достижимости в обратимых кусочно-аффинных отображениях с двумя интервалами при определенных ограничениях на инвариантные меры лишь для каждого отдельно взятого отображения. Из основного результата работы не следует алгоритмическая разрешимость сразу для всех упомянутых отображений вместе взятых, поскольку мы не знаем как вычислять величины K_{min} и K_{max} по кусочно-аффинному отображению. Доказательство более общих утверждений будет проведено в дальнейших работах.

1. *Savchenko A.Ya., Kovalev A.M., Kozlovskii V.A., Scherbak V.F.* Inverse dynamical systems in secure communication and its discrete analogs for information transfer // Proc. of NDES. 2003. – P. 112–116.
2. *Ковалев А.М., Савченко А.Я., Козловский В.А., Щербак В.Ф.* Обращение динамических систем вход–выход в задачах защиты информации // Искусственный интеллект. – 2007. – № 4. – С. 416–424.
3. *Ковалев А.М., Савченко А.Я., Козловский В.А., Щербак В.Ф.* Обратные динамические системы регулируемой размерности в задачах преобразования информации // Труды ИПММ НАН Украины. – 2008. – Т. 17. – С. 115–123.
4. *Ковалев А.М., Козловский В.А., Щербак В.Ф.* Обратимые динамические системы с переменной размерностью фазового пространства в задачах криптографического преобразования информации // Прикл. дискретная математика. – 2008. – № 2 (2). – С. 39–44.
5. *Olivier Bournez, Manuel L.* Campagnolo A Survey on Continuous Time Computations // New Computational Paradigms, Springer New York, 2008. – P. 383–423.
6. *Delvenne J.-C.* What is a universal computing machine? // Applied Mathematics and Computation. – Vol. 215, Issue 4. – 2009. – P. 1368–1374.
7. *Asarin E., Mysore V., Pnueli A., Schneider G.* Low dimensional hybrid systems – decidable, undecidable, don't know // Information and Computation. – 2012. – Vol. 211. – P. 138–159.

8. *Kurganskyy O., Potapov I., Sancho-Caparrini F.* Reachability Problems in Low-Dimensional Iterative Maps // Int. J. Found. Comput. Sci. – 2008. – 19 (4). – P. 935–951
9. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. – М.: МЦМНО, 2005. – 464 с.

O. Kurganskyy

On reachability problem in 1-dimensional 2-interval piecewise-affine mapings.

We consider the open reachability problem for one dimensional piecewise-affine mappings with two intervals (2-PAM). We give some decidable results following from specific topological properties of reachable states of the 2-PAM's.

Keywords: *piecewise-affine mapping, reachability problem.*

О. М. Курганський

Алгоритмічна проблема досяжності в 1-вимірних 2-інтервальних кусково-афінних відображеннях.

Розглянуто відкриту проблему досяжності в одновимірних кусково-афінних відображеннях з двома інтервалами. Знайдено окремі випадки алгоритмічної розв'язності цієї проблеми, які сформульовані на мові топологічних властивостей орбіт у таких системах.

Ключові слова: *кусково-афінні відображення, проблема досяжності.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`topologia@mail.ru`

Получено 12.11.13