

УДК 539.3

©2013. С. Н. Гребенюк, А. А. Бова

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ РЕЗИНОВОЙ ПЛИТЫ НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННОЙ МОМЕНТНОЙ СХЕМЫ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

В данной работе разработана методика численного анализа напряженно-деформированного состояния резиновой плиты на основе уточненной моментной схемы конечного элемента для слабосжимаемых материалов. Проведен расчет резиновой плиты с учетом специфических свойств материала и условий деформирования.

**Ключевые слова:** эластомеры, слабая сжимаемость, моментная схема конечного элемента, кубическая аппроксимация.

**1. Введение.** Математическое моделирование объектов и процессов механики деформируемого твердого тела на современном этапе развития науки и техники является очень важным. Особую роль играет деформирование эластомерных конструкций (ЭК), которые в процессе эксплуатации подвергаются механической нагрузке, в связи с чем возникает необходимость исследования параметров напряженно-деформированного состояния (НДС).

Растущая сложность таких конструкций предусматривает совершенствование математических моделей, позволяющих учитывать такие специфические свойства эластомеров как слабая сжимаемость и сочетание высокой механической прочности с высокой эластичностью. По ряду ценных свойств, таких как: высокая надежность, значительные обратимые деформации, большая энергоемкость, стоимость – эластомеры превосходят традиционные материалы того же назначения. Они позволяют находить принципиально новые конструктивные решения ответственных узлов современных технических систем. Это обусловлено широким внедрением ЭК в различные отрасли современной техники и науки в качестве упругих шарниров и опор, транспортерных лент, амортизаторов сложной геометрической формы, подшипников, мембран, муфт, виброзащитных устройств. Перечисленные элементы широко применяются в машиностроении, строительстве, авиастроении, сельскохозяйственной технике, вибрационной технике.

Аналитические методы решения задач механики эластомеров освещены в работах С.И. Дымникова [1], В.И. Дырды, В.Н. Потураева [2, 3, 4, 5], Э.Э. Лавендела [6]. Однако расчеты, которые следует проводить при использовании таких методов, являются очень сложной, а иногда и невозможной процедурой. Поэтому наиболее удобно и просто описать все разнообразие сложных геометрических форм резиновых деталей можно с помощью численных методов, которые позволяют задавать любую геометрическую форму детали и любые граничные и начальные условия при расчете.

Одним из наиболее эффективных численных методов расчета ЭК, который завоевал всеобщее признание среди специалистов в области механики, является метод конечных элементов (МКЭ). Данный метод позволяет учитывать несимметричность нагрузок и закреплений, а также получать полную картину напряженно-деформированного состояния.

Исследованию методики применения МКЭ к расчету ЭК посвящено большое количество работ. Так, в работах Р. Пэнна [7], С.И. Дымникова [8], предлагается введение различных выражений упругой энергии деформации, которые учитывают слабую сжимаемость эластомера.

Широкое распространение получили смешанные схемы МКЭ. В частности, для задач исследования слабосжимаемых эластомеров наиболее приемлемыми являются вариационные формулировки, которые были предложены Л.Р. Геррманном [9], С. Кеем [10], Т. Пианом [11]. Но применение смешанных вариационных принципов связано с увеличением порядка разрешающей системы уравнений и нарушением положительной определенности матрицы уравнений, что является существенным недостатком.

Другой способ учета слабой сжимаемости эластомера был предложен в работах О.С. Зенкевича [12], Дж. Одена [13]. Данный способ на основе сокращенного интегрирования, заключается в том, что поля перемещений и величины, ответственные за слабую сжимаемость, аппроксимируются разными функциями.

Следует отметить, что в механике эластомеров МКЭ получил значительное развитие и использование в монографиях таких ученых, как С.И. Дымников, Э.Э. Лавендел [14], В.В. Киричевский, А.С. Сахаров [15], В.В. Киричевский, Б.М. Дохняк, Ю.Г. Козуб [16].

Анализ существующих методов определения НДС эластомеров показывает, что остается ряд вопросов, касающихся данной проблемы. Среди них можно выделить следующие:

- расчет проводился, как правило, в двухмерной постановке;
- учитывалась гипотеза о несжимаемости эластомера;
- расчет объектов простой геометрической формы;
- большинство методов носят чисто теоретический характер и имеют вид, неподходящий для практического применения;
- возможность производить расчеты лишь для частных случаев конкретных постановок задач.

Таким образом, можно сделать выводы, что недостаточное количество надежных методов расчета ЭК с учетом слабой сжимаемости приводит к необходимости разработки эффективных численных методов и алгоритмов исследования на основе МКЭ в трехмерной постановке с использованием ресурсов современной вычислительной техники, а также к уточнению существующих расчетных схем.

**2. Постановка задачи.** Решается статическая задача упругости в трехмерной постановке для прямоугольной резиновой плиты (РП) (рис. 1),  $a$  – длина,  $b$  – ширина,  $h$  – толщина. Такие РП используют для амортизации аккумуляторной батареи тепловозов. На поверхности плиты нагрузка обусловлена весом аккумуляторной ба-

тарей и силами инерции, вызванными движением тепловоза. Вследствие чего вектор нагрузки  $Q$  необходимо представлять в виде трех взаимно перпендикулярных векторов:  $Q_x$  – вектор нормальной нагрузки,  $Q_y$  и  $Q_z$  – векторы касательной нагрузки. Исходя из условий эксплуатации пропорциональные соотношения между этими величинами могут варьироваться. Снизу РП опирается на абсолютно жесткую основу, а боковые грани плиты свободны от нагрузки и защемления.

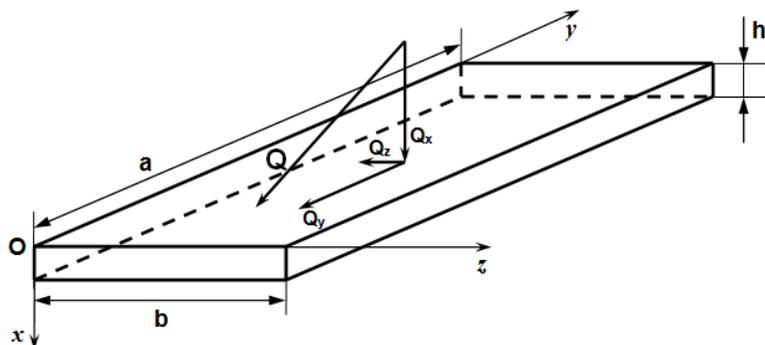


Рис. 1. Расчетная схема резиновой плиты

**3. Построение модели напряженно-деформированного состояния эластомеров на основе моментной схемы конечного элемента.** Традиционный МКЭ в форме метода перемещений не позволяет учитывать жесткие смещения конечного элемента (КЭ) и другое негативное свойство матрицы жесткости (МЖ), связанное с появлением фиктивных сдвиговых деформаций – “эффект ложного сдвига”. Кроме того, основной из отличительных черт расчета НДС эластомеров является наличие слабой сжимаемости (когда коэффициент Пуассона  $\nu \rightarrow 0,5$ ), учет которой вызывает определенные затруднения по сравнению с обычными материалами, в которых этот эффект не проявляется. Тогда в процессе формирования МЖ возникает необходимость в вычислении коэффициента  $\frac{E}{(1-2\nu)}$ , где  $E$  – модуль упругости материала. При  $\nu \rightarrow 0,5$  эта величина стремится к бесконечности, и тогда расчет конструкций приводит к вырожденности матрицы системы уравнений.

Для устранения этих недостатков необходимо использовать специально разработанную схему МКЭ – моментную схему конечного элемента (МСКЭ) для слабосжимаемых материалов [17]. МСКЭ относится к гибридным методам, поскольку включает тройную аппроксимацию компонент: вектора перемещений, компонент тензора деформаций и функции изменения объема. Порядок разложения деформаций и функции изменения объема находится в строгом соответствии с порядком аппроксимации функции перемещений и выбирается с таким расчетом, чтобы исключить все компоненты деформаций, которые реагируют на жесткие смещения и “эффект ложного сдвига”, и все компоненты функции изменения объема, реагирующие на слабую сжимаемость материала.

Процесс вычисления коэффициентов МЖ КЭ организован таким образом, что все коэффициенты разложения деформаций и функции изменения объема легко

выражаются через коэффициенты аппроксимации перемещений. Это позволяет получать уравнения, аналогичные уравнениям традиционного МКЭ, в форме метода перемещений, сохраняя все его преимущества по сравнению со смешанными формулировками.

Пусть описание геометрической формы конструкции будет осуществляться трехмерным КЭ в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 2).

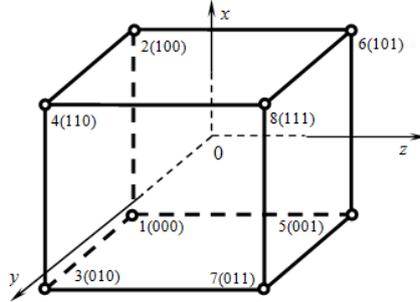


Рис. 2. Линейный параллелепипедный конечный элемент

Исходная аппроксимация перемещений соответствует полилинейному восполнению:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i = \sum_{pqr} \omega_i^{(pqr)} \frac{(x_1)^p}{p!} \frac{(x_2)^q}{q!} \frac{(x_3)^r}{r!} = \omega_i^{000} + \omega_i^{100} x_1 + \omega_i^{010} x_2 + \\ + \omega_i^{110} x_1 x_2 + \omega_i^{001} x_3 + \omega_i^{101} x_1 x_3 + \omega_i^{011} x_2 x_3 + \omega_i^{111} x_1 x_2 x_3, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\tilde{u}_i$  – компоненты вектора перемещений по направлению оси  $i$  базисной системы координат;  $\omega_i^{pqr}$  – коэффициенты разложения перемещений;  $l, m, n$  – максимальные степени аппроксимирующих полиномов относительно осей местной системы координат  $x_1, x_2, x_3$ , соответственно ( $p = \overline{0, l}; q = \overline{0, m}; r = \overline{0, n}$ ).

Для обеспечения более высокой точности и эффективности процесса решения широкого класса задач используют уточненные МСКЭ, которые по сути являются модификацией МСКЭ [17, 18, 19]. Эта методика предусматривает получение выражений для деформаций на базе дополнения (1) до полного кубического полинома, обозначая дополнительные коэффициенты буквой  $V_i^{(\dots)}$ :

$$u_i = \tilde{u}_i + \Delta u_i, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta u_i = \frac{1}{2} (V_i^{200} x_1^2 + V_i^{020} x_2^2 + V_i^{002} x_3^2 + V_i^{210} x_1^2 x_2 + V_i^{201} x_1^2 x_3 + \\ + V_i^{120} x_1 x_2^2 + V_i^{102} x_1 x_3^2 + V_i^{021} x_2^2 x_3 + V_i^{012} x_2 x_3^2) + \\ + \frac{1}{6} (V_i^{300} x_1^3 + V_i^{030} x_2^3 + V_i^{003} x_3^3). \end{aligned}$$

Для КЭ в форме прямоугольного параллелепипеда все компоненты тензора деформаций, получаемые на основе (2), представляются в виде полных квадратичных полиномов:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = e_{ij}^{000} + e_{ij}^{100} x_1 + e_{ij}^{010} x_2 + e_{ij}^{001} x_3 + \frac{1}{2} e_{ij}^{200} x_1^2 + \\ + e_{ij}^{110} x_1 x_2 + \frac{1}{2} e_{ij}^{020} x_2^2 + e_{ij}^{101} x_1 x_3 + e_{ij}^{011} x_2 x_3 + \frac{1}{2} e_{ij}^{002} x_3^2, \end{aligned}$$

где все моменты деформаций  $e_{ij}$  удовлетворяют условиям МСКЭ.

Далее определяются те компоненты, которые содержат  $V_i^{(\dots)}$ :

$$\begin{aligned} e_{11}^{100} = V_1^{200}; e_{11}^{110} = V_1^{210}; e_{11}^{101} = V_1^{201}; e_{11}^{020} = V_1^{120}; e_{11}^{002} = V_1^{102}; e_{11}^{200} = V_1^{300}; \\ e_{22}^{010} = V_2^{020}; e_{22}^{200} = V_2^{210}; e_{22}^{110} = V_2^{120}; e_{22}^{011} = V_2^{021}; e_{22}^{002} = V_2^{012}; e_{22}^{020} = V_2^{030}; \\ e_{33}^{001} = V_3^{002}; e_{33}^{200} = V_3^{201}; e_{33}^{101} = V_3^{102}; e_{33}^{020} = V_3^{021}; e_{33}^{011} = V_3^{012}; e_{33}^{002} = V_3^{003}; \\ e_{12}^{100} = \frac{1}{2}(\omega_1^{110} + V_2^{200}); e_{12}^{010} = \frac{1}{2}(\omega_2^{110} + V_1^{020}); e_{12}^{101} = \frac{1}{2}(\omega_1^{111} + V_2^{201}); \\ e_{12}^{011} = \frac{1}{2}(\omega_2^{111} + V_1^{021}); e_{12}^{002} = \frac{1}{2}(V_1^{012} + V_2^{102}); e_{12}^{200} = \frac{1}{2}(V_1^{210} + V_2^{300}); \\ e_{12}^{110} = \frac{1}{2}(V_1^{120} + V_2^{210}); e_{12}^{020} = \frac{1}{2}(V_1^{030} + V_2^{120}); e_{13}^{100} = \frac{1}{2}(\omega_1^{101} + V_3^{200}); \\ e_{13}^{001} = \frac{1}{2}(\omega_3^{101} + V_1^{002}); e_{13}^{110} = \frac{1}{2}(\omega_1^{111} + V_3^{210}); e_{13}^{011} = \frac{1}{2}(V_1^{012} + \omega_3^{111}); \\ e_{13}^{020} = \frac{1}{2}(V_1^{021} + V_3^{120}); e_{13}^{200} = \frac{1}{2}(V_1^{201} + V_3^{300}); e_{13}^{101} = \frac{1}{2}(V_1^{102} + V_3^{201}); \\ e_{13}^{002} = \frac{1}{2}(V_1^{003} + V_3^{102}); e_{23}^{010} = \frac{1}{2}(\omega_2^{011} + V_3^{020}); e_{23}^{001} = \frac{1}{2}(V_2^{002} + \omega_3^{011}); \\ e_{23}^{110} = \frac{1}{2}(\omega_2^{111} + V_3^{120}); e_{23}^{101} = \frac{1}{2}(\omega_3^{111} + V_2^{102}); e_{23}^{200} = \frac{1}{2}(V_2^{201} + V_3^{210}); \\ e_{23}^{011} = \frac{1}{2}(V_2^{012} + V_3^{021}); e_{23}^{020} = \frac{1}{2}(V_2^{021} + V_3^{030}); e_{23}^{002} = \frac{1}{2}(V_2^{003} + V_3^{012}). \end{aligned}$$

Уточнение МСКЭ сводится к минимизации тех коэффициентов разложения деформаций, которые согласно МСКЭ должны отбрасываться. А именно, из моментов деформаций, которые представлены через перемещения и содержат искомые “лишние” коэффициенты, составляется сумма квадратов. Путем ее минимизации получаем систему уравнений, решив которую, определим дополнительные коэффициенты:

$$\begin{aligned} V_1^{200} = V_1^{210} = V_1^{201} = V_1^{120} = V_1^{102} = V_1^{300} = V_1^{030} = 0; \\ V_1^{003} = V_2^{020} = V_2^{021} = V_2^{012} = V_2^{030} = V_2^{210} = V_2^{120} = 0; \\ V_2^{300} = V_2^{003} = V_3^{003} = V_3^{021} = V_3^{002} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_3^{300} = V_3^{030} = V_3^{201} = V_3^{102} = V_3^{012} &= 0; \\
 V_1^{021} = V_3^{120} = -\omega_2^{111}/3; V_1^{020} = -\omega_2^{110}; V_3^{200} &= -\omega_1^{101}; \\
 V_1^{012} = V_2^{102} = -\omega_3^{111}/3; V_1^{002} = -\omega_3^{101}; V_2^{200} &= -\omega_1^{110}; \\
 V_2^{201} = V_3^{210} = -\omega_1^{111}/3; V_2^{002} = -\omega_3^{011}; V_3^{020} &= -\omega_2^{011}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Таким образом, исходя из формул (2) и (3), вспомогательный закон распределения перемещений трехмерного КЭ будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_1^{(pqr)} x_1^p x_2^q x_3^r - \frac{1}{2}(\omega_2^{110} x_2^2 + \omega_3^{101} x_3^2) - \frac{1}{6}(\omega_2^{111} x_2^2 x_3 + \omega_3^{111} x_2 x_3^2); \\
 u_2 &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_2^{(pqr)} x_1^p x_2^q x_3^r - \frac{1}{2}(\omega_1^{110} x_1^2 + \omega_3^{011} x_3^2) - \frac{1}{6}(\omega_1^{111} x_1^2 x_3 + \omega_3^{111} x_1 x_3^2); \\
 u_3 &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_3^{(pqr)} x_1^p x_2^q x_3^r - \frac{1}{2}(\omega_1^{101} x_1^2 + \omega_2^{011} x_2^2) - \frac{1}{6}(\omega_1^{111} x_1^2 x_2 + \omega_2^{111} x_1 x_2^2).
 \end{aligned}$$

Функция изменения объема

$$\theta = e_{11}^{000} g^{11} + e_{22}^{000} g^{22} + e_{33}^{000} g^{33},$$

где  $g^{ij}$  – компоненты метрического тензора;  $e_{ij}^{pqr}$  – коэффициенты разложения деформаций.

Вывод соотношений МЖ для ЭК с использованием предложенных аппроксимаций в полном объеме представлен в работах [15, 20].

Данная методика остается верной и для более высокой степени полиномиальной аппроксимации перемещений, включая те случаи, когда порядок аппроксимации различный по местным координатам.

Итак, уточненная схема МСКЭ дает возможность получить класс КЭ, которые обладают улучшенными свойствами – деформации имеют более высокую степень аппроксимации, а МЖ удовлетворяют основным условиям жестких смещений независимо от формы КЭ, что следует из того факта, что при движении КЭ как жесткого целого его деформации и, следовательно, все моменты деформаций обращаются в нуль.

**4. Результаты расчетов.** Исходные данные: длина  $a = 1,352$  м, ширина  $b = 0,63$  м, толщина  $h = 0,08$  м. Учитывая условия эксплуатации плиты, принимаем векторы касательной нагрузки  $Q_y = 9836$  Па и  $Q_z = 3279$  Па, вектор нормальной нагрузки  $Q_x = 13115$  Па. Расчет был проведен при сетке дискретизации  $7 \times 13 \times 11$ .

Рассмотренная методика расчета РП в условиях линейного деформирования реализована в рамках программного комплекса «МИРЕЛА+» [21].

Зависимость перемещений  $u_1$  РП от коэффициента Пуассона  $\nu$  для различных марок резины показана в табл. 1.

Таблица 1. Зависимость перемещений от коэффициента Пуассона

Коэффициент Пуассона, $\nu$	Марка резины:				
	28Э	1378, 1224, 51-1711	169, 11-67Л, 11-59Л	51-1562	51-1714
0,49	0,0012656	0,0016550	0,0014343	0,0027583	0,0010758
0,499	0,0012619	0,0016502	0,0014301	0,0027503	0,0010726
0,4999	0,0012616	0,0016497	0,0014298	0,0027496	0,0010723
0,49999	0,0012615	0,0016497	0,0014297	0,0027495	0,0010723

На рис. 3 представлено распределение перемещений  $u_1$  по толщине  $h$  РП при коэффициенте Пуассона  $\nu = 0,49999$  для различных марок резины.

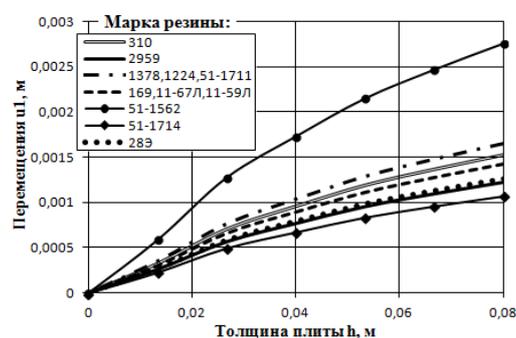


Рис. 3. Распределение перемещений по толщине плиты

На рис. 4 представлено распределение компонент тензора напряжений по толщине  $h$  РП при коэффициенте Пуассона  $\nu = 0,49999$ : 1 –  $\sigma^{11}$ , 2 –  $\sigma^{22}$ , 3 –  $\sigma^{33}$ , 4 –  $\sigma^{12}$ , 5 –  $\sigma^{13}$ , 6 –  $\sigma^{23}$ .

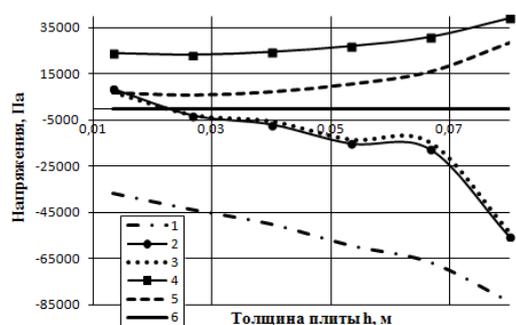


Рис. 4. Распределение напряжений по толщине плиты

**5. Выводы и перспективы дальнейшего развития в данном направлении.** В данной работе исследовалось напряженно-деформированное состояние ре-

зиновой плиты в трехмерной постановке с использованием уточненной моментной схемы конечного элемента. Были получены: зависимость перемещений резиновой плиты от коэффициента Пуассона, распределение перемещений, нормальных и касательных напряжений по толщине плиты.

Проведен расчет для различных марок резины. Следует отметить, что плита, выполненная из резины марки 51-1562, будет испытывать наибольшие деформации. Использование марок резины 1378, 1224, 51-1711 позволяет снизить уровень деформации приблизительно на 40%, а марки резины 51-1714 – на 60%.

Таким образом, рассмотренный подход к численному анализу напряженно-деформированного состояния эластомерных конструкций с учетом слабой сжимаемости материала позволяет получать адекватные результаты при использовании кубической аппроксимации перемещений.

Проведенное исследование доказывает перспективность использования предложенной уточненной моментной схемы для определения параметров напряженно-деформированного состояния слабосжимаемых эластомеров. В дальнейшем целесообразно будет проводить расчет конструкций с учетом различных особенностей деформирования, например, таких как нелинейность свойств материала, вязкоупругость. Актуальным является уточнение на основе полученной схемы процесса конечно-элементного анализа слабосжимаемых материалов.

1. *Дымников С.И.* Расчет резиновых элементов конструкций / С.И. Дымников. – Рига: Зинатне, 1991. – 277 с.
2. *Дырда В.И.* Резиновые детали в машиностроении / В.И. Дырда, Е.Ф. Чижик. – Днепропетровськ: Поліграфіст, 2000. – 581 с.
3. *Дырда В.И.* Аналитические и численные методы расчета резиновых изделий / В.И. Дырда, С.Н. Гребенюк, С.И. Гоменюк. – Днепропетровск-Запорожье: Запорожский национальный ун-т, 2012. – 370 с.
4. *Потураев В.Н.* Прикладная механика резины / В.Н. Потураев, В.И. Дырда, И.И. Круш. – К.: Наукова думка, 1980. – 260 с.
5. *Потураев В.Н.* Резиновые детали машин / В.Н. Потураев, В.И. Дырда. – М.: Машиностроение, 1977. – 216 с.
6. *Лавендел Э.Э.* Расчет резинотехнических изделий / Э.Э. Лавендел. – М.: Машиностроение, 1976. – 232 с.
7. *Penn R. W.* Volume Changes Accompanying Extension of Rubber / R. W. Penn // Trans. Soc. Rheol. – 1970. – Vol. 14, No. 4. – P. 507–517.
8. *Дымников С.И.* Упругие потенциалы для слабосжимаемых эластомерных материалов / С.И. Дымников, И.Р. Мейерс, А.Г. Эрдманис // Вопр. динамики и прочности. – 1983. – Вып. 40. – С. 98–108.
9. *Геррманн Л.Р.* Вариационный принцип для уравнений упругости несжимаемых или почти несжимаемых материалов / Л.Р. Геррманн // Ракетная техника и космонавтика. – 1965. – № 10. – С. 139–144.
10. *Key S. W.* A variational principle for an incompressible and nearly incompressible anisotropic elasticity / S. W. Key // Intern. Journ. Solids. and Struct. – 1965. – Vol. 5. – P. 455–461.
11. *Пиан Т.* О методе конечных элементов для почти несжимаемых материалов / Т. Пиан, С. Ли // Ракетная техника и космонавтика. – 1976. – № 6. – С. 147–149.
12. *Zienkiewicz O. C.* Reduced integration technique in general analysis of plates and shells / O. C. Zienkiewicz, J. Too, R. L. Taylor // Intern. J. Numerical Methods Eng. – 1971. – Vol. 3, No. 3. – P. 275–290.

13. Oden I.T. Finite element methods for constrained problems in elasticity / I.T. Oden, N. Kikuchi // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1983. – Vol. 18. – No. 5. – P. 701–725.
14. Прикладные методы расчета изделий из высокоэластичных материалов / С.И. Дымников, Э.Э. Лавендел, А.А. Павловскис, М.И. Сниегс. – Рига: Зинатне, 1980. – 238 с.
15. Киричевский В.В. Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров: [монография] / В.В. Киричевский, А.С. Сахаров. – К.: Будівельник, 1992. – 215 с.
16. Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике разрушения эластомеров / В.В. Киричевский, Б.М. Дохняк, Ю.Г. Козуб. – К.: Наукова думка, 1998. – 200 с.
17. Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике эластомеров: [монография] / В.В. Киричевский. – К.: Наукова думка, 2002. – 655 с.
18. Завьялов Г.Г. Уточненные схемы МСКЭ для расчета массивных конструкций / Г.Г. Завьялов, В.В. Киричевский, А.С. Сахаров // Пробл. прочности. – 1978. – № 6. – С. 76–82.
19. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислокий, В.В. Киричевский и др. / Под общ. ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. – Киев: Вища школа, 1982. – 480 с.
20. Гребенюк С.Н. Повышение точности моментной схемы конечного элемента для слабосжимаемых материалов / С.Н. Гребенюк, А.А. Бова // Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве и образовании. – 2009. – Т. 22. – С. 55–64.
21. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МІРЕЛІА+» / [В.В. Киричевский, Б.М. Дохняк, Ю.Г. Козуб и др.]. – К.: Наук. думка, 2005. – 416 с.

**S. N. Grebenyuk, A. A. Bova**

**Determination of stress-strain state of rubber flag on the basis of precise finite element moment scheme.**

In this paper the technique of the numerical analysis of the stress-strain state of the rubber plate based on the precise finite element moment scheme for weakly compressible materials is developed. The calculation of rubber plate is conducted taking into account specific properties of material and conditions of deformation.

**Keywords:** *the elastomers, a weak compressibility, finite element moment scheme, cubic approximation.*

**С. М. Гребенюк, А. А. Бова**

**Визначення напружено-деформівного стану гумової плити на основі уточненої моментної схеми скінченного елемента.**

У даній роботі розроблено методику чисельного аналізу напружено-деформованого стану гумової плити на основі уточненої моментної схеми скінченного елемента для слабкостисливих матеріалів. Проведено розрахунок гумової плити з урахуванням специфічних властивостей матеріалу та умов деформування.

**Ключові слова:** *еластомери, слабка стисливість, моментна схема скінченного елемента, кубічна апроксимація.*

Запорожский национальный ун-т  
bova-anna@mail.ru

Получено 17.09.13