

УДК 539.3

©2013. О. С. Ветров, В. П. Шевченко

## ДИНАМИКА ТОНКИХ ПЛАСТИН НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК

Рассмотрена задача о действии локальной динамической нагрузки на тонкую пластину, лежащую на упругом основании Винклера. Методом интегральных преобразований построено фундаментальное решение динамического уравнения ортотропной пластины. Численно исследована задача о действии на тонкую пластину внезапно приложенной и импульсной нагрузок, изучено влияние упругого основания на значение прогиба пластины.

**Ключевые слова:** фундаментальное решение, локальные нагрузки, упругое основание, ортотропная пластина.

**1. Введение.** Конструкции в виде тонкостенных пластин на упругом основании находят широкое применение в машиностроении, строительстве и в других отраслях техники. Конструкционные элементы в процессе эксплуатации всегда находятся под действием изменяющихся во времени нагрузок различной природы.

В [1] представлен краткий обзор результатов исследования колебаний пластин на упругом основании. В монографии модель бесконечной пластины представляется адекватной для описания напряженно-деформированного состояния ледового покрова.

Работ, посвященных исследованию динамики пластины в случае анизотропии материала, значительно меньше. В частности, следует отметить работу [2]. В ней методом Л.В. Канторовича решена задача о колебаниях анизотропной пластины на упругом основании. Решение получено в виде рядов по полиномам специального вида. Недостатком подхода [2] является то, что он не дает возможности для подробного аналитического исследования полученного решения. Решение же задач о сосредоточенном воздействии на пластину указанным методом затруднительно.

Одним из наименее изученных вопросов теории анизотропных пластин являются задачи о действии на тело локальных распределенных нагрузок. Основная проблема состоит в отсутствии соответствующих фундаментальных решений в виде, приемлемом для дальнейших численно-аналитических исследований.

Фундаментальное решение для тонкой ортотропной пластины на упругом основании в случае статического нагружения было получено [3]. На основании методики [3], позже были рассмотрены частные случаи ортотропии [4], и в последствии был развит метод граничных элементов для решения статической задачи для изотропной пластины на сложном двухпараметрическом основании [5]. Для динамики аналогичные решения отсутствуют.

В работе получила дальнейшее развитие методика построения фундаментальных решений, ранее предложенная авторами [6, 7] для исследования динамики ортотропных пластин.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим тонкую ортотропную пластину постоянной толщины  $h$ . Дополнительно примем модель бесконечной пластины, что допустимо, если считать, что компоненты перемещений стремятся к нулю при бесконечном удалении от начала координат. Поэтому, из физических соображений, краевые условия на границе пластины можно заменить нулевыми условиями на бесконечности. Также, не ограничивая общности рассуждений, начальные условия задачи считаем нулевыми.

Совместим главные оси ортотропии с прямоугольными координатными осями  $(x_1, y_1)$ . Тогда, динамическое уравнение изгиба тонкой ортотропной пластины [8] в классических предположениях будет иметь вид

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial y_1^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y_1^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = Z(x_1, y_1, \tau), \quad (1)$$

где  $w$  – поперечный прогиб пластины;  $\rho$  – плотность материала;  $Z$  – интенсивность внешней динамической нагрузки, нормальной к срединной плоскости пластины;  $D_{ij}$  – жесткости пластины на изгиб и кручение, определяемые соотношениями:

$$D_{ik} = \frac{h^3}{12} B_{ik}, \quad B_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad B_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}, \\ B_{12} = \nu_2 B_{11} = \nu_1 B_{22}, \quad B_{66} = G_{12}.$$

Здесь  $E_1, E_2$  – модули Юнга;  $\nu_1, \nu_2$  – коэффициенты Пуассона;  $G_{12}$  – модуль сдвига.

Считаем, что пластина лежит на сплошном деформируемом основании, причем связь между реакцией основания и прогибом пластины удовлетворительно описывается в рамках модели Винклера. Таким образом, в уравнении прогиба необходимо учесть реакцию упругого основания  $q_r$ , т.е. уравнение (1) нужно дополнить

$$Z(x_1, y_1, \tau) \rightarrow Z(x_1, y_1, \tau) + q_r(x_1, y_1, \tau), \quad (2)$$

где  $q_r = -\chi w$ ,  $\chi$  – коэффициент постели (коэффициент жесткости упругого основания).

Для упрощения записей, дополнительно введем следующие обозначения:

$$\mu = \frac{E - 2G_{12}(1 + \nu)}{E}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (3) \\ \nu = \sqrt{\nu_1 \nu_2}, \quad E = \sqrt{E_1 E_2}, \quad c^4 = E_1 / E_2.$$

Перейдем к безразмерной системе координат  $(x, y, t)$ , определяемой соотношениями

$$x_1 = chx, \quad y_1 = hy, \quad \tau = ct h^2 \sqrt{\rho h D^{-1}}. \quad (4)$$

Учитывая (2)–(4), искомое уравнение (1) перепишем

$$\nabla^2 \nabla^2 w - 4(1 - a) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p^2 w = \frac{c^2 h^4}{D} Z, \quad (5)$$

где  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ ,  $2a = 2 - \mu + \mu\nu$ ,  $p^2 = \chi c^2 h^4/D$ .

Важнейшим шагом решения задачи о действии локальной нагрузки на пластину является построение фундаментальных решений соответствующих уравнений.

Таким образом, нам необходимо найти решение уравнения (5) при условии, что

$$Z(x, y, t) = \delta(t)\delta(x, y), \quad (6)$$

где  $\delta(\cdot)$  – дельта-функция Дирака.

**3. Аналитическое решение.** Будем искать решение (5)–(6) методом интегральных преобразований. Применим к (5)–(6) двумерное интегральное преобразование Фурье по координатам  $(x, y)$ , а затем преобразование Лапласа по координате  $t$ . Таким образом, от исходной задачи перейдем в пространство трансформант Фурье–Лапласа  $FL$ , т.е.  $(x, y, t) \rightarrow (\xi, \eta, s)$ , соответственно. Трансформанта динамического прогиба в новом пространстве  $FL$  запишется

$$w^{FL}(\xi, \eta, s) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho h D}} \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^2 - 4(1-a)\xi^2\eta^2 + p^2 + s^2}. \quad (7)$$

В дальнейшем, с целью сокращения записей, введем в рассмотрение величину  $w_1^{FL}$ , которую определим соотношением

$$w_1^{FL} = 2\pi\sqrt{\rho h D}w^{FL}.$$

Применим к введенному выражению  $w_1^{FL}(\xi, \eta, s)$  формулу обратного преобразования Фурье. С учетом четности подынтегральной функции запишем

$$w_1^L(x, y, s) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty w_1^{FL} \cos(\xi x) \cos(\eta y) d\xi d\eta. \quad (8)$$

В подынтегральном выражении (8) перейдем к полярным координатам. В пространстве трансформант  $(\xi, \eta)$  перейдем к координатам  $(R, \theta)$  по формулам  $\xi = R \cos \theta$ ,  $\eta = R \sin \theta$ , а в пространстве оригиналов переход от  $(x, y)$  к  $(r, \phi)$  осуществляется, соответственно,  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ . Применим к (8) формулу обратного преобразования Лапласа, и в новых координатах получим

$$w_1(r, \phi, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st} ds}{R^4 N_\theta + p^2 + s^2} \right] \times \quad (9)$$

$$\times \cos(Rr \cos \theta \cos \phi) \cos(Rr \sin \theta \sin \phi) R dR d\theta,$$

где  $N_\theta = 1 - (1-a)\sin^2 2\theta$ .

В работах [6, 7] была развита методика построения фундаментального решения динамического изгиба ортотропных пластин. В случае учета влияния упругого основания, а именно слагаемого  $p^2$  в знаменателе (9), полученные результаты малоприменимы. В данной задаче необходимо применить метод построения фундаментальных

решений динамики тонких оболочек [9–11], с учетом ортотропии материала. Для вычисления интеграла Меллина в (9) воспользуемся обобщенной теоремой умножения (теоремой Эффроса) и получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st} ds}{R^4 N_\theta + p^2 + s^2} = \int_0^t J_0(p\sqrt{t^2 - u^2}) \cos(N_\theta^{1/2} R^2 u), du, \quad (10)$$

где  $J_0(\cdot)$  – функция Бесселя первого рода.

В (9) воспользуемся известным разложением Якоби–Ангера. Подставим (10) в (9), и пропуская некоторые промежуточные вычисления, подробно описанные в [7], запишем

$$w_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos 2n\phi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m p^{2m}}{2^{3m-1/2} m!} \times \\ \times t^{2m} \left(\frac{r^2}{4t}\right)^{m-1/2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2n\theta}{N_\theta^{m/2+1/4}} G_{m+1/2, 2n}^{-1} \left(N_\theta^{-1} \frac{r^4}{64t^2}\right) d\theta. \quad (11)$$

Здесь  $\varepsilon_0 = 1$ , и  $\varepsilon_n = 2$  при любом натуральном  $n$ ; функция  $G_{\alpha, \beta}^\gamma(z)$  – функция гипергеометрического типа [6, 7, 9–11], используемая в задачах динамики пластин и оболочек. Существует несколько способов задания функции  $G_{\alpha, \beta}^\gamma(z)$  [6, 7], мы же в дальнейшем будем пользоваться представлением

$$G_{\alpha, \beta}^\gamma(z) = G_{2, 4}^{2, 1} \left( z \left| \begin{matrix} 1 - \frac{\alpha}{2}, 1 + \frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\alpha+\gamma}{2} + \frac{\beta}{4}, -\frac{\alpha+\gamma-1}{2} + \frac{\beta}{4}, -\frac{\alpha+\gamma-1}{2} - \frac{\beta}{4}, -\frac{\alpha+\gamma}{2} - \frac{\beta}{4} \end{matrix} \right. \right),$$

где  $G$  – функция Мейера.

С целью разделения переменных в (11) для новой функции была получена «формула умножения» [9]. После некоторых преобразований [9, 10] в итоге получим

$$w_1 = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{n+m} \varepsilon_n \frac{p^{2m} t^{2m}}{2^{2m+1} m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-a)^k}{2^{2k+1} k!} \binom{2k}{k-n} \times \\ \times \vartheta^{m-k-1/2} G_{m+k+1/2, 4n}^{-1-2k}(\vartheta^2) \cos 4n\phi, \quad (12)$$

где  $\vartheta = r^2/(8t)$ .

В случае изотропии материала мы должны принять в (12)  $a = 1$ , и тогда выражение фундаментального решения существенно упростится

$$w_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{p^{2m} t^{2m}}{2^{2m+1} m!} \vartheta^{m-1/2} G_{m+1/2, 0}^{-1}(\vartheta^2). \quad (13)$$

Отметим интересный момент: в случае  $p = 1$  выражение (13) совпадает с формулой для соответствующей компоненты фундаментального решения тонкой сферической изотропной оболочки.

Для более полного исследования напряженно-деформированного состояния тонких пластин, помимо фундаментальных решений, необходимо определить также компоненты моментов, возникающих под действием сосредоточенных внезапно приложенных сил. Ограничившись случаем изотропии материала, запишем

$$M_{1,2} = \frac{1 + \nu}{(2h)^2} \sqrt{\frac{D}{\pi \rho h}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m p^{2m}}{2^{2m+1} m!} \times \quad (14)$$

$$\times t^{2m-1} \vartheta^{m-3/2} \left( G_{m+1/2,0}^{-2}(\vartheta^2) \mp \frac{1-\nu}{1+\nu} G_{m+1/2,2}^{-2}(\vartheta^2) \cos 2\phi \right),$$

$$H = -\frac{1-\nu}{(2h)^2} \sqrt{\frac{D}{\pi \rho h}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m p^{2m}}{2^{2m+1} m!} t^{2m-1} \vartheta^{m-3/2} G_{m+1/2,2}^{-2}(\vartheta^2) \sin 2\phi, \quad (15)$$

где  $M_1, M_2$  – изгибные моменты,  $H$  – крутящий момент.

Формулы (14) и (15) записаны уже для исходного значения динамического прогиба  $w$ . Проверкой на корректность полученных выражений (12) и (13) может быть их сравнение со случаем прогиба пластины без учета упругого основания, т.е. при  $p = 0$ . В этом случае выражение (12) совпадет с результатом [7], полученным ранее. В изотропном случае (13) совпадет с известным фундаментальным решением динамики тонкой пластины [12], которое традиционно записывается через выражение интегрального синуса.

**4. Анализ численных данных.** Полученное решение (12) позволяет нам без труда получать в численно-аналитическом виде значения прогиба  $w$  при действии на пластину различных динамических локальных нагрузок. Для этого достаточно найти свертку соответствующего фундаментального решения с функцией, описывающей силовое воздействие.

Отметим также, что фундаментальные решения (12)–(13) определяются с точностью до однородного решения (1). Таким образом, для различных нагрузок фундаментальное решение нужно выбирать так, чтобы свертка существовала.

Рассмотрим случай, когда на пластину действует локальная внезапно приложенная нагрузка единичной интенсивности, равномерно распределенная по области  $\Omega$ , ограниченной окружностью радиуса  $r = R_0$  [6, 9], т.е. нагрузка имеет вид  $Z(r, t) = -\delta(t)(\pi R_0^2)^{-1}$  при  $r^2 \leq R_0^2$ , и равна нулю вне границ указанной области.

Обозначим  $\sigma = R_0^2/(8t)$ . Значение прогиба в центре загруженной области будет

$$w(0, 0, t) = \sqrt{\frac{D^{-1}}{\pi \rho h}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} p^{2m}}{2^{2m+2} m!} t^{2m} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{(1-a)^k}{2^{2k+2} k!} \times \quad (16)$$

$$\times \sigma^{m-k-1/2} G_{k+m+1/2,1}^{-1/2-2k}(\sigma^2).$$

Чтобы получить решение указанной задачи в случае действия на пластину импульсной нагрузки, достаточно проинтегрировать (16) по  $t$ .

В качестве примера исследуем более наглядный случай изотропной пластины ( $a = 1$ ). Будем пользоваться соотношениями в приведенном виде.

Изучим влияние на пластину упругого основания (рис. 1). Положим в (16)  $R_0 = 1$ . Кривой 1 соответствует случай  $p = 0.75$ , соответственно, кривой 2 –  $p = 0.5$ , кривой 3 –  $p = 0.25$ , кривой 4 –  $p = 0.1$ .

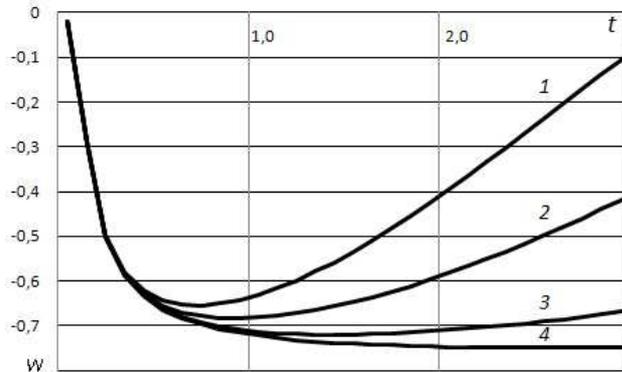


Рис. 1.

Из рис. 1 видно, что существенное влияние упругое основание начинает оказывать только с течением времени. С увеличением значения  $p$  величина прогиба пластины значительно уменьшается. При этом, в моменты времени, близкие к начальным, влияние параметра  $p$  на прогиб практически отсутствует. Определение границ значений параметра  $p$ , при которых влияние упругого основания можно не учитывать и производить расчеты по точным формулам, требует дополнительных исследований с учетом асимптотического поведения функции прогиба.

Исследуем влияние радиуса  $R_0$  области  $\Omega$  на характер прогиба пластины. На рис. 2 кривой 1 соответствует  $R_0 = 5$ , кривой 2 –  $R_0 = 2$ , кривой 3 –  $R_0 = 1$ . Во всех трех случаях принято  $p = 0.5$ . Полученные данные позволяют утверждать, что с уменьшением параметра  $R_0$  значение прогиба увеличивается по абсолютной величине, что соотносится с представлением о действии нагрузки.

На рис. 3 исследуется влияние параметров  $R_0$  и  $p$  на прогиб пластины в случае импульсного нагружения. Для кривых 1 и 2 принято  $p = 0.75$ , причем кривой 1 соответствует  $R_0 = 2$ , кривой 2 –  $R_0 = 1$ . Аналогично при  $p = 0.5$  кривая 3 отображает случай  $R_0 = 2$ , кривая 4 –  $R_0 = 1$ . Анализ результатов показывает, что рост значений параметров  $R_0$  и  $p$  уменьшает по абсолютной величине значение прогиба. При этом влияние параметра  $R_0$  более существенно в моменты времени, близкие к начальным, т.к. значения кривых 1 и 3 (соответственно 2 и 4) до момента  $t = 1$  отличаются крайне незначительно. Сравнивая результаты, отображенные на рис. 2 и рис. 3, отметим также, что в начальные моменты времени прогиб пластины при внезапном локальном нагружении более существенен, чем при импульсном для соответствующих  $R_0$  и  $p$ . С течением времени картина меняется.

**5. Выводы.** Построено фундаментальное решение динамических уравнений теории тонких пластин, лежащих на упругом основании Винклера. Было проведено численное исследование влияния коэффициента жесткости упругого основания на величину прогиба пластины в случаях мгновенного и импульсного нагружений.

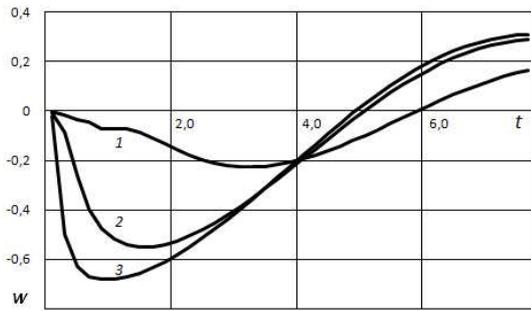


Рис. 2.

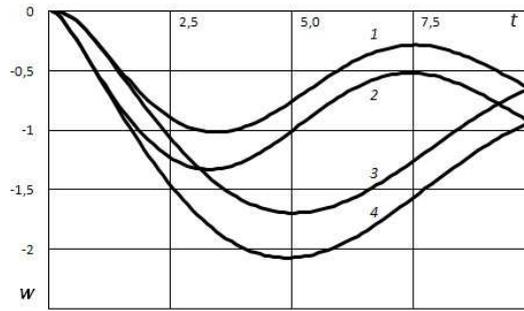


Рис. 3.

Установлено, что наиболее сложный характер влияния рассматриваемых параметров нагружения и основания наблюдается при начальных моментах времени, что требует проведения асимптотических исследований полученных решений.

Перспективным представляется продолжение исследований по двум направлениям. Во-первых, это расширение методики получения фундаментальных решений динамики пластин на случай более сложных моделей основания, в частности, сложного двухпараметрического упругого основания в модели П.Л. Пастернака.

Во-вторых, необходимо развитие соответствующей методики для задач теории тонких оболочек, а на ее основании уже решение ряда актуальных практических задач о действии локальных распределенных нагрузок. В этом случае важным является исследование взаимного влияния упругого основания, геометрических характеристик и анизотропии материала на напряженно-деформированное состояние тонких оболочек.

1. Козин В.М. Прикладные задачи динамики ледяного покрова / Козин В.М., Жесткая В.Д., Погорелова А.В., Чижиумов С.Д. и др. – М.: Академия Естествознания, 2008. – 329 с.
2. Голоскоков Д.П. Применение полиномов специального вида для расчета колебаний прямоугольной пластины // Журнал университета водных коммуникаций. – 2009. – № 1. – С. 185–188.
3. Хижняк В.К., Шевченко В.П. Ортоотропная пластинка на упругом основании под действием сосредоточенной силы // Теоретическая и прикладная механика. – 1978. – Вып. 9. – С. 57–61.
4. Артюхин Ю.П., Великанов П.Г. Фундаментальное решение задачи изгиба ортоотропной пластины, лежащей на упругом основании типа Винклера // Труды Третьей Всероссийской научной конференции. Часть 3, Дифференциальные уравнения и краевые задачи, Матем. моделирование и краев. задачи. – 2006. – С. 51–54.
5. Великанов П.Г. Метод граничных интегральных уравнений для решения задач изгиба изотропных пластин, лежащих на сложном двухпараметрическом упругом основании // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2008. – № 8 (1). – С. 36–42.
6. Шевченко В.П., Ветров О.С. Динамика ортоотропной пластины под действием локальных внезапно приложенных нагрузок // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т. 22. – С. 207–215.
7. Ветров О.С. Асимптотические представления в динамических задачах теории тонких пластин // Актуальные проблемы современной математики, механики и информатики. – Харьков: Апограф, 2011. – С. 67–73.
8. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.

9. Ветров О.С. Динамическое деформирование пологих ортотропных оболочек под действием локальных нагрузок // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 20. – С. 89–96.
10. Vetrov O.S., Shevchenko V.P. Study of the stress-strain state of orthotropic shells under the action of dynamical impulse loads // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 183, No. 2. – P. 231–240.
11. Нагорная Р.М., Цванг В.А., Шевченко В.П. Фундаментальные решения динамических уравнений теории пологих оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. – 1994. – № 3. – С. 173–180.
12. Шувалова Ю.С. Моделирование динамики тонкой упругой пластины со смешанными условиями // Вестник ХНТУ. – 2012. – № 2 (45). – С. 416–419.

**O. S. Vetrov, V. P. Shevchenko**

**The dynamics of thin plates on elastic foundation under the action of local loads.**

The fundamental solution of the dynamic equation of an orthotropic plate is constructed by using the method of integral transformations. The problems of the action on the thin plate suddenly applied dynamic and impulse loads are numerically investigated.

*Keywords:* fundamental solution, local loads, orthotropic plate.

**О. С. Ветров, В. П. Шевченко**

**Динаміка тонких пластин на пружній основі під дією локальних навантажень.**

Розглянуто задачу про дію локального динамічного навантаження на тонку пластину, що лежить на пружній основі Вінклера. Методом інтегральних перетворень побудовано фундаментальний розв'язок динамічного рівняння ортотропної пластини. Чисельно досліджено задачу про дію на тонку пластинку раптово прикладеного ї імпульсного навантаження, вивчено вплив пружної основи на значення прогину пластини.

*Ключові слова:* фундаментальний розв'язок, локальні навантаження, пружна основа, ортотропна пластинка.

Донецкий национальный ун-т  
o.s.vetrov@gmail.com

Получено 31.05.13