

УДК 539.3

©2013. Н. С. Бондаренко

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ТЕПЛОПРОНИЦАЕМЫМ РАЗРЕЗОМ НА БАЗЕ ОБОБЩЁННОЙ ТЕОРИИ ПРИ СИММЕТРИЧНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ

Задача теплопроводности для изотропной пластины с теплопроницаемым разрезом на базе обобщённой теории сведена к системе независимых краевых задач для метагармонических уравнений. Рассмотрен случай симметричного теплообмена. Исследовано влияние параметров теплообмена и теплопроницаемости разреза на величину скачков компонент возмущённой температуры.

Ключевые слова: изотропная пластина, теплопроницаемый разрез, обобщённая теория, метагармоническое уравнение, преобразование Фурье.

1. Введение. Условия эксплуатации инженерных конструкций могут предусматривать не только силовое, но и тепловое воздействие на их элементы. Наличие концентраторов напряжений (например, дефектов типа трещин), на которых задана температура или тепловой поток, обуславливает локальное возрастание в их окрестности температурных градиентов. Это, в свою очередь, вызывает значительный рост термоупругих напряжений, что совместно с другими факторами может привести к разрушению конструкции. Дополнительную трудность в проведение прочностных расчётов вносит учёт условий теплообмена с окружающей средой.

Плоским задачам теплопроводности тел с трещинами посвящён ряд работ, обзор которых содержится в монографиях [1, 2]. Исследование термоупругого состояния тел с трещинами привлекает внимание и современных учёных. В статьях Г.С. Кита, О.П. Сушко [3], О.П. Сушко [4] решены задачи теплопроводности для бесконечных тел с круговыми трещинами. В.К. Опанасович, Н.М. Басса [5] исследовали термоупругое состояние изотропной пластины с размещёнными вдоль дуг окружности теплоизолированными трещинами. Температурные задачи теории трещин рассмотрены и в работах зарубежных авторов [6, 7].

В статье решена задача теплопроводности для изотропной пластины, содержащей теплопроницаемый разрез, в случае симметричного теплообмена. При этом используется обобщённая теория, основанная на разложении температуры в ряд Фурье по полиномам Лежандра [8]. Аналогичная задача была решена для пластины с теплоизолированным разрезом [9]. Целью данной работы является исследование влияния параметров теплообмена и теплопроницаемости разреза на величину возмущённого температурного поля, вызванного наличием разреза.

2. Постановка задачи. Рассмотрим изотропную пластину толщины $2h$ в декартовой системе координат x, y, z , содержащую теплопроницаемый разрез L . На лицевых поверхностях пластины происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с внешней средой постоянной температуры θ^\pm ($z = \pm h$). Теплообмен с внешней средой имеет симметричный характер: параметры теплообмена (критерии

Био) Bi^\pm на лицевых поверхностях пластины $z = \pm h$ равны ($Bi^+ = Bi^- = Bi$).

В качестве исходного взято приближение порядка N трёхмерного уравнения теплопроводности. Изложение обоснования и методики сведения трёхмерного уравнения теплопроводности к конечной системе двумерных уравнений для случая конвективного теплообмена между поверхностями и средой приведены в монографии [8]. Вывод приближения порядка N уравнения теплопроводности содержится в статье [10]. В рамках данного приближения температура T представляется в виде ряда Фурье по полиномам Лежандра P_k от толщинной координаты [8]:

$$T(x, y, z) = \sum_{k=0}^N T_k P_k \left(\frac{z}{h} \right), \quad T_k = \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h T P_k \left(\frac{z}{h} \right) dz. \quad (1)$$

Коэффициенты разложения T_k удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений с частными производными в матрично-векторной форме [10]:

$$h^2 \Delta \vec{T} + A_N \vec{T} = -\vec{\theta}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2)$$

Здесь $\vec{T} = (T_0, T_1, \dots, T_N)^T$, $A_N = \|A_{km}\|$, $\vec{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N)^T$;

$$\theta_k = \frac{(2k+1)[\theta^+ + (-1)^k \theta^-] N_{\kappa k}^* Bi}{2(Bi + N_{\kappa 0}^*)}, \quad \kappa \equiv k \pmod{2}, \quad \kappa \in \{0; 1\}.$$

Элементы матрицы A_N

A_{km} при $k = 0, 2, \dots, N_0$	A_{km} при $k = 1, 3, \dots, N_1$
0 при $m = 1, 3, \dots, N_1$	0 при $m = 0, 2, \dots, N_0$
$(2k+1)\gamma_{0km}$ при $m = 0, 2, \dots, k$	$(2k+1)\gamma_{1km}$ при $m = 1, 3, \dots, k$
$(2k+1)\gamma_{0mk}$ при $m = k+2, k+4, \dots, N_0$	$(2k+1)\gamma_{1mk}$ при $m = k+2, k+4, \dots, N_1$

$$\gamma_{ikm} = \left(\frac{N_{im}^*}{Bi + N_{i0}^*} - 1 \right) N_{ik}^*, \quad N_{ik}^* = 0,5(N_i + k + 3)(N_i - k + 2),$$

где $N_0 = N$, $N_1 = N - 1$, если N чётное; $N_0 = N - 1$, $N_1 = N$, если N нечётное.

В случае теплопроницаемого разреза теплота распространяется только поперёк линии разреза. Поэтому граничные условия (ГУ) на линии разреза L с нормалью $\vec{n} = (n_1, n_2)$ в скалярной форме имеют вид [1]:

$$\lambda \left(\frac{\partial T_k}{\partial n} \right)^\pm - \lambda_n (T_k^+ - T_k^-) = 0 \quad (k = \overline{0, N}). \quad (3)$$

Здесь и в дальнейшем знаками «+» и «-» обозначены граничные значения функций в соответствии с выбранным направлением нормали \vec{n} ; λ – теплопроводность материала пластины; $\lambda_n = \lambda_c / \delta$ – коэффициент теплопроницаемости разреза, характеризующий его теплопроводность в поперечном направлении, λ_c – теплопроводность материала промежуточного слоя, расположенного между берегами разреза; δ – раскрытие разреза.

Перейдём в безразмерную систему координат $x_1 = x/h$, $x_2 = y/h$, $x_3 = z/h$, определённую с точностью до полутолщины пластины h , тогда приближение порядка N трёхмерного уравнения теплопроводности (2) запишется так:

$$\Delta \vec{T} + A_N \vec{T} = -\vec{\theta}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad (4)$$

а ГУ (3) на линии разреза L примут вид:

$$\left(\frac{\partial T_k}{\partial n} \right)^\pm - \beta(T_k^+ - T_k^-) = 0 \quad (k = \overline{0, N}), \quad \beta = \frac{\lambda^*}{\delta^*}, \quad (5)$$

где $\lambda^* = \lambda_c/\lambda$ – относительная теплопроводность промежуточного слоя; $\delta^* = \delta/h$ – раскрытие трещины в безразмерной системе координат.

Температурное поле в пластине с разрезом \vec{T}^* представим в виде суммы

$$\vec{T}^* = \vec{T}^o + \vec{T}, \quad (6)$$

где \vec{T}^o – вектор-столбец из компонент основного температурного поля (температуры в сплошной пластине); \vec{T} – вектор-столбец из компонент возмущённого температурного поля, вызванного наличием разреза.

Основное температурное поле определяется из уравнения (4), а для определения возмущённого температурного поля имеем такое уравнение:

$$\Delta \vec{T} + A_N \vec{T} = 0. \quad (7)$$

С учётом представлений (6) и ГУ (5) записываем условия для компонент возмущённого температурного поля на линии разреза L :

$$\left. \frac{\partial \vec{T}}{\partial n} \right|_L - \beta[\vec{T}] = - \left. \frac{\partial \vec{T}^o}{\partial n} \right|_L, \quad [\vec{T}] = ([T_0], [T_1], \dots, [T_N])^T, \quad (8)$$

где $[f] = f^+ - f^-$ – скачок функции f при переходе через линию L .

Предполагаем, что внешний граничный контур пластины находится на значительном удалении от линии разреза L . Возмущённое температурное поле на линии внешней границы считаем равным нулю.

Таким образом, приближение порядка N трёхмерного уравнения теплопроводности (7) с ГУ (8) и требованием убывания возмущённого температурного поля на бесконечности составляют краевую задачу теплопроводности для пластины с теплопроницаемым разрезом.

3. Сведение исходной задачи к системе независимых краевых задач для метагармонических уравнений. Как известно [10], матрица A_N представляет собой произведение двух матриц:

$$A_N = K_N L_N, \quad K_N = \text{diag}\{1, 3, \dots, 2N + 1\},$$

L_N – отрицательно определённая симметрическая матрица.

Введём в рассмотрение матрицу

$$B_N = -K_N^{1/2} L_N K_N^{1/2}, \quad K_N^{1/2} = \text{diag}\{1, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{2N+1}\}.$$

Заметим, что B_N – вещественная симметрическая матрица, следовательно, её характеристические корни вещественны [11]. Кроме того, B_N положительно определена, поэтому все её собственные значения положительны [11]. Обозначим собственные значения матрицы B_N через $\rho_0^2, \rho_1^2, \dots, \rho_N^2$. При этом справедливо

$$\begin{aligned} \det(A_N - \lambda E) &= \det K_N^{-1/2} \det(K_N L_N - \lambda E) \det K_N^{1/2} = \\ &= \det(K_N^{1/2} L_N K_N^{1/2} - \lambda E) = \det(-B_N - \lambda E), \quad K_N^{-1/2} = \left(K_N^{1/2}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что характеристические корни матрицы A_N равны характеристическим корням матрицы B_N , взятым со знаком «-», т.е. собственные значения матрицы A_N есть $-\rho_0^2, -\rho_1^2, \dots, -\rho_N^2$.

Пусть $\vec{i}_0, \vec{i}_1, \dots, \vec{i}_N$ – независимые вещественные собственные вектора единичной длины матрицы B_N , соответствующие собственным значениям $\rho_0^2, \rho_1^2, \dots, \rho_N^2$ (не обязательно различным). Введём в рассмотрение ортогональную матрицу $I_N = \|\vec{i}_0 \vec{i}_1 \dots \vec{i}_N\|^T$. Тогда справедливо соотношение [11]

$$I_N B_N I_N^T = P_N^2 = \text{diag}\{\rho_0^2, \rho_1^2, \dots, \rho_N^2\}. \quad (9)$$

В уравнении (7) сделаем замену переменных

$$\vec{T} = K_N^{1/2} I_N^T \vec{t}, \quad \vec{t} = (t_0, t_1, \dots, t_N)^T, \quad (10)$$

где $t_k = t_k(x_1, x_2)$ ($k = \overline{0, N}$) – новые искомые функции, тогда (7) примет вид:

$$K_N^{1/2} I_N^T \Delta \vec{t} + K_N L_N K_N^{1/2} I_N^T \vec{t} = 0.$$

Умножим это уравнение на матрицу $I_N K_N^{-1/2}$ слева и с учётом (9) получим

$$\Delta \vec{t} - P_N^2 \vec{t} = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) в скалярной форме записи имеет вид:

$$\Delta t_k - \rho_k^2 t_k = 0 \quad (k = \overline{0, N}). \quad (12)$$

Таким образом, получили систему из $(N+1)$ -го независимого уравнения относительно $(N+1)$ -й неизвестной функции t_k . Заметим, что каждое из уравнений (12) представляет собой однородное метагармоническое уравнение.

Делая замену (10) в ГУ (8) и умножая получившиеся соотношения на матрицу $I_N K_N^{-1/2}$ слева, получим ГУ для уравнения (11) в виде:

$$\left. \frac{\partial \vec{t}}{\partial n} \right|_L - \beta [\vec{t}] = \vec{g}|_L, \quad \vec{g} = -I_N K_N^{-1/2} \frac{\partial \vec{T}^o}{\partial n}. \quad (13)$$

4. Построение интегральных представлений решений метагармонических уравнений. Методика решения краевой задачи (11), (13) основана на применении двумерного интегрального преобразования Фурье к исходным уравнениям с учётом разрывного характера функций на линии L [12].

Компоненты температуры T_k (а, значит, и искомые функции t_k) имеют разрывы первого рода на линии разреза L [1, 2, 12]. Поэтому их дифференцирование рассматривается с точки зрения теории обобщённых функций [13]. Производные в обобщённом смысле от функций t_k определяются соотношениями:

$$\frac{\partial t_k}{\partial x_j} = \left\{ \frac{\partial t_k}{\partial x_j} \right\}^{\kappa} + n_j \delta_L [t_k], \quad \frac{\partial^2 t_k}{\partial x_j^2} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial t_k}{\partial x_j} \right) \right\}^{\kappa} + n_j \delta_L \left[\frac{\partial t_k}{\partial x_j} \right] \quad (j = 1, 2),$$

где $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\}^{\kappa}$ – классическая производная функции f , δ_L – двумерная дельта-функция Дирака, сосредоточенная на линии L :

$$(\delta_L, f(x_1, x_2)) = \int_L f(x'_1, x'_2) dL, \quad \vec{x}' = (x'_1, x'_2) \in L.$$

Трансформанты производных в обобщённом смысле от функций t_k для двумерного интегрального преобразования Фурье равны [12]:

$$F \left[\frac{\partial t_k}{\partial x_j} \right] = (-i \xi_j) \tilde{t}_k + \frac{1}{2\pi} \int_L n_j [t_k] \exp i(\vec{\xi}, \vec{x}') dL \quad (j = 1, 2),$$

где $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ – координаты текущей точки в пространстве трансформант.

Из ГУ (5) следует, что для теплопроницаемого (и теплоизолированного) разреза $[\partial t_k / \partial n] = 0$. Поэтому трансформанта оператора Лапласа имеет вид:

$$F[\Delta t_k] = -p^2 \tilde{t}_k - D(t_k), \quad p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad (14)$$

$$D(t_k) = \frac{i}{2\pi} \int_L (\xi_1 n_1 + \xi_2 n_2) [t_k] \exp i(\vec{\xi}, \vec{x}') dL.$$

Применим преобразование Фурье (14) к уравнениям (12):

$$(p^2 + \rho_k^2) \tilde{t}_k = -D(t_k) \quad (k = \overline{0, N}). \quad (15)$$

Решая каждое из уравнений (15) относительно \tilde{t}_k , получим

$$\tilde{t}_k = \frac{1}{2\pi} \int_L \tilde{B}_k(\xi_1, \xi_2) [t_k] \exp i(\vec{\xi}, \vec{x}') dL, \quad \tilde{B}_k = -i \frac{\xi_1 n_1 + \xi_2 n_2}{p^2 + \rho_k^2} \quad (k = \overline{0, N}).$$

Оригиналы искомых функций $t_k(x_1, x_2)$ ($k = \overline{0, N}$) найдём с помощью формулы обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье. Имеем

$$B_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_1 n_1 + \xi_2 n_2}{p^2 + \rho_k^2} \exp \{-i(\xi_1 \bar{x}_1 + \xi_2 \bar{x}_2)\} d\xi_1 d\xi_2 \quad (k = \overline{0, N}),$$

где обозначено $\bar{x}_1 = x_1 - x'_1$, $\bar{x}_2 = x_2 - x'_2$.

Выделяя в интегралах чётные и нечётные части, представим ядра B_k в виде:

$$B_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = -\frac{2}{\pi} \{n_1 \Psi_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + n_2 \Psi_k(\bar{x}_2, \bar{x}_1)\} \quad (k = \overline{0, N}), \quad (16)$$

$$\Psi_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\xi_1}{\rho^2 + \rho_k^2} \sin \xi_1 \bar{x}_1 \cos \xi_2 \bar{x}_2 d\xi_1 d\xi_2 \quad (k = \overline{0, N}). \quad (17)$$

Перейдём в интегралах (17) к полярным координатам по формулам:

$$\bar{x}_1 = r \cos \varphi, \quad \bar{x}_2 = r \sin \varphi, \quad \xi_1 = \rho \cos \theta, \quad \xi_2 = \rho \sin \theta,$$

тогда Ψ_k примут вид

$$\Psi_k = \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^\infty \frac{\rho^2 Y}{\rho^2 + \rho_k^2} d\rho.$$

Здесь согласно разложению Якоби–Ангера [14]

$$\begin{aligned} Y &= \sin(r\rho \cos \varphi \cos \theta) \cos(r\rho \sin \varphi \sin \theta) = \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(r\rho) \cos(2n+1)\varphi \cos(2n+1)\theta, \end{aligned}$$

где $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν .

Получаем, что интегралы (17) равны

$$\Psi_k = \frac{\pi}{2} \cos \varphi \left\{ \int_0^\infty J_1(r\rho) d\rho - \rho_k^2 \int_0^\infty \frac{J_1(r\rho)}{\rho^2 + \rho_k^2} d\rho \right\} \quad (k = \overline{0, N}). \quad (18)$$

Значение первых интегралов в правых частях (18) равно $1/r$. Используя интегральное представление специальной G -функции [14]

$$G_{n,\nu}(rz) = (-1)^n \left(\frac{r}{2}\right)^{\nu-n} \int_0^\infty \frac{\rho^{\nu-n+1} J_{\nu+n}(r\rho)}{\rho^2 + z^2} d\rho,$$

получим выражения для остальных интегралов, входящих в (18):

$$\Psi_k = \frac{\pi}{2} \cos \varphi \left\{ \frac{1}{r} + \frac{\rho_k^2 r}{2} G_{1,0}(\rho_k r) \right\} \quad (k = \overline{0, N}). \quad (19)$$

Подставляя (19) в соотношения (16), получим такие выражения для ядер B_k :

$$B_k = -n_0 \left\{ \frac{1}{r} + \frac{\rho_k^2 r}{2} G_{1,0}(\rho_k r) \right\} \quad (k = \overline{0, N}), \quad (20)$$

где $n_0 = n_1 \cos \varphi + n_2 \sin \varphi$.

Таким образом, интегральные представления искомых функций t_k имеют вид

$$t_k(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_L B_k(\bar{x}_1, \bar{x}_2)[t_k] dL \quad (k = \overline{0, N}). \quad (21)$$

5. Сведение задачи к системе независимых сингулярных интегральных уравнений (СИУ) относительно новых искомых функций. Рассмотрим прямолинейный теплопроницаемый разрез длины $2l$, расположенный вдоль оси абсцисс симметрично относительно начала координат:

$$L = \{(x_1, x_2) \in R^2 : |x_1| \leq l, x_2 = 0\}. \quad (22)$$

Сделаем замену переменных $x'_1 = ls, x_1 = l\zeta$ в представлениях (21):

$$t_k(l\zeta, x_2) = -\frac{l}{2\pi} \int_{-1}^1 B_k(l(\zeta - s), x_2)[t_k] ds \quad (k = \overline{0, N}). \quad (23)$$

В соотношениях (23) согласно (20) ядра записываются так:

$$B_k = -x_2 \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{\rho_k^2}{2} G_{1,0}(\rho_k r) \right\} \quad (k = \overline{0, N}), \quad r = \sqrt{l^2(\zeta - s)^2 + x_2^2}.$$

Функции t_k должны удовлетворять ГУ (13). Подставляя интегральные представления (23) в условия (13), найдём

$$-\beta_n[t_k] + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 L_k(\zeta - s)[t_k] ds = h_k(\zeta) \quad (k = \overline{0, N}), \quad (24)$$

где $\beta_n = l\beta$ – параметр теплопроницаемости разреза; $h_k(\zeta) = lg_k(l\zeta, 0)$;

$$L_k(\zeta - s) = \frac{1}{(\zeta - s)^2} + \frac{l^2 \rho_k^2}{2} G_{1,0}(l\rho_k|\zeta - s|) \quad (k = \overline{0, N}).$$

Применим к интегралам, входящим в левые части (24), формулу интегрирования по частям, полагая $u = [t_k]$, $dv = L_k(\zeta - s)ds$. При этом учтём свойство скачков искомых функций t_k , которое следует из их непрерывности на концах линии разреза L

$$[t_k]|_{\pm 1} = 0 \quad (k = \overline{0, N}). \quad (25)$$

В результате получим разрешающую систему СИУ задачи (11), (13):

$$-\beta_n[t_k] + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_k(s)}{s - \zeta} ds + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 D_k(\zeta - s)\psi_k(s) ds = lg_k(\zeta) \quad (k = \overline{0, N}), \quad (26)$$

$$\psi_k(s) = \frac{d[t_k]}{ds}, \quad D_k(\zeta - s) = \frac{l\rho_k}{2} \text{sign}(\zeta - s) IG_{1,0}(l\rho_k|\zeta - s|) \quad (k = \overline{0, N}),$$

$$IG_{n,\nu}(z) = \int_0^z G_{n,\nu}(t) dt.$$

Каждое из уравнений системы (26) представляет собой СИУ типа Коши второго рода. Для функций $\psi_k(s)$ с учётом (25) должны выполняться условия:

$$\int_{-1}^1 \psi_k(s) ds = 0 \quad (k = \overline{0, N}).$$

После определения функций $\psi_k(s)$ скачки $[t_k]$ находятся по формулам

$$[t_k] = \int_{-1}^{\zeta} \psi_k(t) dt \quad (k = \overline{0, N}),$$

а неизвестные функции t_k – из интегральных представлений (23). Компоненты возмущённой температуры T_k определяются по формуле (10), а возмущённое температурное поле в произвольной точке пластины – из разложения T в ряд Фурье по полиномам Лежандра (1).

6. Анализ результатов численных исследований. Для теплопроницаемого разреза исследована зависимость величины возмущённого температурного поля от теплофизических параметров пластины и разреза. Результаты расчётов представлены на рис. 1, 2.

Расчёты выполнены для изотропной пластины в случае симметричного теплообмена. Основное температурное поле имеет вид:

$$\left. \frac{\partial T_k^o}{\partial x_2} \right|_L = 1^\circ C \quad (k = 0, 1); \quad \left. \frac{\partial T_k^o}{\partial x_2} \right|_L = 0 \quad (k = \overline{2, N}).$$

Рассмотрены разрезы (22) средней длины ($l = 10$). На рис. 1 построены графики зависимости скачков компонент температуры $[T_0]$ и $[T_1]$ в середине разреза от параметра теплообмена Bi . На рис. 2 приведены аналогичные графики скачков $[T_2]$ и $[T_3]$ для температуры в третьем приближении ($N = 3$). Кривые 1, 2, 3, 4 на рис. 1, 2 соответствуют значениям параметра теплопроницаемости разреза β_n : 0 (теплоизолированный разрез); 0,5; 2; 5.

Сплошные линии на рис. 1 отвечают приближениям $N = 1$ и $N = 3$ трёхмерного уравнения теплопроводности (кривые совпадают). Приближение $N = 5$ не рассматривалось, поскольку в работе [9] было показано, что использование пятого приближения уравнения теплопроводности вместо третьего не вносит уточнения в расчёт возмущённого температурного поля.

Достоверность результатов подтверждается сравнением со скачками температуры, найденной из уравнений теплопроводности, полученных операторным методом

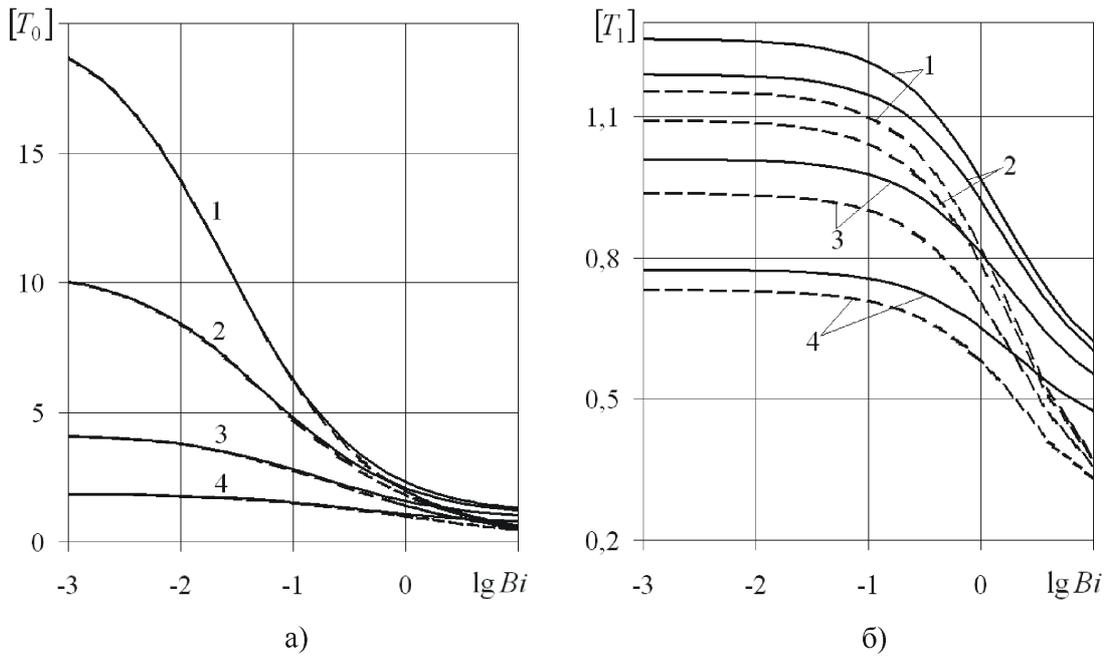


Рис. 1. Влияние теплопроницаемости разреза и параметра теплообмена на скачки T_0 и T_1

[15]. При этом предполагалось линейное распределение температуры по толщине: $T = T_c + x_3 T_m$, где T_c – средняя температура, T_m – температурный момент. Штриховыми линиями на рис. 1а, б показаны скачки $[T_c]$ и $[T_m]$, соответственно.

По результатам расчёта температуры определена относительная погрешность для значений температуры, найденных из первого приближения уравнения теплопроводности. Она составляет около 0,03% при $Bi = 10^{-3}$ и с ростом критерия Био на порядок – также увеличивается на порядок.

Из рис. 1а видно, что скачок компоненты температуры $[T_0]$ практически совпадает со скачком средней температуры $[T_c]$. В то же время для расчёта второй составляющей в представлении температуры целесообразно использовать первое приближение ($N = 1$) уравнения теплопроводности на базе обобщённой теории вместо уравнений, приведённых в [15].

Из рис. 2 видно, что скачки $[T_2]$ и $[T_3]$ существенно увеличиваются по абсолютной величине с возрастанием теплообмена с внешней средой. Следовательно, они значительно влияют на величину возмущённой температуры, особенно при больших значениях Bi . Поэтому использование приближения $N = 3$ вместо приближения $N = 1$ трёхмерного уравнения теплопроводности вносит существенное уточнение в расчёт возмущённого температурного поля в изотропной пластине с теплопроницаемым разрезом.

Из графиков на рис. 1 следует, что величина возмущённого температурного поля уменьшается с увеличением параметра теплопроницаемости разреза и теплообмена с внешней средой.

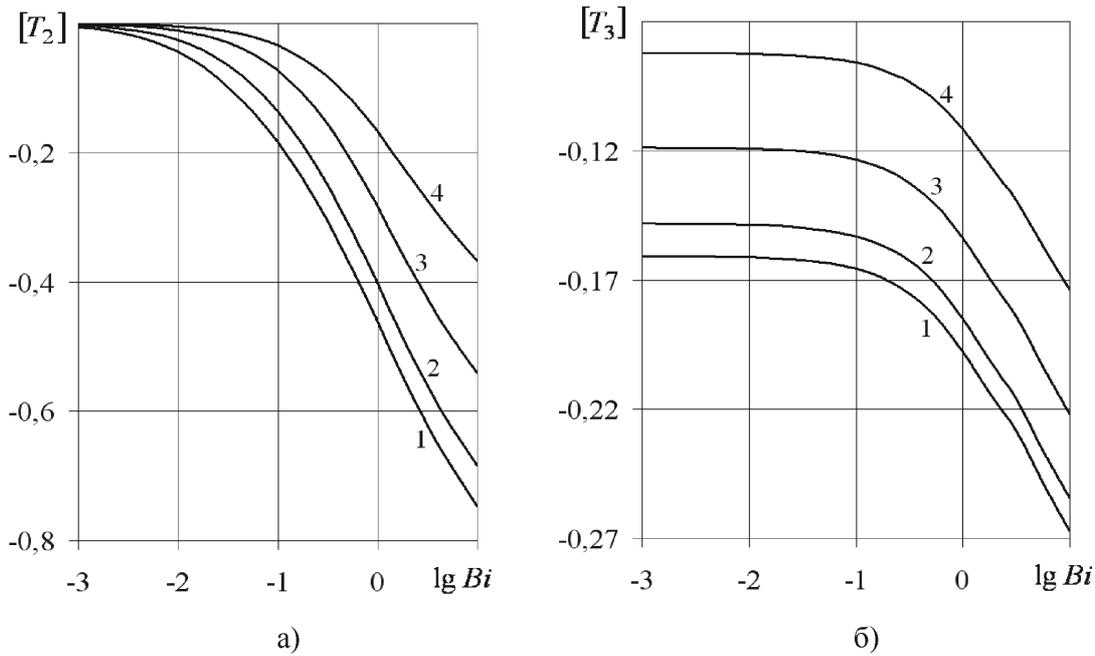


Рис. 2. Влияние теплопроницаемости разреза и параметра теплообмена на скачки T_2 и T_3

7. Выводы. На величину возмущённого температурного поля в изотропных пластинах с разрезами существенно влияет как теплопроницаемость разреза, так и интенсивность теплообмена при его симметричном характере. Возрастание любого из этих параметров приводит к убыванию возмущённой температуры. Аналогичная зависимость будет наблюдаться и для температурных коэффициентов интенсивности напряжений. Поэтому при решении задач механики разрушения для пластинчатых элементов конструкций при температурном нагружении необходимо учитывать теплофизические параметры пластин и трещин.

1. Кит Г.С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г.С. Кит, М.Г. Кривцун. – К.: Наук. думка, 1984. – 280 с.
2. Панасюк В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацшин. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
3. Кит Г.С. Вплив джерела тепла на напружений стан тіла з теплоізолюваною круговою тріщиною / Г.С. Кит, О.П. Сушко // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2011. – Вип. 9. – С. 111–121.
4. Сушко О.П. Термопружний стан тіла з двома компланарними теплоактивними круговими тріщинами / О.П. Сушко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – 55, № 1. – С. 84–94.
5. Опанасович В.К. Термопружний стан пластини з теплоізолюваними дуговими тріщинами уздовж кола з урахуванням повного гладкого контакту їх берегів / В.К. Опанасович, Н.М. Басса // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2011. – Вип. 9. – С. 164–174.
6. Ueda S. Thermoelctromechanical interaction between two parallel cracks in a piezoelectric strip / S. Ueda, K. Ikawa // J. Therm. Stresses. – 2008. – 31, No. 4. – P. 311–330.
7. Ueda S. Thermal stress intensity factors for two complanar cracks in a piezoelectric strip / S. Ueda, Y. Tani // J. Therm. Stresses. – 2008. – 31, No. 5. – P. 403–415.

8. *Пелех Б.Л.* Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек / Б.Л. Пелех, М.А. Сухорольский. – К.: Наук. думка, 1980. – 216 с.
9. *Бондаренко Н.С.* Использование обобщенной теории в задачах теплопроводности для изотропных пластин с теплоизолированным разрезом / Н.С. Бондаренко, А.С. Гольцев // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. – 2012. – Вип. 1. – С. 26–32.
10. *Bondarenko N.S.* Solution of the heat conduction problem for anisotropic plates under concentrated thermal loading using legendre polynomials / N.S. Bondarenko, A.S. Gol'tsev // Journal of Mathematical Sciences. – 2011. – Vol. 174, No. 3. – P. 400–414.
11. *Ланкастер П.* Теория матриц / П. Ланкастер. – М.: Наука, 1980. – 280 с.
12. *Шевченко В.П.* Задачи термоупругости тонких оболочек с разрезами: учебное пособие / В.П. Шевченко, А.С. Гольцев. – К.: УМК ВО, 1988. – 84 с.
13. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1967. – 436 с.
14. *Хижняк В.К.* Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учебное пособие / В.К. Хижняк, В.П. Шевченко. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.
15. *Подстригач Я.С.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.

N. S. Bondarenko

The heat conduction problem for an isotropic plate with a heat-permeable cut.

The problem of heat conduction for an isotropic plate with a heat-permeable cut based on the generalized theory is reduced to a system of independent boundary value problems for metaharmonic equations. The case of symmetric heat exchange is considered. The influence of parameters of heat exchange and heat permeability of the cut on the jumps of components for the perturbed temperature is investigated.

Keywords: *isotropic plate, heat-permeable cut, generalized theory, metaharmonic equation, Fourier transformation.*

Н. С. Бондаренко

Задача теплопровідності для ізотропної пластини з теплопроникним розрізом на базі узагальненої теорії за симетричного теплообміну.

Задача теплопровідності для ізотропної пластини з теплопроникним розрізом на базі узагальненої теорії зведена до системи незалежних крайових задач для метагармонічних рівнянь. Розглянуто випадок симетричного теплообміну. Досліджено вплив параметрів теплообміну і теплопроникності розрізу на величину стрибків компонент збуреної температури.

Ключові слова: *ізотропна пластинка, теплопроникний розріз, узагальнена теорія, метагармонічне рівняння, перетворення Фур'є.*

Донецкий национальный ун-т
bondarenko_n_s@mail.ru

Получено 19.12.13