

УДК 629.7:533.6.001

©2013. Б. И. Басок, А. А. Авраменко, В. В. Гоцуленко, В. Н. Гоцуленко

**БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ АВТОКОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ
В ГИДРОСИСТЕМЕ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Для гидросистемы с сосредоточенными параметрами, включающей лопастной насос, работающий в режиме кавитации, теоретически проведен анализ возможных динамических режимов ее функционирования. Рассматривая волновое сопротивление и стационарный расход жидкости через колебательный контур гидросистемы как бифуркационные параметры, определены локальные и глобальные бифуркации в рассматриваемой задаче. В частности, теоретически доказана возможность бистабильности, а также самовозбуждение автоколебаний, или их жесткий режим возбуждения.

Ключевые слова: автоколебания, бифуркации, волновое сопротивление, гидросистема, лопастной нагнетатель, кавитация.

1. Введение. Известно [1, 2], что причиной возбуждения автоколебаний (помпажа) лопастных насосов в бескавитационном режиме, а также лопастных компрессорных нагнетателей, является наличие восходящей ветви или петли гистерезиса на соответствующей напорной характеристике нагнетателя. При лабораторных испытаниях лопастных насосов в режиме кавитации, перед срывом подачи самовозбуждаются автоколебания [3], природа которых оставалась неизвестной. В таких же условиях осуществляется работа шнеко-центробежных насосов малых ресурсов [4], давление на входе которых выбирается близким к срывному, где наблюдаются периодические неустойчивые режимы [5], обладающие значительными амплитудами.

В [6] было экспериментально установлено, что причина неустойчивости при перемещении газожидкостных смесей состоит в образовании восходящей ветви на неразветвленной напорной характеристике шнека, из-за которой могут возбуждаться автоколебания (помпаж), несмотря на монотонно убывающий характер напорной характеристики шнеко-центробежного насоса в целом.

Отметим, что потеря устойчивости стационарного режима работы лопастного насоса в кавитационном режиме может быть как мягкой, так и жесткой. При этом в дальнейшем может произойти либо полностью срыв подачи расхода жидкости, или же выход работы гидросистемы на автоколебательный режим.

С практической точки зрения для реализации эффективных способов стабилизации стационарного режима необходимо предварительно провести полный теоретический анализ всех возможных как локальных, так и глобальных бифуркаций при варьировании параметров гидросистемы.

В [7] было теоретически подтверждено, что перед срывом подачи центробежного насоса в области восходящих кавитационных разветвлений его монотонно убывающей напорной характеристики возникают автоколебания, имеющие природу помпажа. Также в [7] была получена математическая модель данных автоколебаний в гидросистеме (рис. 1) с сосредоточенными параметрами.

В этой работе проводится дальнейший анализ данной математической модели.

В частности, исследуется характер возбуждения автоколебаний при варьировании волнового сопротивления колебательного контура гидросистемы (рис. 1) или стационарного расхода жидкости через нее.

2. Формализация математической модели. Для реализации неустойчивой работы центробежного насоса в кавитационном режиме рассмотрим замкнутую гидросистему, схема которой приведена на рис. 1. Автоколебания в рассматриваемой гидросистеме описываются периодическими решениями системы нелинейных уравнений теории помпажа [2], которые с учетом разветвления напорной характеристики могут быть представлены в следующем виде [7]:

$$\frac{L_a}{\rho g} \frac{dQ}{dt} = H(Q, \Delta h) - R(Q) - P, \quad \rho g C_a \frac{dP}{dt} = Q - \varphi(P), \quad (1)$$

где L_a – акустическая масса колебательного контура гидросистемы, C_a – его акустическая гибкость, ρ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести, $\varphi(P)$ – расход воды, выходящий из аккумулирующей емкости колебательного контура системы, обращение этой функции $h_c(Q)$ представляет гидравлические потери в подключенной магистрали к колебательному контуру гидросистемы. Гидравлическими потерями в трубопроводах колебательного контура $R(Q)$ пренебрегаем в виду их незначительности [7].

В емкости подводящей магистрали вакуумный насос создает постоянное давление $p_e = \text{const}$. При последовательном изменении величины p_e как в сторону его увеличения, так и в сторону его уменьшения, получается однозначная зависимость величины кавитационного запаса от расхода $\Delta h = \psi(Q)$ [8]. Эта зависимость позволяет в области разветвлений $H(Q, \Delta h)$ определить рабочий участок напорной характеристики $H(Q) = H[Q, \psi(Q)]$, который является однозначной зависимостью от расхода Q .

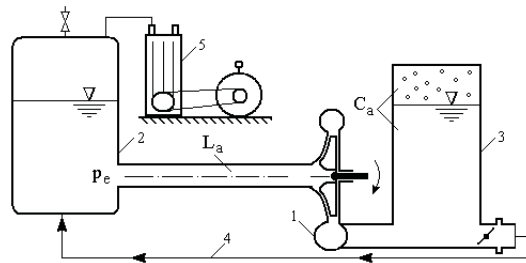


Рис. 1. Схема гидросистемы с сосредоточенными параметрами: 1 – центробежный насос; 2 – емкость на входе в колебательный контур; 3 – емкость на его выходе; 4 – подключенная магистраль; 5 – вакуумный насос

Функции $H(Q)$ и $\varphi(P)$, исходя из их определения, аппроксимируются следующими выражениями [9]:

$$H(Q) = \eta - \left[\frac{k_1 \varepsilon}{(Q - Q_0)^\varepsilon} + k_2 \varepsilon (Q - Q_0)^\nu \right] + k_3 \varepsilon (Q - \xi)^\mu, \quad \varphi(P) = \xi \left(\frac{P}{\eta} \right)^a, \quad (2)$$

где $\eta > 0$, $\nu > \mu \geq 1$, $k_i > 0$ ($i = \overline{1; 3}$), $\varepsilon \geq 0$, $0 < Q_0 < \xi$, $a > 0$.

Таким образом, окончательно математическая модель с сосредоточенными параметрами рассматриваемой задачи сводится к следующей динамической системе:

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha (H(Q) - P), \quad \frac{dP}{dt} = \beta (Q - \varphi(P)), \quad (3)$$

где $\alpha = \rho g L_a^{-1}$, $\beta = (\rho g C_a)^{-1}$.

3. Доказательство существования автоколебаний. Покажем, что в системе (3) при определенных значениях параметров возможны предельные циклы, определяющие режим периодических автоколебаний. Будем предполагать, что $a = a_0 \varepsilon + O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $a_0 \geq 0$.

В дальнейшем удобно в системе (3) перейти к новым безразмерным переменным, полагая

$$X = \sqrt{\beta}(Q - \xi), \quad Y = \sqrt{\alpha}(P - \eta), \quad \tau = \omega_0 t, \quad \text{где } \omega_0 = \sqrt{\alpha\beta}. \quad (4)$$

В переменных (4) динамическая система (3) запишется в следующем виде:

$$\frac{dX}{d\tau} = -Y + \sqrt{\alpha} \left[H \left(\xi + \frac{X}{\sqrt{\beta}} \right) - \eta \right], \quad \frac{dY}{d\tau} = X + \sqrt{\beta} \left[\xi - \varphi \left(\eta + \frac{Y}{\sqrt{\alpha}} \right) \right]. \quad (5)$$

При $\varepsilon = 0$ система (5) является консервативной. Известно, что определенными возмущениями консервативную систему можно превратить в автоколебательную, причем предельный цикл которой будет близким к одной из замкнутых фазовых траекторий исходной невозмущенной консервативной системы. В этом отношении имеет место следующий результат [10, 11]

Теорема. При $\varepsilon \rightarrow 0$ рассматривается следующая динамическая система:

$$\frac{dx}{dt} = -y + \varepsilon f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = x + \varepsilon f_2(x, y).$$

Положим $\ell_A = \{(x, y) : x = A \cos(t), y = A \sin(t), 0 \leq t < 2\pi\}$, ℓ_A – окружность с центром в начале координат и радиусом A . Пусть также $F(A) = \oint_{\ell_A} f_1(x, y) dy - f_2(x, y) dx$. Тогда если функция $F(A)$ имеет простой положительный корень A^* , то при малых $\varepsilon > 0$ рассматриваемая система имеет предельный цикл $\Gamma_\varepsilon \simeq \ell_{A^*}$, устойчивый при $\frac{dF}{dA}|_{A=A^*} < 0$ и неустойчивый, если $\frac{dF}{dA}|_{A=A^*} > 0$.

Несложно проверить, что с точностью до величин порядка $O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место равенства:

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha} \left[H \left(\xi + \frac{X}{\sqrt{\beta}} \right) - \eta \right] &= \varepsilon \sqrt{\frac{\alpha}{\beta^\mu}} \left[k_3 X^\mu - k_2 \left(\xi + \frac{X}{\sqrt{\beta}} - x_0 \right)^\nu - k_1 \right] + O(\varepsilon^2), \\ \sqrt{\beta} \left[\xi - \varphi \left(\eta + \frac{Y}{\sqrt{\alpha}} \right) \right] &= \xi \sqrt{\beta} \left[1 - \left(1 + \frac{Y}{\sqrt{\alpha}(\eta - H_0)} \right)^a \right] = \\ &= -\varepsilon a_0 \xi \sqrt{\beta} \ln \left(1 + \frac{Y}{\sqrt{\alpha}(\eta - H_0)} \right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

В рассматриваемой задаче

$$f_1(X, Y) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta^\mu}} \left[k_3 X^\mu - k_2 \left(\xi + \frac{X}{\sqrt{\beta}} - x_0 \right)^\nu - k_1 \right], \quad (6)$$

$$f_2(X, Y) = -a_0 \xi \sqrt{\beta} \ln \left(1 + \frac{Y}{\sqrt{\alpha}(\eta - H_0)} \right).$$

Таким образом, согласно (6), для системы (5) получаем

$$\begin{aligned} F(A) &= \oint_{\ell_A} f_1(X, Y) dY - f_2(X, Y) dX = \\ &= \oint_{\ell_A} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta^\mu}} \left[k_3 X^\mu - k_2 \left(\xi + \frac{X}{\sqrt{\beta}} - x_0 \right)^\nu - k_1 \right] dY + a_0 \xi \sqrt{\beta} \ln \left(1 + \frac{Y}{\sqrt{\alpha}(\eta - H_0)} \right) dX. \end{aligned} \quad (7)$$

Для вычисления криволинейного интеграла (7) нам понадобится следующее предварительное соотношение: $\forall p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$I_p = \int_0^{2\pi} \cos^p(t) dt = 2\sqrt{\pi} \frac{(-1)^p + 1}{p} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}, \quad (8)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма функция Эйлера. С учетом соотношения (8), получаем

$$\begin{aligned} \oint_{\ell_A} f_1(X, Y) dY &= \sqrt{\frac{\alpha}{\beta^\mu}} A \left[k_3 A^\mu I_{\mu+1} - k_2 \int_0^{2\pi} \cos(t) \left(\xi - x_0 + \frac{A}{\sqrt{\beta}} \cos(t) \right)^\nu dt \right] = \\ &= k_3 I_{\mu+1} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta^\mu}} A^{\mu+1} - k_2 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta^\mu}} A \sum_{k=0}^{\nu} (\xi - x_0)^{\nu-k} I_{k+1} \frac{A^k}{\sqrt{\beta^k}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \oint_{\ell_A} f_2(X, Y) dX &= -a_0 \xi \sqrt{\beta} \oint_{\ell_A} \ln \left(1 + \frac{Y}{\sqrt{\alpha}(\eta - H_0)} \right) dX = \\ &= 2\pi a_0 \omega_0 \xi (\eta - H_0) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{A^2}{\alpha(\eta - H_0)^2}} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом полученных соотношений (9)–(10), выражение для функции $F(A)$ в рассматриваемой задаче, можно окончательно записать в форме

$$F(A) = q_1 A^{\mu+1} - q_2 A \sum_{k=0}^{\nu} q_{3,k} A^k - q_4 \left(1 - \sqrt{1 - q_5 A^2} \right), \quad (11)$$

где $q_1 = k_3 I_{\mu+1} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta^\mu}}$, $q_2 = k_2 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta^\mu}}$, $q_{3,k} = I_{k+1} \frac{(\xi-x_0)^{\nu-k}}{\sqrt{\beta^k}}$ ($k = \overline{0; \nu}$), $q_4 = 2\pi a_0 \omega_0 \xi (\eta - H_0)$, $q_5 = \frac{1}{\alpha(\eta - H_0)^2}$.

Доказательство существования в общем случае у функции (11) положительных корней отдельная достаточно сложная задача. Однако, в случае $\mu = 1$ доказательство можно получить элементарными средствами. Несложно проверить, что достаточным условием существования положительного корня у функции (11) при $\mu = 1$ является выполнение следующих неравенств:

$$q_1 - q_2 q_{3,1} - \frac{1}{2} q_4 q_5 > 0, \quad q_1 - q_2 \sum_{k=0}^{\nu} q_{3,k} q_5^{\frac{\mu-k}{2}} \leq q_5^{\frac{\mu+1}{2}}. \quad (12)$$

Действительно, при $A \rightarrow +0$ справедливо асимптотическое разложение

$$F(A) = \left(q_1 - q_2 q_{3,1} - \frac{1}{2} q_4 q_5 \right) A^2 + O(A^4),$$

откуда с помощью первого неравенства (12) получается, что $F(A) > 0$ при $A \rightarrow +0$. Далее, с помощью второго неравенства (12) легко проверяется, что $F\left(\frac{1}{\sqrt{q_5}}\right) \leq 0$, и следовательно, из теоремы Больцано–Коши о промежуточном значении непрерывной функции вытекает существование положительного корня $0 < A^* \leq \frac{1}{\sqrt{q_5}}$ у функции (11). Также непосредственной проверкой устанавливается, что $\left. \frac{dF}{dA} \right|_{A=A^*} > 0$, т.е. предельный цикл $\Gamma_\varepsilon \simeq \ell_{A^*}$ является неустойчивым. Дальнейший, однако уже численный, анализ показывает, что при варьировании коэффициентов системы (3) у функции $F(A)$ появляется второй корень. Полная картина возможных перестроек фазового портрета системы (3) приведена в следующем разделе.

4. Анализ локальных и глобальных бифуркаций при изменении волнового сопротивления гидросистемы. При варьировании параметров рассматриваемой динамической системы (3) ее фазовый портрет претерпевает ряд как локальных, так и глобальных бифуркаций, в частности связанных с рождением гомоклинической кривой. Рассмотрим данные бифуркации более подробно. Прежде всего, отметим, что система (3) имеет два положения равновесия: $O_1(\xi, \eta)$ – фокус и $O_2(\xi_0, H(\xi_0))$ – седловая особая точка, где $x_0 < \xi_0 \leq \xi$. Будем рассматривать волновое сопротивление [7] $Z = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ как бифуркационный параметр. При достаточно большом значении Z система (3) имеет две особые траектории (рис. 2а): сепаратрисы K_1 седла O_2 , которая является его устойчивым инвариантным многообразием, и гетероклиническую кривую K_2 , асимптотически приближающуюся при $t \rightarrow +\infty$ к фокусу O_1 , а при $t \rightarrow -\infty$ – к седлу O_2 . В этом случае система (3) имеет единственный аттрактор – устойчивый фокус O_1 .

С уменьшением величины Z , при некотором первом бифуркационном его значении $Z = Z_1$ возникает гомоклиническая кривая K_3 , являющаяся петлей сепаратрисы седла O_2 . При этом фокус O_1 остается аттрактором с областью притяжения ограниченной гомоклинической кривой K_3 (рис. 2б). В точке бифуркации $Z = Z_1$ фазовый

портрет является негрубым (структурно неустойчивым) и при дальнейшем уменьшении $Z < Z_1$, гомоклиническая кривая разрушается (рис. 2с) и из нее рождается неустойчивый предельный цикл Γ_1 .

До сих пор бифуркации были глобальными, связанными с качественной топологической перестройкой всего фазового портрета системы (3). Однако при дальнейшем снижении Z возникают также следующие локальные бифуркации. При некотором значении $Z = Z_2$ фокус O_1 становится неустойчивым и от него ответвляется устойчивый предельный цикл Γ_2 (рис. 2д). Эта бифуркация является локальной, и представляет собой суперкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа [12, 13]. Действительно, матрица линеаризации системы (5) в нуле координат имеет следующую пару комплексно сопряженных собственных значений:

$$\lambda_{1,2}(Z) = \frac{1}{2} \left(\frac{H'(\xi)}{Z} - \varphi'(\eta) Z \right) \pm i \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{H'(\xi)}{Z} + \varphi'(\eta) Z \right)^2}, \quad (13)$$

откуда для бифуркационного значения $Z = Z_2$, определяемого условием $\text{Re}[\lambda_{1,2}(Z)]|_{Z=Z_2} = 0$, получается выражение $Z_2 = \sqrt{\frac{H'(\xi)}{\varphi'(\eta)}}$, причем

$$\frac{\partial}{\partial Z} \text{Re}[\lambda_{1,2}(Z)]|_{Z=Z_2} = -\varphi'(\eta) \neq 0, \quad \text{Im}[\lambda_{1,2}(Z)]|_{Z=Z_2} = \pm \sqrt{1 - H'(\xi) \varphi'(\eta)} \neq 0.$$

Размеры рождаемого предельного цикла Γ_2 при этом определяются по порядку как корень квадратный из надкритичности, т.е. имеет место асимптотика:

$$\text{Amplitude}(\Gamma_2) = \text{Const} \left| Z - \sqrt{\frac{H'(\xi)}{\varphi'(\eta)}} \right|^{\frac{1}{2}} (1 + o(1)) \text{ при } Z \rightarrow Z_2.$$

Вблизи точки бифуркации (при $Z > Z_2$) период автоколебаний, определяемых предельным циклом Γ_2 , не зависит от величины надкритичности $|Z - Z_2|$, и при этом справедливо асимптотическое разложение

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - H'(\xi) \varphi'(\eta)}} + o(1) \text{ при } Z \rightarrow Z_2.$$

При дальнейшем уменьшении Z циклы Γ_1 и Γ_2 притягиваются друг к другу, и при некотором значении $Z = Z_3$ происходит бифуркация слияния устойчивого Γ_2 и неустойчивого Γ_1 циклов. В точке бифуркации (т.е. при $Z = Z_3$) возникает двойной (полуустойчивый) предельный цикл Γ_3 [13–14] (рис. 2е). При $Z < Z_3$ цикл Γ_3 разрушается, фокус O_1 становится репеллером и система (3) аттракторов не имеет (рис. 2ф).

5. Бифуркация рождения цикла при варьировании стационарного расхода жидкости. В этом случае параметр ξ рассматривается как бифуркационный. Стационарный режим работы гидросистемы (рис. 1) определяется устойчивым фокусом O_1 динамической системы (3). При снижении величины ξ расхода жидкости

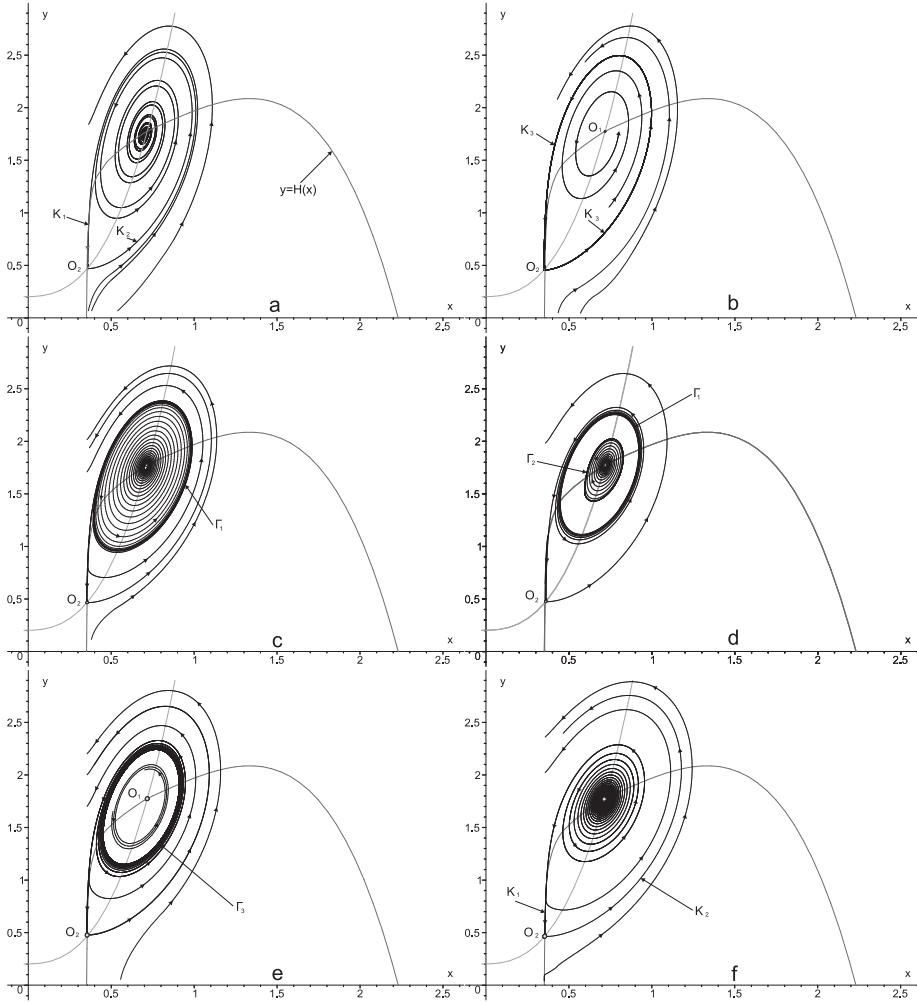


Рис. 2. Фазовые портреты системы (3) при варьировании волнового сопротивления $Z = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$

через гидросистему область притяжения фокуса O_1 сужается. При этом в экспериментах [15] при малых, но конечных возмущениях наблюдается срыв подачи расхода.

Покажем, что в этом случае происходит обратная (субкритическая) бифуркация Андронова–Хопфа [14].

Действительно, теперь пару комплексно-сопряженных собственных значений (15) следует рассматривать как функции параметра ξ . При этом

$$\operatorname{Re}[\lambda_{1,2}] = \frac{1}{2} \left(\frac{H'(\xi)}{Z} - \varphi'(\eta) Z \right) = \frac{\varphi'(\eta)}{2Z} \left(\frac{H'(\xi)}{\varphi'(\eta)} - Z^2 \right).$$

Далее, учитывая, что $\varphi'(\eta) = \frac{a\xi}{\eta - H_0} > 0$, получаем

$$\operatorname{sgnRe}[\lambda_{1,2}] = \operatorname{sgn}\Psi(\xi),$$

где $\Psi(\xi) = \frac{H'(\xi)}{\varphi'(\eta)} - Z^2 = \frac{\varepsilon(\eta - H_0)}{a\xi} \left[\frac{k_1\varepsilon}{(\xi - x_0)^{1+\varepsilon}} - k_1\nu(\xi - x_0)^{\nu-1} + k_3(1 - \text{sgn}(\mu - 1)) \right] - Z^2$.

Несложно проверить, что функция $\Psi(\xi)$ является монотонно убывающей и имеет положительный корень $\xi^* > 0 : \Psi(\xi^*) = 0$, причем при $0 < \xi < \xi^*$ выполняется неравенство $\Psi(\xi) > 0$, а при $\xi > \xi^*$ имеет место обратное неравенство $\Psi(\xi) < 0$.

Таким образом, при переходе параметра ξ через бифуркационное значение ξ^* справа налево в сторону его уменьшения, устойчивый фокус O_1 становится неустойчивым. При этом, до точки бифуркации в области $\xi > \xi^*$ функция $F(A)$ имеет положительный корень $A = A^* > 0$, для которого выполняется неравенство $\frac{dF}{dA} \Big|_{A=A^*} > 0$. Согласно теореме 1, в этом случае устойчивый фокус O_1 окружает неустойчивый предельный цикл $\Gamma_1 \approx \ell_{A^*}$. Данный цикл является бассейном притяжения для аттрактора O_1 и при $\xi \rightarrow \xi^* + 0$ он уменьшается, стягиваясь в точку. При этом, при $\xi = \xi^*$ происходит кризис (исчезновение) аттрактора O_1 , который при $\xi < \xi^*$ становится репеллером.

6. Заключение. В данной работе теоретически определены возможные динамические режимы и характер их установления в гидросистеме (рис. 1) с сосредоточенными параметрами, включающей лопастный насос, работающий в режиме кавитации перед срывом подачи при варьировании волнового сопротивления и стационарного расхода жидкости через колебательный контур рассмотренной гидросистемы.

В частности, проведенный бифуркационный анализ позволяет осуществить обоснованный выбор акустических параметров (волнового сопротивления) рассматриваемой гидросистемы, с целью обеспечения устойчивого стационарного режима ее работы, а также при априорно заданных акустических параметрах гидросистемы определить установившийся режим ее работы, возникающий при потере устойчивости стационарного режима.

1. *Шерстюк А.Н.* Насосы, вентиляторы, компрессоры. – М.: Высшая школа, 1972. – 342 с.
2. *Казакевич В.В.* Автоколебания (помпаж) в компрессорах. – М.: Машиностроение, 1974. – 264 с.
3. *Вильнер Я.М., Вопнярский И.П.* Лабораторный практикум по гидравлике и гидравлическим машинам. – Минск: Высшая школа, 1967. – 224 с.
4. *Чебаевский В.Ф., Петров В.И.* Кавитационные характеристики высокооборотных шнекоцентробежных насосов. – М.: Машиностроение, 1973. – 152 с.
5. *George S. Wond, Charles A., Mac Greggor and Robert K. Hoshide* Suppreessioon of Cavitation and Unsteble Flow in Throttled Turborumps // *Jornal of Spacecraft and Rockets*. – 1965. – Vol. 2. – P. 73–80.
6. *Водяницкий В.П.* Возникновение автоколебаний в гидравлической системе при подаче свободного газа на вход в насос. – В кн. Кавитационные автоколебания в насосных системах. – К.: Наукова думка, 1976. – Ч. 1. – С. 86–95.
7. *Gotsulenko V.V., Gotsulenko V.N.* Distinctive feature of self-oscillations (surging) of impeller pumps // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. – 2012. – Vol. 85. – No. 1. – P. 125–130.
8. *Басок Б.И., Гоцуленко В.В.* Автоколебания в агрегатах жидкостного реактивного двигателя, обусловленные теплогидродинамической неустойчивостью // *Доклады НАНУ*. – 2010. – № 8. – С. 88–93.
9. *Гоцуленко В.В., Гоцуленко В.Н.* Бифуркации динамических режимов в гидросистеме, включающей центробежный насос // *Математическое моделирование*. – 2012. – № 1 (26). – С. 35–38.
10. *Басок Б. И., Авраменко А.А., Гоцуленко В.В.* Асимптотический анализ автоколебаний при напорном перемещении газа, возбуждаемых запаздыванием сгорания // *Труды ИПММ*. – 2012. –

Т. 24. – С. 3–11.

11. Арнольд В.И., Ильясенко Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 2000. – 149 с.
12. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 568 с.
13. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1967. – 487 с.
14. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1972. – 472 с.
15. Гоцуленко В.Н., Гоцуленко Н.Н. Экспериментальное исследование автоколебаний в системе, включающей лопастной насос с монотонно убывающей напорной характеристикой // Энергомашиностроение. – 1978. – № 5. – С. 44–45.

B. I. Basok, A. A. Avramenko, V. V. Gotsulenko, V. N. Gotsulenko

Bifurcation analysis of fluid oscillations in the hydraulic system from the lumped parameters.

I For hydraulic systems with discrete parameters, including the blade pump, operating in the mode of cavitation is theoretically analyzed possible dynamic modes of operation. Looking impedance and steady flow of fluid through oscillating circuit hydraulic system as the bifurcation parameters identified local and global bifurcations in the considered problem. In particular theoretically proved possible bistability and self-excitation oscillation, or hard mode excitation.

Keywords: *oscillations, bifurcations, the wave resistance, hydraulic, vane supercharger, cavitation.*

В. І. Басок, А. О. Авраменко, В. В. Гоцуленко, В. М. Гоцуленко

Біфуркаційний аналіз автоколивань рідини в гідравлічній системі з зосередженими параметрами.

Для гідросистеми з зосередженими параметрами, що включає лопатевий насос, який працює в режимі кавітації, теоретично проведено аналіз можливих динамічних режимів її функціонування. Розглядаючи хвильовий опір і стаціонарну витрату рідини через коливальний контур гідросистеми як біфуркаційні параметри, визначено локальні та глобальні біфуркації в розглянутій задачі. Зокрема, теоретично доведена можливість бістабільності, а також самозбудження автоколивань, або їх жорсткий режим збудження.

Ключові слова: *автоколивання, біфуркації, хвильовий опір, гідросистема, лопатевий нагнітач, кавітація.*

Ин-т технической теплофизики НАН Украины, Киев
gosul@ukr.net

Получено 03.01.13