УДК 517.5

©2013. **Е. С. Афанасьева, Р. Р. Салимов**

О ПОВЕДЕНИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ГОМЕОМОРФНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ

В данной статье исследуется поведение на бесконечности гомеоморфных решений уравнения Бельтрами при различных условиях на дилатации.

Ключевые слова: *ёмкости, модули, гомеоморфные решения уравнений Бельтрами.*

1. Введение. Пусть D – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т.е. связное открытое подмножество $\mathbb{C}$ и пусть $\mu(z) : D \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. (почти всюду) в D. *Уравнением Бельтрами* называется уравнение вида

$$f_{\bar{z}} = \mu(z)\, f_z, \tag{1}$$

где $f_{\bar{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x+iy$, f_x и f_y частные производные отображения f по x и y, соответственно. Функция μ называется *комплексным коэффициентом*, а

$$K_\mu(z) = \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|} \tag{2}$$

– *дилатационным отношением* уравнения (1). Уравнение Бельтрами (1) называется *вырожденным*, если $\operatorname{ess\,sup} K_\mu(z) = \infty$.

Существование гомеоморфного $W^{1,1}_{\rm loc}$ решения было недавно установлено для многих вырожденных уравнений Бельтрами, см., напр., соответствующие ссылки в монографиях [8], [14] и статьях [7], [21].

Пусть z_0 – точка из $\mathbb{C}$, тогда величина

$$K^T_\mu(z,z_0) \;=\; \frac{\left|1-\frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}\mu(z)\right|^2}{1-|\mu(z)|^2} \tag{3}$$

называется *касательной дилатацией* уравнения Бельтрами относительно точки z_0, см., напр., [17], ср. соответствующие обозначения и определения в [1–3, 9, 12], см. также [15].

Отметим, что

$$K^{-1}_\mu(z) \leqslant K^T_\mu(z,z_0) \leqslant K_\mu(z) \tag{4}$$

для всех $z_0 \in \mathbb{C}$ и $z \in D$.

Определим геометрический смысл касательной дилатации. Точка $z \in \mathbb{C}$ называется *регулярной точкой* отображения $f : D \to \mathbb{C}$, если f дифференцируемо в z и $J_f(z) \neq 0$. Пусть $\omega \in \mathbb{C}$, $|\omega| = 1$, *производная по направлению ω отображения f* в точке z есть величина

$$\partial_\omega f(z) \;=\; \lim_{t\to+0} \frac{f(z+t\cdot\omega)-f(z)}{t}\;. \tag{5}$$

Радиальное направление в точке $z \in D$ относительно центра $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq z$, определяется соотношением

$$\omega_0 \ = \ \omega_0(z, z_0) \ = \ \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \ . \tag{6}$$

Касательное направление в точке $z \in D$ относительно центра $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq z$, есть $\tau = i\omega_0$.

Касательная дилатация f в точке z относительно z_0 определяется следующим равенством:

$$K^T(z, z_0, f) \ : \ = \ \frac{|\partial_T^{z_0} f(z)|^2}{|J_f(z)|}, \tag{7}$$

где $\partial_T^{z_0} f(z)$ – производная f в точке z по направлению τ.

Отметим, что если z регулярная точка отображения f и $|\mu(z)| < 1$, $\mu(z) = f_{\overline{z}}/f_z$, тогда

$$K^T(z, z_0, f) \ = \ K_\mu^T(z, z_0), \tag{8}$$

т.е.

$$K_\mu^T(z, z_0) \ = \ \frac{|\partial_T^{z_0} f(z)|^2}{|J_f(z)|} \ . \tag{9}$$

Действительно, равенства (8) и (9) следуют из простых вычислений

$$\partial_T^{z_0} f = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\vartheta} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\cdot\frac{\partial \overline{z}}{\partial\vartheta}\right) = i\cdot\left(\frac{z - z_0}{|z - z_0|}\cdot f_z - \frac{\overline{z - z_0}}{|z - z_0|}\cdot f_{\overline{z}}\right), \tag{10}$$

где $r = |z - z_0|$ и $\vartheta = \arg(z - z_0)$, так как $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$.

2. Предварительные замечания. Начнем с краткого введения в теорию модулей, которое можно найти в работах [5, 6] и монографии [22]. Пусть Γ – семейство кривых в $\mathbb{C}$, т.е. непрерывных отображений $\gamma : [a,\, b] \to \mathbb{C}$. Борелевская функция $\rho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ, пишут $\rho \in \mathrm{adm}\ \Gamma$, если

$$\int\limits_\gamma \rho(z)\ |dz| \ \geq \ 1 \tag{11}$$

для всех локально спрямляемых кривых $\gamma \in \Gamma$, где $|dz|$ отвечает мере длины на γ. *Модуль* семейства Γ определяется равенством

$$M(\Gamma) \ = \ \inf_{\rho \in \mathrm{adm}\ \Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} \rho^2(z)\ dm(z)\,, \tag{12}$$

где m – мера Лебега в $\mathbb{C}$. В дальнейшем, $\Delta(A,\, B;\, C)$ обозначает семейство всех кривых, соединяющих A и B в C, т.е. $\gamma(a) \in A$, $\gamma(b) \in B$ и $\gamma(t) \in C$ для всех $t \in (a,\, b)$.

Следуя работе [13], пару $\mathcal{E} = (A,\, C)$ называем *конденсатором*, если $A \subset \mathbb{C}$ – открытое множество и C – непустое компактное множество, содержащееся в A; $\mathcal{E}$

называем *кольцевым конденсатором*, если $G = A \setminus C$ – кольцо, т.е., если G – область, дополнение которой $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ состоит в точности из двух компонент; $\mathcal{E}$ называем *ограниченным конденсатором*, если множество A является ограниченным. Говорят, что конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ лежит в области G, если $A \subset G$. Очевидно, что если $f : D \to \mathbb{C}$ – открытое (непрерывное) отображение и $\mathcal{E} = (A, C)$ – конденсатор в D, то (fA, fC) – также конденсатор в fD. Далее $f\mathcal{E} = (fA, fC)$.

Пусть $\mathcal{E} = (A, C)$ – конденсатор, $W_0(\mathcal{E}) = W_0(A, C)$ – семейство непрерывных неотрицательных функций $u : A \to \mathbb{R}$ с компактным носителем в A класса ACL, таких что $u(z) \geq 1$ для $z \in \mathbb{C}$. Величина

$$\operatorname{cap} \mathcal{E} = \operatorname{cap}\, (A, C) = \inf_{u \in W_0(\mathcal{E})} \int\limits_A |\nabla u|^2 \; dm(z)$$

называется *емкостью* конденсатора $\mathcal{E}$. Здесь $|\nabla u| = \sqrt{|\frac{\partial u}{\partial x}|^2 + |\frac{\partial u}{\partial y}|^2}$. Известно (см. лемму 5.9 в [13]), что

$$\operatorname{cap}\, \mathcal{E} \geq \frac{(\inf l(\sigma))^2}{m(A \setminus C)}\,, \tag{13}$$

где $l(\sigma)$ – длина кривой σ, где σ – гладкая (бесконечно дифференцируемая) кривая, которая является границей $\sigma = \partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего C и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в A, а точная нижняя грань берется по всем таким σ. Кроме того (см. в [19]),

$$\operatorname{cap}\, \mathcal{E} = M(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)), \tag{14}$$

где для множеств $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ и $\mathfrak{S}_3$ в $\mathbb{C}, \Delta(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2; \mathfrak{S}_3)$ обозначает семейство всех непрерывных кривых, соединяющих $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ в $\mathfrak{S}_3$, см. [6], [10] и [20].

Лемма 1. *Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ гомеоморфное $W^{1,1}_{\rm loc}$ решение уравнения Бельтрами (1). Тогда*

$$M(f\Sigma) \geq \int\limits_{r_0}^{R} \frac{dr}{||K^T_\mu||_1(z_0, r)}\,, \quad \forall\ z_0 \in \mathbb{C}, \tag{15}$$

$0 < r_0 < R < \infty$, где $\Sigma = \Sigma(z_0, r_0, R)$ – семейство всех окружностей $S(z_0, r), r \in (r_0, R)$ и

$$||K^T_\mu||_1(z_0, t) := \int\limits_{S(z_0,t)} K^T_\mu(z, z_0)\, |dz| \tag{16}$$

норма в L_1 для $K^T_\mu(z, z_0)$ по окружности $S(z_0, t) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = t\}$, см. теорему 4.2 в [16].

Лемма 2. *Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ гомеоморфное $W^{1,1}_{\rm loc}$ решение уравнения Бельтрами (1). Тогда*

$$M(f(\Delta(S_1, S_2, \mathbb{A}))) \leq \left(\int\limits_{r_0}^{R} \frac{dr}{||K^T_\mu||_1(z_0, r)} \right)^{-1}, \quad \forall\ z_0 \in \mathbb{C}, \tag{17}$$

$0 < r_0 < R < \infty$, *где* $\mathbb{A} = \{z \in \mathbb{C} : r_0 < |z - z_0| < R\}$ *и*

$$||K_\mu^T||_1(z_0, t) := \int\limits_{S(z_0,t)} K_\mu^T(z, z_0)\, |dz| \tag{18}$$

норма в L_1 *для* $K_\mu^T(z, z_0)$ *по окружности* $S(z_0, t) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = t\}$.

Доказательство. Действительно, пусть $0 < r_0 < R$ и $S_1 = S(z_0, r_0)$, $S_2 = S(z_0, R)$. Согласно неравенствам Хессе и Цимера, см., напр., [10] и [23], см. также приложения A3 и A6 в [14],

$$M\left(f\left(\Delta(S_1, S_2, \mathbb{A})\right)\right) \ \leq \frac{1}{\mathrm{M}(f\left(\Sigma(z_0, r_0, R)\right))}\,, \tag{19}$$

поскольку $f\left(\Sigma(z_0, r_0, R)\right) \subset \Sigma\left(f(S_1), f(S_2), f\mathbb{A}\right)$, где $\Sigma(z_0, r_0, R)$ обозначает совокупность всех окружностей с центром в точке z_0, расположенных между окружностями S_1 и S_2, а $\Sigma\left(f(S_1), f(S_2), f(\mathbb{A})\right)$ состоит из всех кривых в $f\mathbb{A}$, отделяющих $f(S_1)$ и $f(S_2)$. Из соотношения (19) по лемме 1 получаем, что

$$M\left(f\left(\Delta(S_1, S_2, \mathbb{A})\right)\right) \ \leq \left(\int\limits_{r_0}^{R} \frac{dr}{\|K_\mu^T\|(z_0, r)}\right)^{-1}\,. \tag{20}$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы 1 и* $\|K_\mu^T\|_1(z_0, t) \neq \infty$ *для п.в.* $t \in (r_0, R)$. *Тогда*

$$I^{-1} = \int\limits_{\mathbb{A}} K_\mu^T(z, z_0) \cdot \eta_0^2\left(|z - z_0|\right)\, dm(z) \leqslant \int\limits_{\mathbb{A}} K_\mu^T(z, z_0) \cdot \eta^2\left(|z - z_0|\right)\, dm(z) \tag{21}$$

для любой измеримой функции $\eta : (r_0, R) \to [0, \infty]$, *такой что*

$$\int\limits_{r_0}^{R} \eta(t)\, dt = 1\,, \tag{22}$$

где $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_0, R)$ *и*

$$\eta_0(t) = \frac{1}{I\|K_\mu^T\|_1(z_0, t)}\,, \qquad I = \int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{||K_\mu^T||_1(z_0, t)}, \tag{23}$$

см. лемму 4.3 в [16].

Лемма 4. *Пусть* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *гомеоморфное* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ *решение уравнения Бельтрами (1) и* $\|K_\mu^T\|_1(z_0, t) \neq \infty$ *для п.в.* $t \in (r_0, R)$. *Если для* $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < r_0 < R$ *и* $p < 2$

$$\int\limits_{\mathbb{A}(z_0, r_0, R)} K_\mu^T(z_0, r_0) \psi_R^2(|z - z_0|) dm(z) \leq c \left(\int\limits_{r_0}^{R} \psi_R(t) dt\right)^p \qquad \forall\ R > r_0, \tag{24}$$

где $\psi_R(t) : [0, \infty] \to [0, \infty]$ *– однопараметрическое семейство измеримых функций,*

$$0 < \int\limits_{r_0}^{R} \psi_R(t)dt < \infty \quad \forall\ R > r_0.$$

Тогда

$$I \geq c^{-1} \left(\int\limits_{r_0}^{R} \psi_R(t)dt \right)^{2-p}. \tag{25}$$

Доказательство. Рассмотрим кольцо $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_0, R)$. Заметим, что функция

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{\psi_R(t)}{\int\limits_{r_0}^{R} \psi_R(t)dt}, & t \in (r_0, R) \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (r_0, R). \end{cases}$$

удовлетворяет условию (22) и следовательно, по лемме 3 получаем

$$\frac{1}{I} \leq \int\limits_{\mathbb{A}} K_\mu^T(z, z_0) \cdot \eta^2 \left(|z - z_0|\right) \, dm(z) \leq c \left(\int\limits_{r_0}^{R} \psi_R(t)dt \right)^{p-2}, \tag{26}$$

и тем самым неравенство (24) доказано.

3. О поведении на бесконечности гомеоморфных решений уравнения Бельтрами. Ниже приведена теорема о росте на бесконечности гомеоморфных решений уравнения Бельтрами класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ в терминах касательной дилатации. Обозначим $L(z_0, f, R) = \sup\limits_{|z-z_0|\leq R} |f(z) - f(z_0)|$.

Теорема 1. *Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ гомеоморфное $W^{1,1}_{\rm loc}$ решение уравнения Бельтрами (1) и $\|K_\mu^T\|_1(z_0, t) \neq \infty$ для п.в. $t \in (r_0, R)$. Предположим, что $\psi_R : [0, \infty] \to [0, \infty]$ – однопараметрическое семейство измеримых функций таких, что*

$$0 < \int\limits_{r_0}^{R} \psi_R(t)dt < \infty, \quad \forall\ R > r_0$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{A}(z_0, r_0, R)} K_\mu^T(z, z_0)\psi_R^2(|z - z_0|)dm(z) \leq c \left(\int\limits_{r_0}^{R} \psi_R(t)dt \right)^p, \quad p < 2.$$

Тогда

$$\liminf_{R\to\infty} L(z_0, f, R) \exp\left\{ -\frac{2\pi}{c} \left(\int\limits_{r_0}^{R} \psi_R(t)dt \right)^{2-p} \right\} > 0. \tag{27}$$

Доказательство. Рассмотрим круговое кольцо $\mathbb{A}_t(z_0) = \{z : t < |z-z_0| < t+\triangle t\}$. Пусть $C_t = \overline{B(z_0, t)}, A_{t+\triangle t} = B(z_0, t + \triangle t)$, имеем конденсатор $(A_{t+\triangle t}, C_t)$, тогда $(fA_{t+\triangle t}, fC_t)$ – кольцевой конденсатор в $\mathbb{C}$, согласно (14) имеем

$$\operatorname{cap}(fA_{t+\triangle t}, fC_t) = M(\triangle(\partial fA_{t+\triangle t}, \partial fC_t; f\mathbb{A}_t(z_0)))\,. \tag{28}$$

Определим функцию $\Phi(t)$ для данного гомеоморфизма f следующим образом: $\Phi(t) = m(fB(z_0, t))$. В силу неравенства (13), получим

$$\operatorname{cap}(fA_{t+\triangle t}, fC_t) \geq 4\pi\left[\frac{m(fC_t)}{m(fA_{t+\triangle t}\backslash fC_t)}\right]. \tag{29}$$

По теореме 1 имеем

$$\operatorname{cap}(fA_{t+\triangle t}, fC_t) \leq \left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{dr}{||K_\mu^T||_1(z_0, r)}\right)^{-1}. \tag{30}$$

Следовательно, из (29) и (30) получим

$$4\pi\left[\frac{m(fC_t)}{m(fA_{t+\triangle t}\backslash fC_t)}\right] \leq \left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{dr}{||K_\mu^T||_1(z_0, r)}\right)^{-1}. \tag{31}$$

Далее имеем

$$4\pi\frac{\Phi(t)}{\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t)} \leq \left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{dr}{||K_\mu^T||_1(z_0, r)}\right)^{-1}. \tag{32}$$

Разделив обе части на Δt, получим

$$\frac{4\pi}{\Delta t} \cdot \int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{dr}{||K_\mu^T||_1(z_0, r)} \leq \frac{1}{\Phi(t)} \cdot \frac{\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t}. \tag{33}$$

Устремляя Δt к нулю и учитывая монотонное возрастание функции $\Phi(t)$, имеем для п.в. t

$$\frac{4\pi}{||K_\mu^T||_1(z_0, t)} \leq \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}. \tag{34}$$

Интегрируя обе части неравенства (34) по $t \in [r, R]$, учитывая, что

$$\int\limits_{r_0}^{R} \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} dt \leq \ln\frac{\Phi(R)}{\Phi(r_0)},$$

см., напр., теорему 7.4. гл. IV в [18], получим

$$4\pi\int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{||K_\mu^T||_1(z_0, t)} \leq \ln\frac{\Phi(R)}{\Phi(r_0)}. \tag{35}$$

По лемме 4 имеем

$$4\pi c^{-1}\left(\int\limits_{r_0}^{R}\psi_R(t)dt\right)^{2-p}\leq\ln\frac{\Phi(R)}{\Phi(r_0)}.$$

Следовательно,

$$\Phi(r_0)\leq\Phi(R)\cdot\exp\left\{-4\pi c^{-1}\left(\int\limits_{r_0}^{R}\psi_R(t)dt\right)^{2-p}\right\}.$$

Напоминая, что $\Phi(r_0)=m(fB(z_0,r_0))$ и $\Phi(R)=m(fB(z_0,R))$, получим оценку

$$m(fB(z_0,r_0))\leq m(fB(z_0,R))\cdot\exp\left\{-4\pi c^{-1}\left(\int\limits_{r_0}^{R}\psi_R(t)dt\right)^{2-p}\right\}. \tag{36}$$

Оценим сверху неравенство (36). Заметим, что $m(fB(z_0,R))\leq\pi L^2(z_0,f,R)$, поэтому из (36) получаем

$$m(fB(z_0,r_0))\leq\pi L^2(z_0,f,R)\exp\left\{-4\pi c^{-1}\left(\int\limits_{r_0}^{R}\psi_R(t)dt\right)^{2-p}\right\}. \tag{37}$$

Очевидно, что $m(fB(z_0,r_0))=M_1>0$ от R не зависит. Переходя к нижнему пределу в (37) при $R\to\infty$ и обозначая $M:=\sqrt{\frac{M_1}{\pi}}$, получаем

$$M\leq\liminf_{R\to\infty}L(z_0,f,R)\exp\left\{-2\pi c^{-1}\left(\int\limits_{r_0}^{R}\psi_R(t)dt\right)^{2-p}\right\},$$

что и требовалось доказать.

1. *Andreian Cazacu C.* Sur les ralations entre les functions caracteristiques de la pseudo-analyticite. – In: Lucrarile celui de al IV-lea Congres al Matematicienilor Romani, Bucuresti. – 1956.
2. *Andreian Cazacu C.* Sur les transformations pseudo-analytiques // Revue Math. Pures Appl. – 1957. – Vol. 2. – P. 383–397.
3. *Andreian Cazacu C.* On the length-area dilatation // Complex Var. Theory Appl. Vol. – 2005. – Vol. 50, No. 7–11. – P. 765–776.
4. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969.
5. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – Vol. 98. – P. 171–219.
6. *Gering F.W.* Quasiconformal mappings in Complex Analysis and its Applications // International Atomic Energy Agency, Vienna. – 1976. – Vol. 2. – P. 213–268.
7. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On recent advances in the degenerate Beltrami equations // Ukr. Mat. Visn. – 2010. – Vol. 7, No. 4. – P. 467–515; transl. in J. Math. Sci. – 2011. – Vol. 175, No. 4. – P. 413–449.

8. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami Equation: A Geometric Approach. Springer Advances in Mathematics. ISBN 978-1-4614-3190-9, Due: May 31, 2012.
9. *Gutlyanskii V., Martio O., Sugawa T., Vuorinen M.* On the degenerate Beltrami equation // Trans. Amer. Math. Soc. – 2005. – Vol. 357. – P. 875–900.
10. *Hesse J.* A p-extremal length and p-capacity equality // Arc. Mat. – 1975. – Vol. 13. – P. 131–144.
11. *Кругликов В.И.* Ёмкости конденсаторов и пространствееные отображения, квазиконформные в среднем // Матем. сб. – 1986. – Т. 130, № 2. – С. 185–206.
12. *Lehto O.* Homeomorphisms with a prescribed dilatation. Lecture Notes in Math. – 1968. – Vol. 118. – P. 58–73.
13. *Martio O., Rickman S., Vaisala J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1969. – Vol. 448. – P. 1–40.
14. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. Springer Monographs in Mathematics. – New York: Springer, 2009. – 367 pp.
15. *Reich E., Walczak H.* On the behavior of quasiconformal mappings at a point // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – P. 338–351.
16. *Ryazanov V., Salimov R., Srebro U., Yakubov E.* On Boundary Value Problems for the Beltrami Equations // Contemp. Math. – 2013. – Vol. 591. – P. 211–242.
17. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equation // J. Anal. Math. – 2005. – Vol. 96. – P. 117–150.
18. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: ИЛ, 1949.
19. *Шлык В.А.* О равенстве p-емкости и p-модуля // Сиб. мат. ж. – 1993. – Т. 34, № 6. – С. 216—221.
20. *Shlyk V. A.* On the equality between p-capacity and p-modulus // Sibirsk. Mat. Zh. – 1993. – Vol. 34, No. 6. – P. 216–221; transl. in Siberian Math. J. – 1993. – Vol. 34, No. 6. – P. 1196–1200.
21. *Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation. Handbook in Complex Analysis: Geometric function theory. – Amsterdam: Elseiver. – 2005. – Vol. 2. – P. 555–597.
22. *Väisälä J.* Lectures on $n-$Dimensional Quasiconformal Mappings. Lecture Notes in Math. 229. – Berlin: Springer–Verlag, 1971.
23. *Ziemer W.P.* Extremal length and conformal capacity // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – Vol. 126, No. 3 – P. 460–473.

O. S. Afanasieva, R. R. Salimov

The behavior at infinity of homeomorphic solutions of the Beltrami equations.

In this article, we study the behavior at infinity of homeomorphic solutions of the Beltrami equations under various conditions on the dilations.

Keywords: *capacities, modules, homeomorphic solutions of the Beltrami equations.*

О. С. Афанасьєва, Р. Р. Салімов

Про поведінку на нескінченності гомеоморфних розв'язків рівнянь Бельтрамі.

У даній роботі досліджується поведінка на нескінченності гомеоморфних розв'язків рівнянь Бельтрамі за різних умов на дилатації.

Ключові слова: *ємності, модулі, гомеоморфні розв'язки рівнянь Бельтрамі.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`es.afanasjeva@yandex.ru`
`ruslan623@yandex.ru`

Получено 15.06.13