УДК 517.5

©2013. **Е. А. Севостьянов**

ОБ ИНЪЕКТИВНОСТИ ЛОКАЛЬНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ Q-ГОМЕОМОРФИЗМОВ ПРИ $n \geq 3$

Для некоторого класса отображений, более общих, чем отображения с ограниченным искажением по Ю.Г. Решетняку, удовлетворяющих оценкам искажения модулей семейств кривых (ёмкостей конденсаторов) в области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, доказан аналог теоремы о радиусе инъективности локальных гомеоморфизмов. Основной результат сформулирован в терминах среднего значения от характеристики квазиконформности.

Ключевые слова: *отображения с ограниченным и конечным искажением, модули семейств кривых, ёмкости конденсаторов.*

1. Введение. Всюду далее D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, m – мера Лебега $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{dist}(A, B)$ – евклидово расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{dist}(A, B) = \inf\limits_{x \in A, y \in B} |x - y|$, (x, y) обозначает (стандартное) скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\operatorname{diam} A$ – евклидов диаметр множества $A \subset \mathbb{R}^n$,

$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$, $\mathbb{B}^n := B(0, 1)$, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, $\mathbb{S}^{n-1} := S(0, 1)$, ω_{n-1} означает площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, Ω_n – объём единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$, запись $f : D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f, заданное в области D, непрерывно. Как обычно, мы пишем $f \in W^{1,n}_{loc}(D)$, если все координатные функции $f = (f_1, \ldots, f_n)$ обладают обобщёнными частными производными первого порядка, локально интегрируемыми в D в степени n. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *локальным гомеоморфизмом,* если каждая точка $x_0 \in D$ имеет окрестность $B(x_0, \delta)$ такую, что сужение $f|_{B(x_0,\delta)}$ является гомеоморфизмом. Напомним, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если выполнены следующие условия: 1) $f \in W^{1,n}_{loc}$, 2) якобиан $J(x, f) := \det f'(x)$ отображения f в точке $x \in D$ сохраняет знак почти всюду в D, 3) $\|f'(x)\|^n \leq K \cdot |J(x, f)|$ при почти всех $x \in D$ и некоторой постоянной $K < \infty$, где, как обычно, $\|f'(x)\| := \sup\limits_{h \in \mathbb{R}^n : |h|=1} |f'(x)h|$, см., напр., [1; § 3, гл. I], либо [2; определение 2.1, разд. 2, гл. I]. В этом случае, величину K будем называть *коэффициентом квазиконформности.* Следующий результат доказан в работе [3; теорема 2.3], см. также [2; теорема 3.4, гл. III] и работу [4].

Предложение 1. Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, – локально гомеоморфное отображение с ограниченным искажением с коэффициентом квазиконформности K. Тогда отображение f является инъективным в некотором шаре $B(0, \psi(n, K))$, где ψ – положительная величина, зависящая только от n и K.

Основной целью настоящей заметки является распространение предложения 1 на некоторый класс отображений, более общий, чем отображения с ограниченным искажением. Для этого рассмотрим следующие определения, см., напр., [5] и [6].

Кривой γ мы называем непрерывное отображение отрезка $[a,b]$ (открытого интервала (a,b), либо полуоткрытого интервала вида $[a,b)$ или $(a,b]$) в $\mathbb{R}^n$, $\gamma:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}^n$. Под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ, а $f(\Gamma)=\{f\circ\gamma|\gamma\in\Gamma\}$. Борелева функция $\rho:\mathbb{R}^n\rightarrow[0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если криволинейный интеграл первого рода от функции ρ по каждой (локально спрямляемой) кривой $\gamma\in\Gamma$ удовлетворяет условию: $\int\limits_{\gamma}\rho(x)|dx|\geq 1$. В этом случае мы пишем $\rho\in{\rm adm}\,\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина $M(\Gamma)=\inf_{\rho\in{\rm adm}\,\Gamma}\int\limits_{D}\rho^n(x)\quad dm(x)$. Свойства модуля M в некоторой мере аналогичны свойствам меры Лебега m в $\mathbb{R}^n$, где роль измеримых множеств играют семейства кривых, а роль точек – отдельные кривые (см. [5; теорема 6.2]). Пусть $x_0\in D$, $A(x_0,r_1,r_2)=\{x\in\mathbb{R}^n: r_1<|x-x_0|<r_2\}$, $S_i=S(x_0,r_i)$, а для произвольных множеств E, $F\subset\overline{\mathbb{R}^n}=\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$ символ $\Gamma(E,F,D)$ означает семейство всех кривых $\gamma:[a,b]\rightarrow\overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a)\in E$, $\gamma(b)\in F$ и $\gamma(t)\in D$ при $t\in(a,b)$. Отображение $f:D\setminus\{x_0\}\rightarrow\overline{\mathbb{R}^n}$ условимся называть *кольцевым Q-отображением в точке $x_0\in D$*, если соотношение

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_1,\,S_2,\,A\right)\right)\right)\ \leq\int\limits_{A}Q(x)\cdot\eta^n(|x-x_0|)\ dm(x) \qquad (1)$$

выполнено в кольце $A=A(x_0,r_1,r_2)$ для произвольных r_1,r_2, указанных выше, и для каждой измеримой функции $\eta:(r_1,r_2)\rightarrow[0,\infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\ dr\ \geq\ 1\,. \qquad (2)$$

При этом, если f предполагается гомеоморфизмом, говорят, что f – *кольцевой Q-гомеоморфизм* в точке x_0 (см. [6; гл. 7]; см. также [7]). Не лишним будет заметить, что в силу известного результата Е.А. Полецкого произвольное отображение f с ограниченным искажением удовлетворяет соотношениям (1)–(2) при $Q\equiv const$ (см. [8; теорема 1, § 4]). Отметим, что результаты настоящей заметки содержательны только в случае неограниченных функций Q. Полагаем $q_{x_0}(r):=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{|x-x_0|=r}Q(x)\,dS$, где dS – элемент площади поверхности S. Основной результат данной статьи заключает в себе следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $f:\mathbb{B}^n\rightarrow\mathbb{R}^n$, $n\geq 3$ – локальный кольцевой Q-гомеоморфизм в точке $x_0=0$, такой, что $Q\in L_{loc}^1(\mathbb{B}^n)$ и*

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)}=\infty\,. \qquad (3)$$

Тогда отображение f инъективно в некотором шаре $B\left(0,\delta(n,Q)\right)$, где δ – положительное число, зависящее только от n и функции Q.

Кроме того, условие (3) является точным в следующем смысле: для каждого $\delta > 0$ и функции $Q \in L^1_{loc}(\mathbb{B}^n)$ такой, что $Q(x) \geq 1$ п.в. и

$$\int\limits_0^1 \frac{dt}{tq_0^{1/(n-1)}(t)} < \infty \tag{4}$$

найдётся локальный кольцевой Q-гомеоморфизм $f = f_Q : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ в точке $x_0 = 0$, не являющийся инъективным в шаре $B(0, \delta)$.

2. Основная лемма. Говорят, что множество $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ *относительно локально связно*, если каждая точка множества $\overline{E}$ имеет сколь угодно малые окрестности U такие, что множества $U \cap E$ связны. Следующие утверждения могут быть найдены в монографии [2; леммы 3.1-3.3, гл. III].

Предложение 2. Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ – локальный гомеоморфизм, Q – односвязное и локально линейно связное множество в $\overline{\mathbb{R}^n}$ и P – компонента связности множества $f^{-1}(Q)$, $\overline{P} \subset D$. Тогда f отображает P на Q гомеоморфно. Если Q – относительно локально связно, то f гомеоморфно отображает $\overline{P}$ на $\overline{Q}$.

Предложение 3. Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ – локальный гомеоморфизм, F – компактное множество в D и $f|_F$ инъективно. Тогда f также инъективно и в некоторой окрестности множества F.

Предложение 4. Пусть $f : G \to \overline{\mathbb{R}^n}$ – локальный гомеоморфизм, $A, B \subset G$, при этом, f гомеоморфно в A и B. Если $A \cap B \neq \varnothing$ и множество $f(A) \cap f(B)$ является связным, то f гомеоморфно в $A \cup B$.

Нам также необходимо следующее утверждение, см. [4; лемма 3.1].

Предложение 5. Пусть $n \geq 1$, $r > 0$, $a \neq b$, $a, b \in S(0, r)$. Тогда найдётся точка $p = p(a, b) \in B(0, r)$ такая, что для каждого $t \in \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)$ либо $0, b \in B(p, t)$ и $a \notin B(p, t)$, либо $a, b \in B(p, t)$ и $0 \notin B(p, t)$.

Приведём ещё один вспомогательный результат, принадлежащий Ю. Вяйсяля, см. [5; теорема 10.2]. Пусть $S = S(x_0, r)$, $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. *Сферической шапочкой* условимся называть множество вида $H \cap S$, где H – открытое полупространство в $\mathbb{R}^n$. Модулем $M^S(\Gamma)$ семейства кривых Γ относительно S будем называть величину $M^S(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_D \rho^n(x) \quad dm(x)$. Имеет место следующее заключение ([5; теорема 10.2]).

Предложение 6. Пусть K – произвольная сферическая шапочка сферы S, а E и F – непустые непересекающиеся подмножества K. Пусть $\Gamma = \Gamma(E, F, K)$, тогда $M^S(\Gamma) \geq b_n/r$, где постоянная b_n зависит только от размерности пространства n.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Предположим, что $n \geq 3$, $Q : \mathbb{B}^n \to [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция и $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ – локальный кольцевой Q-гомеоморфизм в точке $x_0 = 0$. Предположим, что найдётся измеримая по Лебегу функция $\psi : (0, 1) \to [0, \infty]$ и* *постоянная* $C = C(n, Q, \psi)$ *такие, что*

$$0 < I(r_1, r_2) := \int\limits_{r_1}^{r_2} \psi(t)\, dt < \infty \quad \forall\, r_1, r_2 \in (0,1) \tag{5}$$

и при некотором $\alpha > 0$

$$\int\limits_{r_1<|x|<r_2} Q(x)\psi^n(|x|)\, dm(x) \le C \cdot I^{n-\alpha}(r_1, r_2)\,. \tag{6}$$

Если

$$I(0,1) := \int\limits_0^1 \psi(t)dt = \infty\,, \tag{7}$$

то отображение f *инъективно в некотором шаре* $B\left(0, \delta(n, Q, \psi)\right)$, *где* δ *– положительное число, зависящее только от* n *и функций* Q *и* ψ.

Доказательство. **1 шаг.** Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $f(0) = 0$. Пусть $r_0 = \sup\{r \in \mathbb{R} : r > 0, \overline{U(0,r)} \subset \mathbb{B}^n\}$, где $U(0,r)$ означает компоненту связности множества $f^{-1}(B(0,r))$, содержащую точку 0. Очевидно, что $r_0 > 0$. Зафиксируем число $r < r_0$ и положим $U = U(0,r)$, $l^* = l^*(0,f,r) = \inf\{|z| : z \in \partial U\}$, $L^* = L^*(0,f,r) = \sup\{|z| : z \in \partial U\}$. По предложению 2 f отображает множество $\overline{U}$ на $\overline{B(0,r)}$ гомеоморфно. Следовательно, f инъективно в шаре $B(0,l^*)$ и, значит, достаточно найти нижнюю границу для величины l^*.

2 шаг. Заметим, что $L^* \to 1$ при $r \to r_0$. Действительно, пусть $L^* \not\to 1$ при $r \to r_0$.

a) Заметим, что $U(0,r_1) \subset U(0,r_2)$ при $0 < r_1 < r_2 < r_0$. Действительно, если бы нашёлся элемент $x \in U(0,r_1) \setminus U(0,r_2)$, то, поскольку $f(U(0,r_i)) = B(0,r_i)$, $i = 1,2$, мы бы имели $f(x) = y \in B(0,r_1)$ и $f(z) = y \in B(0,r_1)$, $z \ne x$. Однако, это противоречит предложению 4, поскольку по этому предложению f должно гомеоморфно отображать объединение множеств $U(0,r_1) \cup U(0,r_2)$.

b) Из пункта a) вытекает, что функция L^* возрастает по r и, следовательно, существует предел величины L^* при $r \to r_0$. Тогда $L^* \to \varepsilon_0$ при $r \to r_0$, где $\varepsilon_0 \in (0,1)$. В таком случае, все множества $U(0,r)$, $0 < r < r_0$ лежат в фиксированном шаре $B(0,\varepsilon_0)$.

c) Заметим, что $B(0,r_0) \subset f(B(0,\varepsilon_0))$. Действительно, пусть $y \in B(0,r_0)$, тогда также $y \in B(0,r_1)$ при некотором $r_1 \in (0,r_0)$, откуда следует, что найдётся $x \in U(0,r_1)$ такой, что $f(x) = y$, следовательно, $y \in f(B(0,\varepsilon_0))$, т.е., $B(0,r_0) \subset f(B(0,\varepsilon_0))$.

d) Заметим, что $\overline{B(0,r_0)} \subset f(\overline{B(0,\varepsilon_0)})$ и, значит, ввиду локальной гомеоморфности отображения f, при произвольном $\varepsilon_1 \in (\varepsilon_0, 1)$ множество $f(B(0,\varepsilon_1))$ содержит некоторую окрестность множества $\overline{B(0,r_0)}$. Значит, компонента связности $U(0,r_0)$ лежит внутри замкнутого шара $\overline{B(0,\varepsilon_0)}$, что противоречит определению величины

r_0. Противоречие, полученное выше, означает, что $L^* \to 1$ при $r \to r_0$, что и требовалось установить.

3 шаг. Выберем x и $y \in \partial U$ такими, что $|x| = L^*$ и $|y| = l^*$. По определению множества U, имеем: $f(x),\ f(y) \in S(0,r)$. По предложению 5 найдётся точка $p \in B(0,r)$ такая, что для каждого $t \in \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)$, элемент $f(x) \in B(p,t)$ и либо $0 \in B(p,t)$ и $f(y) \notin B(p,t)$, либо $0 \notin B(p,t)$ и $f(y) \in B(p,t)$. Зафиксируем какое-либо такое t. Заметим, что 0 и $f(y) \in \overline{f(B(0,l^*))}$ и, следовательно, $f(B(0,l^*)) \cap B(p,t) \neq \varnothing \neq f(B(0,l^*)) \setminus B(p,t)$. Поскольку множество $f(B(0,l^*))$ связно, найдётся точка $z_t \in S(p,t) \cap f(B(0,l^*))$ (см. [9; теорема 1 разд. I, § 46, гл. 5]).

Пусть z_t^* – единственная точка множества $f^{-1}(z_t) \cap B(0,l^*)$, $C_t(\varphi) \subset S(p,t)$ – сферическая шапочка с центром в точке z_t и раствором угла φ, определённая равенством $C_t(\varphi) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-p| = t, (z_t - p, y-p) > t^2 \cos\varphi\}$. Обозначим символом φ_t точную верхнюю грань тех углов φ, для которых компонента связности множества $f^{-1}(C_t(\varphi))$, содержащая точку z_t^*, отображается гомеоморфно на множество $C_t(\varphi)$. Обозначим $C_t = C_t(\varphi_t)$ и через C_t^* – компоненту связности множества $f^{-1}(C_t)$, содержащую точку z_t^*.

4 шаг. Покажем, что множества C_t^* и $S(0,L^*)$ имеют общую точку. Предположим противное.

a) Поскольку множество C_t^* связно и $C_t^* \cap B(0,L^*) \neq \varnothing$, отсюда вытекает, что $C_t^* \subset B(0,L^*)$ (см. [9; теорема 1 разд. I, § 46, гл. 5]). Заметим, что, в таком случае, множество C_t^* является компактным подмножеством U. По предложению 2 отображение f переводит $\overline{C_t^*}$ на $\overline{C_t}$ гомеоморфно (что не является верным при $n = 2$, поскольку множество $C_t(\pi)$ не является относительно локально связным в этом случае). По предложению 3 f инъективно в некоторой окрестности множества $\overline{C_t^*}$. Следовательно, $\varphi_t = \pi$, $\overline{C_t} = S(p,t)$ и $\overline{C_t^*}$ топологически эквивалентно $(n-1)$-мерной сфере в $\mathbb{R}^n$. Заметим, что ограниченная компонента связности D множества $\mathbb{R}^n \setminus \overline{C_t^*}$ содержится в $B(0,L^*)$. Тогда $\overline{f(D)}$ – компактное подмножество $f(\mathbb{B}^n)$ и, поскольку f – открытое отображение, $\partial f(D) \subset f(\partial D)$.

b) Покажем, что $f(D) \subset B(p,t)$. Предположим противное, тогда найдётся $y \in f(D) \setminus \overline{B(p,t)}$. В таком случае, $\left(f(\mathbb{B}^n) \setminus \overline{B(p,t)}\right) \cap f(D) \neq \varnothing$. Поскольку $f(D)$ – компактная подобласть $f(\mathbb{B}^n)$, имеем $\left(f(\mathbb{B}^n) \setminus \overline{B(p,t)}\right) \setminus f(D) \neq \varnothing$. Так как $f(\mathbb{B}^n) \setminus \overline{B(p,t)}$ связно, отсюда вытекает, что найдётся $z \in \partial f(D) \cap \left(f(\mathbb{B}^n) \setminus \overline{B(p,t)}\right)$ (см. [9; теорема 1 разд. I, § 46, гл. 5]), что противоречит включению $\partial f(D) \subset B(p,t)$. Таким образом, включение $f(D) \subset B(p,t)$ установлено.

c) Заметим, что $B(p,t) \subset f(D)$. Действительно, пусть найдётся $a \in B(p,t) \setminus f(D)$. Поскольку множество $B(p,t)$ связно и $B(p,t) \cap f(D) \neq \varnothing$, отсюда следует, что $\partial f(D) \cap B(p,t) \neq \varnothing$ (см. [9; теорема 1 разд. I, § 46, гл. 5]). Последнее противоречит включению $\partial f(D) \subset S(p,t)$.

d) Таким образом, из включений $f(D) \subset B(p,t)$ и $B(p,t) \subset f(D)$, установленных выше в пунктах b) и c), вытекает, что $f(D) = B(p,t)$. По определению, область D является компонентой связности множества $f^{-1}(B(p,t))$. В силу предложения 2 отображение f переводит $\overline{D}$ на $\overline{B(p,t)}$ гомеоморфно.

e) Поскольку $z_t^* \in \overline{C_t^*} \cap U$, имеем $\overline{D} \cap \overline{U} \neq \varnothing$. Так как f гомеоморфно отображает $\overline{U}$ на $\overline{B(0,r)}$, отображение f инъективно в $\overline{U} \cup \overline{D}$ по предложению 4. Последнее невозможно, поскольку из равенства $f(D) = B(p,t)$ и того, что $f(x) \in B(p,t)$, вытекает существование точки $x_1 \neq x$, $x_1 \in D$, такой что $f(x_1) = f(x)$. Следовательно, множества C_t^* и $S(0, L^*)$ имеют непустое пересечение, что и требовалось установить.

5 шаг. Пусть $k_t^* \in C_t^* \cap S(0, L^*)$ и $k_t = f(k_t^*)$. Обозначим через Γ_t' семейство всех кривых, соединяющих точки k_t и z_t в C_t. Пусть Γ' – объединение семейств кривых Γ_t', $t \in \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)$. Обозначим через f_t сужение отображения f на множество C_t^*. Тогда f_t гомеоморфно отображает C_t^* на C_t. Обозначим $\Gamma = \bigcup\limits_{t\in\left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)} \left\{f_t^{-1} \circ \gamma : \gamma \in \Gamma_t'\right\}$.

Заметим, что при каждом $t \in \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)$, выполнено $z_t^* \in B(0, l^*)$ и $k_t \in S(0, L^*)$. Тогда по определению кольцевого Q-отображения в точке 0, для каждой измеримой по Лебегу функции $\eta : (l^*, L^*) \to [0, \infty]$, такой что

$$\int\limits_{l^*}^{L^*} \eta(r)dr \geq 1\,, \tag{8}$$

будет выполнено неравенство

$$M(f(\Gamma(S(0,l^*), S(0,L^*), A(0,l^*,L^*)))) \leq \int\limits_{A(0,l^*,L^*)} Q(x) \cdot \eta^n(|x|)dm(x)\,. \tag{9}$$

Полагаем $\eta(t) = \psi(t)/I(l^*, L^*)$, где ψ – функция из условия леммы. Заметим, что выбранная таким образом функция η удовлетворяет соотношению (8). Тогда из условий (6) и (9) вытекает, что

$$M(\Gamma') = M(f(\Gamma(S(0,l^*), S(0,L^*), A(0,l^*,L^*)))) \leq$$

$$\leq \int\limits_{A(0,l^*,L^*)} Q(x) \cdot \eta^n(|x|)dm(x) \leq C/I^{\alpha}(l^*, L^*)\,. \tag{10}$$

По предложению 6

$$\int\limits_{S(p,t)} \rho^n(x)dS \geq \frac{C_n'}{t} \tag{11}$$

для каждой функции $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma_t'$ и некоторой положительной постоянной C_n'. Интегрирование неравенства (11) по всем указанным выше значениям t и применение теоремы Фубини (см. [10; теорема 8.1, гл. III]) приводит к неравенству

$$M(\Gamma') \geq C_n\,, \tag{12}$$

где постоянная C_n зависит только от n. Из (10) и (12) вытекает, что

$$C_n \leq C/I^{\alpha}(l^*, L^*) \leq C/I^{\alpha}(l^*(0, f, r_0), L^*(0, f, r)) \tag{13}$$

поскольку $I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > I(\varepsilon_3, \varepsilon_2)$ при $\varepsilon_3 > \varepsilon_1$. Переходя к пределу в (13) при $r \to r_0$, мы получаем, что

$$C_n \leq C/I^{\alpha}(l^*(0, f, r_0), 1)\,. \tag{14}$$

Заметим, что из (14) вытекает неравенство $I(\varepsilon, 1) < \infty$ при каждом $\varepsilon \in (0, 1)$. Пусть $l^*(0, f, r_0) \to 0$, тогда из (7) следует, что правая часть соотношения (14) стремится к нулю, что противоречит (14). Следовательно, $l^*(0, f, r_0) \geq \delta$ для всех рассматриваемых f. Доказательство завершено. $\Box$

3. Доказательство основного результата. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subset D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. *Конденсатором* будем называть пару множеств $E = (A, C)$, где A – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а C – компактное подмножество A. *Ёмкостью* конденсатора E называется следующая величина: $\operatorname{cap} E = \operatorname{cap}(A, C) = \inf\limits_{u \in W_0(E)} \int\limits_A |\nabla u|^n \, dm(x)$, где $W_0(E) = W_0(A, C)$ – семейство неотрицательных непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}$ с компактным носителем в A, таких что $u(x) \geq 1$ при $x \in C$ и $u \in ACL$. В формуле выше, как обычно, $|\nabla u| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (\partial_i u)^2\right)^{1/2}$. Говорят, что компакт C в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, имеет *нулевую ёмкость,* пишут $\operatorname{cap} C = 0$, если существует ограниченное открытое множество A, такое что $C \subset A$ и $\operatorname{cap}(A, C) = 0$. Следующее утверждение может быть найдено в работе [11; теорема 1].

Предложение 7. *Открытое дискретное отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является кольцевым Q-отображением в точке $x_0 \in D$, $Q \in L^1_{loc}(D)$, тогда и только тогда, когда для произвольных $0 < r_1 < r_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ и произвольного конденсатора $E = \left(B(x_0, r_2), \overline{B(x_0, r_1)}\right)$ ёмкость конденсатора $f(E)$ удовлетворяет условию* $\operatorname{cap} f(E) \leq \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}}$, *где $I = I(x_0, r_1, r_2)$ задаётся соотношением* $I = I(x_0, r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}$.

Доказательство теоремы 1. Как обычно, мы придерживаемся соотношений: $a/\infty = 0$ при $a \neq \infty$, $a/0 = \infty$ при $a > 0$ и $0 \cdot \infty = 0$ (см. [10; с. 18, § 3, гл. I]). Для произвольных $0 < r_1 < r_2 < r_0 = 1$ рассмотрим функцию $\psi(t) = \begin{cases} 1/[t q_0^{\frac{1}{n-1}}(t)]\,, & t \in (r_1, r_2)\,, \\ 0\,, & t \notin (r_1, r_2)\,. \end{cases}$ Заметим, что функция ψ удовлетворяет всем условиям леммы 1, в частности, ввиду предложения 7 имеем неравенство $\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t q_0^{1/(n-1)}(t)} < \infty$. Действительно, если бы $\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t q_0^{1/(n-1)}(t)} = \infty$, то по этому предложению множество $f(\overline{B(0, r_1)})$ имело бы ёмкость нуль, но тогда $\operatorname{Int} f(\overline{B(0, r_1)}) = \varnothing$ (см. [2; следствие 2.5, гл. III]), что невозможно ввиду локальной гомеоморфности (открытости) отображения f. По теореме Фубини (см. [10; теорема 8.1, гл. III]) имеем $\int\limits_{r_1<|x|<r_2} Q(x)\cdot\psi^n(|x|)\,dm(x) = \omega_{n-1}\cdot I(r_1,r_2)$. Таким образом, первая часть заключения теоремы 1 следует из леммы 1.

Для доказательства второй части теоремы выберем $\delta>0$ и произвольную функцию $Q\in L^1_{loc}(\mathbb{B}^n)$, $Q\ge 1$ п.в., для которой выполнено соотношение (4). Полагаем $f(x)=\frac{x}{|x|}\rho(|x|)$, где $\rho(r)=\exp\left\{-\int\limits_r^1\frac{dt}{t\widetilde{q}_0^{1/(n-1)}(t)}\right\}$, $\widetilde{q}_0(r):=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{|x|=r}\widetilde{Q}(x)\,dS$, $\widetilde{Q}(x) = \left\{\begin{array}{ll} Q(x), & |x|>\delta\ ,\\ 1/K\ , & |x|\le\delta\ ,\end{array}\right.$ где постоянная величина $K\ge 1$ будет выбрана ниже. Заметим, что отображение f является кольцевым $\widetilde{Q}$-гомеоморфизмом в точке $x_0=0$. Действительно, непосредственные вычисления приводят к равенству $f(S(0,r))=S(0,R)$, где $R:=\exp\left\{-\int\limits_r^1\frac{dt}{t\widetilde{q}_0^{1/(n-1)}(t)}\right\}$. В таком случае,

$f(\Gamma(S(0,r_1),S(0,r_2),A(0,r_1,r_2))) = \Gamma(S(0,R_1),S(0,R_2),A(0,R_1,R_2))$, где $R_i := \exp\left\{-\int\limits_{r_i}^1\frac{dt}{t\widetilde{q}_0^{1/(n-1)}(t)}\right\}$, $i=1,2$, а $A(0,r_1,r_2)$ обозначает сферическое кольцо с центром в нуле и радиусов $0<r_1<r_2<1$. Ввиду [5; раздел 7.5],

$M(f(\Gamma(S(0,r_1),S(0,r_2),A(0,r_1,r_2)))) = \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t\widetilde{q}_0^{1/(n-1)}(t)}\right)^{n-1}}$. В таком случае, f – кольцевой $\widetilde{Q}$-гомеоморфизм в точке $x_0=0$ ввиду предложения 7 и, значит, кольцевой Q-гомеоморфизм в нуле, поскольку $\widetilde{Q}(x)\le Q(x)$ почти всюду. Заметим, что при $\delta\to 0$ образ $f(B(0,\delta))$ шара $B(0,\delta)$ при отображении f содержит шар $B(0,\sigma)$, где σ может быть выбрано не зависящим от δ. Отобразим теперь шар $B(0,\sigma)$ при помощи некоторого отображения g, которое преднамеренно выберем отображением с ограниченным искажением с постоянной квазиконформности $K\ge 1$, являющимся локальным гомеоморфизмом и не являющимся инъективным в шаре $B(0,\sigma)$; например, в качестве g можно выбрать так называемое закручивание вокруг оси, ось вращения которого не содержится в шаре $\mathbb{B}^n=f(B(0,1))$ (см. [1; разд. 5.2, гл. I]). Заметим, что постоянная квазиконформности K не зависит от δ. Таким образом, нами построен локальный кольцевой $K\cdot Q(x)$-гомеоморфизм f_2 в нуле, $f_2=g\circ f$, не являющийся инъективным в шаре $B(0,\delta)$. Поскольку Q – произвольная локально интегрируемая функция, удовлетворяющая условиям $Q\ge 1$ и (4), мы можем заменить Q на Q/K в первой части доказательства. Таким образом, мы получили локальный кольцевой $Q(x)$-гомеоморфизм в нуле с требуемыми свойствами. $\Box$

Простым следствием из первой части теоремы 1 является следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{R}^n$, $n\ge 3$, – локальный кольцевой Q-гомеоморфизм в точке $x_0=0$, такой что при некоторой постоянной $C>0$ и $r\to 0$*

$$q_0(r)\le C\cdot\log^{n-1}\frac{1}{r}\,. \tag{15}$$

Тогда отображение f инъективно в некотором шаре $B\left(0, \delta(n, Q)\right)$, где δ – положительное число, зависящее только от n и функции Q.

Доказательство. Необходимое заключение следует из теоремы 1, поскольку из условия (15) в силу теоремы Фубини (см. [10; теорема 8.1, гл. III]) вытекает, что $Q \in L^1_{loc}(\mathbb{B}^n)$, кроме того, из (15) вытекает также справедливость соотношения (3). □

Ниже изложен ещё один важный частный случай, когда локальный гомеоморфизм f имеет окрестность, зависящую только от размерности пространства n и мажоранты Q, в которой отображение f гомеоморфно.

Будем говорить, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$, пишем $\varphi \in FMO(x_0)$, если $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\Omega_n \cdot \varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_{\varepsilon}|\, dm(x) < \infty$, где $\overline{\varphi}_{\varepsilon} = \frac{1}{\Omega_n \cdot \varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0,\,\varepsilon)} \varphi(x)\, dm(x)$. Функции с конечным средним колебанием введены А. Игнатьевым и В. Рязановым в работе [12], см. также в [6; разд. 11.2], и представляют собой обобщение функций BMO, ограниченного среднего колебания по Ф. Джону-Л. Ниренбергу. Отличие BMO от FMO заключается, прежде всего, в том, что, в отличие от BMO, свойство FMO является локальным и выполнено лишь в окрестности фиксированной точки. Заметим также, что имеет место включение $BMO \subset FMO(x_0) \quad \forall\, x_0 \in D$, и что условие $\varphi \in FMO(x_0) \quad \forall\, x_0 \in D$ не влечёт условие $\varphi \in BMO_{loc}(D)$, см., напр., в [6; разд. 11.2]. Следующее утверждение также может быть найдено в [6; лемма 6.1].

Предложение 8. Предположим, что $0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $\varphi : D \to \mathbb{R}$ – неотрицательная функция, имеющая конечное среднее колебание в точке $x_0 = 0$. Тогда найдётся $\varepsilon_0 > 0$, такое что $\int\limits_{B(0,\varepsilon_0)} \frac{\varphi(x)\, dm(x)}{\left(|x| \log \frac{1}{|x|}\right)^n} < \infty$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $g : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, – локальный кольцевой Q-гомеоморфизм в точке $x_0 = 0$, такой что $Q \in FMO(0)$. Тогда отображение g инъективно в некотором шаре $B\left(0, \delta(n, Q)\right)$, где δ – некоторое положительное число, зависящее только от n и функции Q.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ – число из формулировки предложения 8. Рассмотрим отображение $f := g(x\varepsilon_0)$, $x \in \mathbb{B}^n$. Заметим, что g является локальным кольцевым $Q(\varepsilon_0 x)$-гомеоморфизмом в нуле. Применим лемму 1 для отображения g и функции $\psi = \frac{1}{\varepsilon_0 t \log \frac{1}{\varepsilon_0 t}}$. Согласно предложению 8 для указанной выше функции выполнено соотношение (6) при $\alpha = n$, кроме того, выполнены также соотношения (5) и (7). Необходимое заключение вытекает из леммы 1. □

1. *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982. – 285 с.
2. *Rickman S.* Quasiregular mappings. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1993. – 213 p.
3. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Topological and metric properties of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1971. – V. **488**. – P. 1-31.
4. *Koskela P., Onninen J. and Rajala K.*, Mappings of finite distortion: Injectivity radius of a local

homeomorphism, pp. 169-174 in "Future Trends in Geometric Function Theory RNC Workshop Jyväskylä 2003", Report 92, Department of Mathematics and Statistics, University of Jyväskylä, 2003.
5. *Väisälä J.* Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings. Lecture Notes in Math., **229**. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971. – 144 p.
6. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
7. *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Intern. Journ. Math. and Math. Scie. – 2003. – **22**. – P. 1397-1420.
8. *Полецкий Е.А.* Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Матем. сб. – 1970. – **83**, № 2. – С. 261-272.
9. *Куратовский К.* Топология. Т. 2. – М.: Мир, 1969. – 624 с.
10. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Издательство иностранной литературы, 1949. – 495 с.
11. *Севостьянов Е.А.* Об интегральной характеризации некоторых обобщений квазирегулярных отображений и значении условия расходимости интеграла в геометрической теории функций // Укр. матем. ж. – 2009. – Т. **61**, № 10. – С. 1367-1380.
12. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. матем. вестник. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395-417.

E. A. Sevost'yanov

On injectivity of local ring Q-homeomorphisms at $n \geq 3$.

For some class of the mappings satisfying the estimates of distortion of modulus of families of curves in a domain $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, more general than mappings with bounded distortion by Yu.G. Reshetnyak, it is obtained the analog of the theorem on local injectivity of local homeomorphisms. The main result is given in the terms of the integral average of quasiconformality coefficient.

Keywords: *mappings with finite and bounded distortion, moduli of curve's families, capacities of condensers.*

Є. О. Севостьянов

Про ін'єктивність локальних кільцевих Q-гомеоморфізмів при $n \geq 3$.

Для деякого класу відображень, більш загальних, ніж відображення з обмеженим спотворенням за Ю.Г. Решетняком, що задовольняють оцінки спотворення модулів сімей кривих (ємностей конденсаторів) в області $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, доведено аналог теореми про радіус ін'єктивності щодо локальних гомеоморфізмів. Основний результат наведено в термінах середнього значення від характеристики квазіконформності.

Ключові слова: *відображення зі скінченним і обмеженим спотворенням, модулі сімей кривих, ємності конденсаторів.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`brusin2006@rambler.ru`

Получено 07.04.13