УДК 531.36, 531.38

©2012. **Т. В. Хомяк**

О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОГО ВРАЩЕНИЯ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА С ЖИДКОСТЬЮ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ТВЕРДЫМИ ТЕЛАМИ

Аналитически показана и численно подтверждена возможность стабилизации при помощи вращающихся твердых тел неустойчивого вращения волчка Лагранжа с произвольной осесимметричной полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью. Проведены исследования влияния основных параметров вращающихся твердых тел на эффект стабилизации.

Ключевые слова: *волчок Лагранжа, идеальная жидкость, устойчивость, пассивная стабилизация, эллипсоидальная полость.*

1. Введение. Основным вопросом при исследовании движения твердых тел с полостями, содержащими жидкость, является вопрос устойчивости движения твердого тела, так как относительное движение жидкости в полости оказывает дестабилизирующее воздействие на динамику твердого тела. В этой связи возникает задача о поиске возможностей стабилизации неустойчивого движения твердого тела с жидкостью.

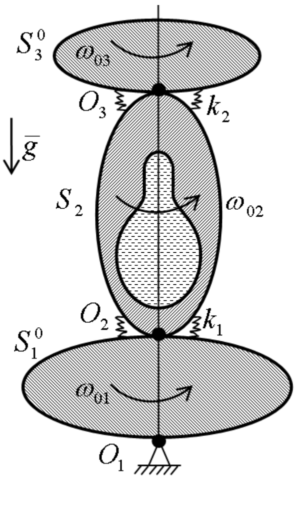


Рис. 1.

Очевидно, что первой возможностью стабилизации является ограничение подвижности жидкости путем введения в полость различных перегородок [1]. Другой возможностью стабилизации является использование гироскопических сил. Например, можно попытаться стабилизировать неустойчивое вращение твердого тела с жидкостью при помощи вращающихся твердых тел, связанных с телом общими точками и упругими восстанавливающими моментами.

Так, в работах [2, 3] показана возможность стабилизации неустойчивого вращения твердого тела с жидкостью одним вращающимся твердым телом, а в работе [4] рассмотрена задача о возможности стабилизации двумя твердыми телами. В данной статье обобщаются результаты работы [4].

2. Постановка задачи. Рассмотрим несвободное (точка O_1 неподвижна) движение системы связанных твердых тел (рис. 1). Второе вращающееся тело S_2 содержит произвольную осесимметричную полость, целиком заполненную идеальной, однородной и несжимаемой жидкостью. Твердые тела S_1^0 и S_3^0 связаны с телом S_2 в точках O_2 и O_3 при помощи упругих восстанавливающих сферических шарниров с коэффициентами упругости, соответственно, k_1 и k_2 (k_1, $k_2 > 0$). В невозмущенном движении твердые тела S_i^0 вращаются с угловыми скоростями ω_{0i} вокруг общей оси симметрии.

Поставим задачу о возможности стабилизации неустойчивого несвободного движения волчка Лагранжа вращающимися твердыми телами S_1^0 и S_3^0.

В работе [5] получены уравнения движения системы n упруго связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость. В основе этих уравнений лежат известные уравнения движения n гиростатов, полученные П.В. Харламовым, а уравнения возмущенного движения вращающейся идеальной жидкости взяты из работ Л.В. Докучаева и Р.В. Рвалова [6], Р.В. Рвалова и В.М. Рогового [7].

Согласно работе [5] частотное уравнение возмущенного движения рассматриваемой механической системы имеет вид

$$\begin{gathered}F_1F_2F_3 + 2\mu_2\left(\mu_1 + k_1/\lambda^2\right)\left(\mu_3 + k_2/\lambda^2\right) - \mu_2^2F_2 - \\ - F_1\left(\mu_3 + k_2/\lambda^2\right)^2 - F_3\left(\mu_1 + k_1/\lambda^2\right)^2 = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

где

$$\begin{gathered}F_j = A_j' + \frac{C_j\omega_{0j}}{\lambda} + \frac{a_jg - k_{j-1} - k_j}{\lambda^2} \quad (k_0 = k_3 = 0, \quad j = 1,3), \\ F_2 = A_2' + \frac{C_2\omega_{02}}{\lambda} + \frac{a_2g - k_1 - k_2}{\lambda^2} - (\lambda + \omega_{02})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E_n}{\lambda + \tilde{\lambda}_n}, \\ A_1' = A_1 + (m_2 + m_3)s_1^2, \quad A_2' = A_2 + m_3s_2^2, \quad A_3' = A_3, \\ \mu_1 = s_1a_2, \quad \mu_2 = s_1a_3, \quad \mu_3 = s_2a_3, \quad \tilde{\lambda}_n = (1 - \lambda_n/\omega_{02})\,\omega_{02}, \\ a_1 = m_1c_1 + s_1(m_2 + m_3), \quad a_2 = m_2c_2 + s_2m_3, \quad a_3 = m_3c_3,\end{gathered} \tag{2}$$

A_j, C_j – соответственно экваториальный и осевой моменты инерции тел S_1^0, S_2 и S_3^0 относительно точки O_j, ω_{0j} – угловая скорость твердого тела S_j^0; $s_1 = O_1O_2$, $s_2 = O_2O_3$, $c_j = O_j\tilde{C}_j$, $\tilde{C}_j$ – центр масс тела S_j, m_j – масса тела S_j $(j = \overline{1,3})$.

Если в точках O_2 или O_3 отсутствует шарнир (жесткое соединение), то возникает задача о стабилизации одним вращающимся твердым телом. Эта задача была рассмотрена в работах [2, 3].

Как известно, в большинстве случаев основной эффект влияния жидкости на движение твердого тела можно учесть, рассматривая только основной тон колебания жидкости $(n = 1)$ [6].

С учетом основного тона колебания жидкости $(n = 1)$ уравнение (1) запишется в виде полинома 7-ой степени

$$b_0\lambda^7 + b_1\lambda^6 + b_2\lambda^5 + b_3\lambda^4 + b_4\lambda^3 + b_5\lambda^2 + b_6\lambda + b_7 = 0, \tag{3}$$

где

$$\begin{gathered}b_0 = b_0^*(E_1), \quad b_j = b_{j-1}^*(0)\tilde{\lambda}_1 + b_j^* \quad (j = \overline{1,7}), \quad b_0^*(E_1) = A_1'A_2^*A_3' - A_1'\mu_3^2 - \\ - A_2^*\mu_2^2 - A_3'\mu_1^2 + 2\mu_1\mu_2\mu_3, \quad b_1^*(E_1) = (A_2^*A_3' - \mu_3^2)\tilde{C}_1 + (A_1'A_3' - \mu_2^2)C_2^* + \\ + (A_1'A_2^* - \mu_1^2)\tilde{C}_3, \quad b_2^*(E_1) = [(\mu_2 + \mu_3)^2 - (A_1' + A_2^* + 2\mu_1)A_3']k_1 + [(\mu_1 + \\ + \mu_2)^2 - (A_2^* + A_3' + 2\mu_3)A_1']k_2 + \tilde{C}_1C_2^*A_3' + \tilde{C}_1\tilde{C}_3A_2^* + C_2^*\tilde{C}_3A_1' + [(A_2^*A_3' - \\ - \mu_3^2)a_1 + (A_1'A_3' - \mu_2^2)a_2 + (A_1'A_2^* - \mu_1^2)a_3]g, \quad b_3^*(E_1) = \tilde{C}_1C_2^*\tilde{C}_3 - [(A_1' + \\ + A_2^* + 2\mu_1)\tilde{C}_3 + (\tilde{C}_1 + C_2^*)A_3']k_1 - [(A_2^* + A_3' + 2\mu_3)\tilde{C}_1 + (C_2^* + \tilde{C}_3)A_1']k_2 +\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
+[(C_2^*A_3'+\tilde{C}_3A_2^*)a_1+(\tilde{C}_1A_3'+\tilde{C}_3A_1')a_2+(\tilde{C}_1A_2^*+C_2^*A_1')a_3]g, \quad b_4^*(E_1)= \\
=(A_1'+A_2^*+A_3'+2\mu_1+2\mu_2+2\mu_3)k_1k_2-[(\tilde{C}_1+C_2^*)\tilde{C}_3+g(A_1'+A_2^*+ \\
+2\mu_1)a_3+g(a_1+a_2)A_3']k_1-[(C_2^*+\tilde{C}_3)\tilde{C}_1+g(A_2^*+A_3'+2\mu_3)a_1+g(a_2+ \\
+a_3)A_1']k_2+[C_2^*\tilde{C}_3a_1+\tilde{C}_1\tilde{C}_3a_2+\tilde{C}_1C_2^*a_3+g(A_1'a_2a_3+A_2^*a_1a_3+A_3'a_1a_2)]g, \\
b_5^*(E_1)=(\tilde{C}_1+C_2^*+\tilde{C}_3)k_1k_2-g[(\tilde{C}_1+C_2^*)a_3+(a_1+a_2)\tilde{C}_3]k_1-g[(C_2^*+ \\
+\tilde{C}_3)a_1+(a_2+a_3)\tilde{C}_1]k_2+g^2(\tilde{C}_1a_2a_3+C_2^*a_1a_3+\tilde{C}_3a_1a_2), \quad b_6^*(E_1)=[(a_1+ \\
+a_2+a_3)k_1k_2-(a_1+a_2)a_3k_1g-(a_2+a_3)a_1k_2g+a_1a_2a_3g^2]g, \quad \tilde{E}_1=E_1\omega_{01}, \\
C_2^*=\tilde{C}_2-\tilde{E}_1, \quad A_2^*=A_2'-E_1, \quad b_7^*=0, \quad \tilde{C}_j=C_j\omega_{0j} \quad (j=\overline{1,3}).
\end{gathered} \tag{4}
$$

3. Метод исследования. Необходимым условием устойчивости и пассивной стабилизации механической системы является условие действительности всех корней полученного уравнения (3). В настоящее время известен ряд критериев действительности всех корней уравнений n-ой степени. Однако для поставленой задачи стабилизации из-за многопараметричности и сложности коэффициентов частотного уравнения необходимы более удобные критерии. Для рассматриваемого класса задач наиболее удобным является критерий, предложенный в работе [8].

Стабилизировать неустойчивое вращение волчка Лагранжа с жидкостью можно при помощи угловых скоростей вращающихся твердых тел ω_{01} и ω_{03}, коэффициентов упругости шарниров k_1 и k_2, а также при помощи параметров твердых тел A_1, A_3, C_1, C_3, m_1, m_3, c_1, c_3.

Стабилизация при помощи угловой скорости вращения и осевого момента инерции твердых тел. Так как эти величины в коэффициенты уравнения (3) входят в виде произведения (кинетического момента), то для простоты записи введем следующие обозначения $\omega_{10}=C_1\omega_{01}$, $\omega_{30}=C_3\omega_{03}$. Для исследования влияния параметров ω_{10} и ω_{30} на возможность стабилизации представим коэффициенты (4) в виде: $b_1=a_{11}\omega_{10}+a_{13}\omega_{30}+\tilde{b}_1$, $b_2=a_{21}\omega_{10}+a_{23}\omega_{30}+a_{213}\omega_{10}\omega_{30}+\tilde{b}_2$, $b_3=a_{31}\omega_{10}+a_{33}\omega_{30}+a_{313}\omega_{10}\omega_{30}+\tilde{b}_3$, $b_4=a_{41}\omega_{10}+a_{43}\omega_{30}+a_{413}\omega_{10}\omega_{30}+\tilde{b}_4$, $b_5=a_{51}\omega_{10}+a_{53}\omega_{30}+a_{513}\omega_{10}\omega_{30}+\tilde{b}_5$, $b_6=a_{61}\omega_{10}+a_{63}\omega_{30}+\tilde{b}_6$. После подстановки этих соотношений в условия действительности корней уравнения 7-ой степени [4, 8] получается система шести неравенств 2-ой, 4-ой, 6-ой, 8-ой, 10-ой и 12-ой степени относительно ω_{10} и ω_{30}. Ввиду громоздкости полученных неравенств рассмотрим частный случай, когда $\omega_{10}=\omega_{30}=\omega_0$ и $k_1=k_2=k$, тогда условия устойчивости запишутся таким образом:

$$
\begin{cases}
d_{12}\omega_0^2+d_{11}\omega_0+d_{10}>0, \\
d_{26}\omega_0^6+d_{25}\omega_0^5+...+d_{21}\omega_0+d_{20}>0, \\
d_{310}\omega_0^{10}+d_{39}\omega_0^9+...+d_{31}\omega_0+d_{30}>0, \\
d_{414}\omega_0^{14}+d_{413}\omega_0^{13}+...+d_{41}\omega_0+d_{40}>0, \\
d_{518}\omega_0^{18}+d_{517}\omega_0^{17}+...+d_{51}\omega_0+d_{50}>0, \\
d_{620}\omega_0^{20}+d_{619}\omega_0^{19}+...+d_{61}\omega_0+d_{60}>0,
\end{cases} \tag{5}
$$

где

$$d_{12} = 2(3a_{11}^2 - 7b_0a_{22}), \quad d_{26} = 35a_{22}^2(a_{11}^2 - 4b_0a_{22}), \quad a_{22} = A_2^*, \quad d_{310} = \tilde{d}_{31}k + \tilde{d}_{30}k,$$
$$\tilde{d}_{31} = 980a_{22}^3(a_{11}^2 - 4b_0a_{22}), \quad a_{11} = A_2^*A_3' - \mu_3^2 + A_1'A_2^* - \mu_1^2, \quad d_{414} = \tilde{d}_{43}k^3 + \tilde{d}_{42}k^2 +$$
$$+\tilde{d}_{41}k + \tilde{d}_{40}, \quad \tilde{d}_{43} = 32928a_{22}^3(a_{11}^2 - 4b_0a_{22}), \quad d_{518} = \tilde{d}_{55}k^5 + \tilde{d}_{54}k^4 + ... + \tilde{d}_{51}k + \tilde{d}_{50},$$
$$\tilde{d}_{55} = 614656a_{22}^3\tilde{\lambda}_1^2(a_{11}^2 - 4b_0a_{22}), \quad d_{620} = \tilde{d}_{69}k^9 + \tilde{d}_{68}k^8 + ... + \tilde{d}_{61}k + \tilde{d}_{60}, \quad \tilde{d}_{69} =$$
$$= 8605184a_{22}^3\tilde{\lambda}_1^4(a_{11}^2 - 4b_0a_{22}), \quad b_0 = A_1'A_2^*A_3' - A_1'\mu_3^2 - A_2^*\mu_2^2 - A_3'\mu_1^2 + 2\mu_1\mu_2\mu_3.$$

В обозначении d_{ij}: i – номер неравенства, j – степень параметра ω_0 ($i = \overline{1,6}; j = \overline{1,20}$).

Коэффициенты d_{12} и d_{26} не зависят от k и будут положительными при выполнении неравенств

$$3a_{11}^2 - 7b_0a_{22} > 0, \quad a_{11}^2 - 4b_0a_{22} > 0. \tag{6}$$

Из второго неравенства (6) следует выполнение первого. Подставив во второе неравенство (6) значения a_{11}, a_{22}, b_0 из соотношений (5), получим

$$(A_2^*A_3' - \mu_3^2 + A_1'A_2^* - \mu_1^2)^2 - 4(A_1'A_2^*A_3' - A_1'\mu_3^2 - A_2^*\mu_2^2 - A_3'\mu_1^2 + 2\mu_1\mu_2\mu_3)A_2^* > 0. \tag{7}$$

С учетом значений A_1', A_3', μ_1, μ_2, μ_3 из формул (2) неравенство (7) записывается в виде

$$x_2A_2^{*2} + x_1A_2^* + x_0 > 0, \tag{8}$$

где

$$x_2 = (A_1 - A_3 + s_1^2(m_2 + m_3))^2 + 4s_1^4m_3^2c_3^2, \quad x_1 = 2[-s_1^4m_2^3 - s_1^2y_1m_2^2 + 4s_1^2m_3y_2m_2+$$
$$+4m_3y_1y_3]c_2^2, x_0 = [s_1^4m_2^4 - 8s_1^2m_3y_2m_2^2 + 16m_3^2y_3^2]c_2^4, \quad y_1 = A_1 - A_3 + m_3s_1^2,$$
$$y_2 = A_1 - A_3 - m_3c_3^2, \quad y_3 = A_1 - A_3 + m_3c_3^2.$$

Квадратное неравенство (8) выполнено, так как его дискриминант

$$D = -16m_3^2c_3^2c_2^4s_1^2((2m_3 + m_2)(2(A_3 - A_1) - m_2s_1^2) - 4m_3^2c_3^2)^2 < 0, \quad x_2 > 0.$$

Следовательно, неравенства (6) выполнены.

Коэффициенты d_{310}, d_{414}, d_{518} и d_{620} являются многочленами относительно параметра k с положительными старшими коэффициентами, так как выполнено условие (6) и $a_{22} > 0$. При достаточно больших значениях k указанные коэффициенты будут положительными. Таким образом, все коэффициенты при старших степенях в системе неравенств (5) положительные, откуда следует, что при достаточно больших ω_0 эти неравенства всегда будут верными.

Следовательно, при достаточно больших значениях ω_0 и k аналитически показана возможность стабилизации при помощи двух вращающихся твердых тел неустойчивого вращения волчка Лагранжа с произвольной осесимметричной полостью, содержащей идеальную жидкость. Количественная оценка величин ω_0 и k, при которых наблюдается эффект стабилизации, будет установлена при проведении численных расчетов.

Влияние коэффициентов упругости сферических шарниров на возможность стабилизации. Для исследования влияния коэффициентов упругости шарниров k_1 и k_2 на возможность стабилизации представим коэффициенты (4) таким образом: $b_2 = a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \tilde{b}_2$, $b_3 = a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + \tilde{b}_3$, $b_4 = a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + {}$ ${}+a_{412}k_1k_2 + \tilde{b}_4$, $b_5 = a_{51}k_1 + a_{52}k_2 + a_{512}k_1k_2 + \tilde{b}_5$, $b_6 = a_{61}k_1 + a_{62}k_2 + a_{612}k_1k_2 + \tilde{b}_6$, $b_7 = a_{71}k_1 + a_{72}k_2 + a_{712}k_1k_2 + \tilde{b}_7$. Подставив эти соотношения в условия действительности корней уравнения 7-ой степени [4, 8], получим систему шести неравенств 1-ой, 3-ой, 5-ой, 7-ой, 9-ой и 11-ой степени относительно k_1 и k_2. Ввиду громоздкости полученных неравенств рассмотрим частный случай, когда $k_1 = k_2 = k$ и $\omega_{10} = \omega_{30} = \omega_0$, тогда условия устойчивости запишутся в виде

$$\begin{cases} d_{11}k + d_{10} > 0, \\ d_{23}k^3 + d_{22}k^2 + d_{21}k + d_{20} > 0, \\ d_{36}k^6 + d_{35}k^5 + ... + d_{31}k + d_{30} > 0, \\ d_{410}k^{10} + d_{49}k^9 + ... + d_{41}k + d_{40} > 0, \\ d_{514}k^{14} + d_{513}k^{13} + ... + d_{51}k + d_{50} > 0, \\ d_{618}k^{18} + d_{617}k^{17} + ... + d_{61}k + d_{60} > 0. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь

$$d_{11} = -14b_0a_{21}, \quad d_{23} = -28b_0a_{21}(5a_{21}^2 - 14b_0a_{42}), \quad d_{36} = 392b_0a_{42}(a_{21}^2 - 4b_0a_{42})\cdot$$
$$\cdot(5a_{21}^2 - 14b_0a_{42}), \quad d_{410} = 16464b_0a_{42}^3(a_{21}^2 - 4b_0a_{42})^2, \quad d_{514} = \tilde{d}_{52}\omega_0^2 + \tilde{d}_{51}\omega_0 + \tilde{d}_{50},$$
$$\tilde{d}_{52} = 307328b_0a_{42}^3(a_{21}^2 - 4b_0a_{42})^2, \quad d_{618} = \tilde{d}_{64}\omega_0^4 + \tilde{d}_{63}\omega_0^3 + ... + \tilde{d}_{61}\omega_0 + \tilde{d}_{60}, \quad \tilde{d}_{64} =$$
$$= 4302592b_0a_{42}^3\tilde{\lambda}_1^2(a_{21}^2 - 4b_0a_{42})^2, \quad b_0 = A_1'A_2^*A_3' - A_1'\mu_3^2 - A_2^*\mu_2^2 - A_3'\mu_1^2 + 2\mu_1\mu_2\mu_3,$$
$$a_{21} = -[(A_1' + A_2^* + 2\mu_1)A_3' - (\mu_2 + \mu_3)^2] - [(A_2^* + A_3' + 2\mu_3)A_1' - (\mu_1 + \mu_2)^2],$$
$$a_{42} = A_1' + A_2^* + A_3' + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3.$$

Как и ранее, введены обозначения d_{ij}: i – номер неравенства, j – степень параметра k ($i = \overline{1,6}$; $j = \overline{1,18}$).

Так как $a_{21} < 0$, $a_{42} > 0$ и $b_0 > 0$, то коэффициенты d_{11} и d_{410} – положительные. Коэффициенты d_{23} и d_{36} не зависят от ω_0 и будут положительными при выполнении условий

$$5a_{21}^2 - 14b_0a_{42} > 0, \quad a_{21}^2 - 4b_0a_{42} > 0. \tag{10}$$

Из второго неравенства (10) следует выполнение первого. Подставив во второе неравенство (10) значения a_{21}, a_{42}, b_0, получим

$$\begin{aligned} &((A_1' + A_2^* + 2\mu_1)A_3' - (\mu_2 + \mu_3)^2 + (A_2^* + A_3' + 2\mu_3)A_1' - \\ &- (\mu_1 + \mu_2)^2)^2 - 4(A_1' + A_2^* + A_3' + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3)\cdot \\ &\cdot(A_1'A_2^*A_3' - A_1'\mu_3^2 - A_2^*\mu_2^2 - A_3'\mu_1^2 + 2\mu_1\mu_2\mu_3) > 0. \end{aligned} \tag{11}$$

С учетом значений A_1', A_3', μ_1, μ_2, μ_3 из формул (2) неравенство (11) записывается в виде (8), у которого старший коэффициент положительный, а дискриминант отрицательный:

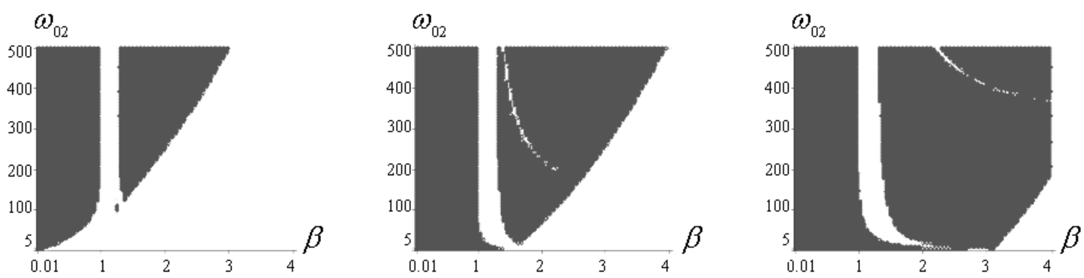
$$D = -16[s_1^3(s_1+c_2)(A_3+m_3c_3c_2)m_2^2 + s_1(2m_3c_3y_1c_2^2 + ((A_1-A_3)(A_3+3m_3c_3s_1)+ \\ + m_3s_1^2(3A_3+m_3c_3s_1))c_2 + s_1(A_3(2A_1-A_3)+s_1^2m_3(2A_3-m_3c_3)))m_2+ \\ + 4m_3^2s_1c_3(A_1-A_3+m_3c_3^2)c_2^2 + 2m_3c_2[m_3s_1^2(s_1-2c_3)y_2 + m_3c_3^2s_1(A_1+A_3)+ \\ + A_1^2c_3 + A_3s_1(A_1-A_3) - A_1c_3(A_3-m_3s_1^2)] + y_1(A_1A_3+m_3s_1^2y_2)]^2,$$

$$y_1 = A_1 - A_3 + m_3s_1^2, \quad y_2 = A_3 - m_3c_3^2.$$

Следовательно, условия (10) выполнены. Коэффициенты d_{514} и d_{618} являются многочленами относительно ω_0 с положительными коэффициентами при старших степенях и при достаточно больших значениях ω_0 будут положительными, а значит будет справедлива система неравенств (9).

Таким образом, при одновременно достаточно больших значениях ω_0 и k полученные системы неравенств (5) и (9) выполнены, и тем самым аналитически показана возможность стабилизации неустойчивого вращения несвободного волчка Лагранжа с жидкостью при помощи двух вращающихся твердых тел.

4. Анализ численных результатов. В качестве примера рассмотрим случай эллипсоидальной полости. Твердое тело S_2^0 выбиралось безмассовой ($m_{20}=0$) и безинерционной оболочкой ($A_{20}=C_{20}=0$), а вращающиеся твердые тела выбирались тонкими круговыми дисками с центром масс, совпадающим с общими точками ($c_1=c_3=0$). Области устойчивости (закрашенные) представлены в плоскости параметров ω_{02} и β ($\beta = c/a$, где a и c – полуоси эллипсоидальной полости, причем c – величина полуоси, направленной по оси вращения твердого тела с жидкостью).



а) $\omega_0 = 0$ б) $\omega_0 = 10^2$ в) $\omega_0 = 10^3$

Рис. 2. Области устойчивости при $k_1 = k_2 = 10^2$

Из рис. 2 видно, что при одновременном увеличении угловой скорости вращения твердых тел ($\omega_0 = \omega_{01} = \omega_{03}$) и коэффициентов упругости в сферических шарнирах область устойчивости увеличивается, а для $\omega_0 \geq 10^3$ и $k_1,\ k_2 \geq 10^2$ – совпадает с аналогичной областью устойчивости для статически уравновешенного волчка Лагранжа (рис. 2в). Таким образом, гироскопические силы и упругий момент эквивалентны силам, которые создают восстанавливающий момент, т.е. стабилизируют механическую систему.

Быстрее эффект стабилизации наступает в случае вращения волчка с жидкостью и двух твердых тел в противоположные стороны ($\omega_{02} > 0$, $\omega_0 < 0$), при $\omega_0 = -5 \cdot 10^3$ система стабилизируется.

5. Выводы. В работе получены необходимые условия устойчивости равномерного вращения несвободной системы трех волчков Лагранжа, один из которых содержит идеальную жидкость. Аналитически показана возможность стабилизации при помощи вращающихся твердых тел неустойчивого вращения несвободного волчка Лагранжа с произвольной осесимметричной полостью, содержащей идеальную жидкость. Результаты аналитических исследований подтверждены проведенными численными расчетами для эллипсоидальной полости, что дало возможность более точно оценить влияние основных параметров вращающихся твердых тел на стабилизацию волчка Лагранжа с жидкостью. Установлено, что эффективность стабилизации возрастает в случае вращения волчка с жидкостью и твердых тел в противоположные стороны.

1. *Кононов Ю.Н.* О влиянии перегородок в цилиндрической полости на устойчивость равномерного вращения волчка Лагранжа / Ю.Н. Кононов // Матем. физ. и нелин. механика. – 1992. – Вып. 17 (51). – С. 33-37.
2. *Кононов Ю.Н., Хомяк Т.В.* Об эффекте стабилизации неустойчивого вращения твердого тела с жидкостью вращающимся твердым телом // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 161-169.
3. *Kononov Y.N., Khomyak T.V.* On the rotation stabilization of the unstable gyroscope containing fluid by rotating the rigid body // Facta Universitatis. Series Mechanics, Automatic Control and Robotics. Placecountry-regionSerbia. – 2005. – Vol. 4, № 17. – P. 195-201.
4. *Хомяк Т.В.* О стабилизации неустойчивого вращения волчка Лагранжа с полостью, содержащей жидкость // Механика машин, механизмов и материалов. – 2008. – № 3 (4). – С. 71-74.
5. *Кононов Ю.Н.* О движении системы связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 207-216.
6. *Докучаев Л.В., Рвалов Р.В.* Об устойчивости стационарного вращения твердого тела с полостью, содержащей жидкость // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 2. – С. 6-14.
7. *Рвалов Р.В., Роговой В.М.* О вращательном движении тела с полостью, содержащей жидкость // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – № 3. – С. 15-20.
8. *Коваль В.И.* О действительности всех корней характеристического многочлена уравнений первого приближения в динамике твердого тела // Механика твердого тела. – 1999. – Вып. 28. – С. 130-145.

T. V. Khomyak

About stabilization of the unstable rotation of top Lagrange with fluid by rotating rigid bodies.

Stabilization possibility by means of rigid bodies of unstable rotation on top Lagrange with an arbitrary axisymmetrical cavity, fully filled ideal fluid is shown analytically and numeral proved. Researches of influence of basic parameters of the rigid bodies are conducted on the effect of stabilization.

Keywords: *top of Lagrange, ideal fluid, stability, passive stabilization, elliptic cavity.*

Т. В. Хом'як

Про стабілізацію нестійкого обертання вовчка Лагранжа з рідиною твердими тілами, що обертаються.

Аналітично показано і чисельно підтверджено можливість стабілізації нестійкого обертання вовчка Лагранжа з довільною осесиметричною порожниною, повністю заповненою ідеальною рідиною, за допомогою твердих тіл, що обертаються. Проведено дослідження впливу основних параметрів твердих тіл, що обертаються, на ефект стабілізації.

Ключові слова: *вовчок Лагранжа, ідеальна рідина, стійкість, пасивна стабілізація, еліпсоїдальна порожнина.*

Донецкий национальный ун-т
khomyak-tanya@rambler.ru

Получено 25.11.12