УДК 531.38

©2012. **В. И. Рязанов, Е. А. Севостьянов**

ТЕОРЕМЫ СХОДИМОСТИ ГОМЕОМОРФИЗМОВ В $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

В работе изучены некоторые проблемы сходимости общих пространственных гомеоморфизмов. В частности, здесь доказана теорема о сходимости обратных отображений, а также теорема о гомеоморфности предельного отображения.

Ключевые слова: *гомеоморфизмы, сходимость отображений, обратные отображения.*

В дальнейшем, в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$ мы используем *сферическую (хордальную) метрику* $h(x,y) := |\pi(x)-\pi(y)|$, где π – стереографическая проекция пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, т.е.

$$h(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}, \qquad x \neq \infty \neq y, \qquad h(x,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}\,.$$

Ясно, что расширенное пространство $\overline{\mathbb{R}^n}$ гомеоморфно единичной сфере $\mathbb{S}^n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. *Сферический (хордальный) диаметр* множества $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ есть величина

$$h(E) = \sup_{x,y \in E} h(x,y)\,.$$

Для точки $z \in \overline{\mathbb{R}^n}$ и множества $E \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ мы также определим расстояние $h(z,E)$ как точную нижнюю грань $h(z,y)$ по всем $y \in E$, а для множеств $F \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ и $E \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ – расстояние $h(F,E)$ как точную нижнюю грань $h(z,y)$ по всем $z \in F$ и $y \in E$. В дальнейшем $B^*(x_0,\rho)$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}^n}$, $\rho \in (0,1)$, обозначает шар $\{x \in \overline{\mathbb{R}^n} : h(x,x_0) < \rho\}$ относительно сферической метрики.

Начнём с простого следствия из теоремы Брауэра об инвариантности области.

Следствие 1. *Пусть U – открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^n}$ и $f : U \to \overline{\mathbb{R}^n}$ – непрерывное инъективное отображение. Тогда f – гомеоморфизм множества U на множество $V = f(U)$.*

Доказательство. Пусть $y_0 \in f(U)$ и $x_0 := f^{-1}(y_0)$. Полагаем $B = B^*(x_0, \varepsilon_0)$, где $0 < \varepsilon_0 < h(x_0, \partial U)$. Тогда $\overline{B} \subset U$. Заметим, что отображение $f_0 := f|_{\overline{B}}$ инъективно, непрерывно и отображает компакт $\overline{B}$ в хаусдорфово топологическое пространство $\mathbb{R}^n$. Следовательно, f_0 является гомеоморфизмом множества $\overline{B}$ на топологическое пространство $f_0(\overline{B})$ относительно индуцированной топологии $\mathbb{R}^n$ (см. теорему 41.III.3 в [5]). По теореме Брауэра об инвариантности областей (см. теорему 4.7.16 в [7]), f отображает шар B на область в $\overline{\mathbb{R}^n}$ гомеоморфно. Следовательно, отображение $f^{-1}(y)$ непрерывно в точке y_0 и, значит, отображение $f : U \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является гомеоморфизмом. $\Box$

Ядром последовательности открытых множеств $\Omega_l \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, $l = 1, 2, \ldots$ называется открытое множество

$$\Omega_0 \;=\; \mathrm{Kern}\ \Omega_l \;:\;=\; \bigcup_{m=1}^{\infty}\ \mathrm{Int}\left(\bigcap_{l=m}^{\infty}\ \Omega_l\right),$$

где Int A обозначает множество, состоящее из всех внутренних точек A; другими словами, Int A есть объединение всех открытых шаров внутри A относительно сферической метрики.

Следующее предложение для случая плоскости было доказано в работе [1], см. также предложение 2.7 в монографии [2].

Предложение 1. Пусть $g_l\ :\ D\ \to\ D_l'$, $D_l'\ :=\ g_l(D)$ – последовательность гомеоморфизмов, заданных в области $D\subseteq\overline{\mathbb{R}^n}$. Предположим, что последовательность g_l сходится локально равномерно при $l\to\infty$ к инъективному отображению $g:D\to D':=g(D)\subset\overline{\mathbb{R}^n}$ относительно сферической метрики. Тогда отображение g является гомеоморфизмом и, кроме того, $D'\subset\mathrm{Kern}\,D_l'$.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что отображение g непрерывно как локально равномерный предел непрерывных отображений, см. теорему 13.VI.3 в [4]. Тогда g является гомеоморфизмом по следствию 1.

Пусть $y_0\in D'$. Рассмотрим сферический шар $B^*(z_0,\rho)$, где $z_0:=g^{-1}(y_0)\in D$ и $\rho<h(z_0,\partial D)$. Тогда, ввиду компактности сферы $\partial B^*(z_0,\rho)$,

$$r_0\ :\ =\ \min_{z\in\partial B^*(z_0,\rho)}\ h(y_0,g(z))\ >\ 0\ .$$

Далее, найдётся достаточно большое целое число N такое, что $g_l(z_0)\in B^*(y_0,r_0/2)$ для всех $l\geq N$ и, кроме того,

$$B^*(y_0,r_0/2)\ \cap\ g_l(\partial B^*(z_0,\rho))\ =\ B^*(y_0,r_0/2)\ \cap\ \partial g_l(B^*(z_0,\rho))\ =\ \varnothing$$

поскольку $g_l\to g$ на компактном множестве $\partial B^*(z_0,\rho)$. Следовательно, в силу связности шаров,

$$B^*(y_0,r_0/2)\ \subset\ g_l(B^*(z_0,\rho))\qquad\forall\ l\geq N\,,$$

см., напр., теорему 46.I.1 в [5]. Следовательно, $y_0\in$ Kern D_l', т.е., $D'\subset$ Kern D_l' в силу произвольности y_0. $\Box$

Замечание 1. В частности, из предложения 1 следует, что $D':=g(D)\subseteq\mathbb{R}^n$, если $D_l':=g_l(D)\subseteq\mathbb{R}^n$ при всех $l=1,2,\ldots$.

Следующее утверждение для плоского случая может быть найдено в работе [3], см. также лемму 2.16 в монографии [2].

Лемма 1. *Пусть D – область в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $l=1,2,\ldots$, и пусть f_l – последовательность гомеоморфизмов D в $\overline{\mathbb{R}^n}$ такая, что f_l сходится при $l\to\infty$ локально равномерно к гомеоморфизму f из D в $\overline{\mathbb{R}^n}$ относительно сферической метрики. Тогда также $f_l^{-1}\to f^{-1}$ локально равномерно в области $f(D)$.*

Доказательство. В силу предложения 1, для фиксированного компакта $C\subset f(D)$, имеем, что $C\subset f_l(D)$ для всех $l\geq l_0=l_0(C)$. Полагаем $g_l=f_l^{-1}$, $g=f^{-1}$.

Заметим, что локально равномерная сходимость $g_l \to g$ эквивалентна так называемой непрерывной сходимости, означающей, что $g_l(u_l) \to g(u_0)$ для каждой сходящейся последовательности $u_l \to u_0$ в $f(D)$; см., напр., теоремы 20.VIII.2 и 21.X.4 в [4]. Итак, пусть $u_l \in f(D)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ и $u_l \to u_0$ при $l \to \infty$. Покажем, что $z_l := g(u_l) \to z_0 := g(u_0)$ при $l \to \infty$.

Хорошо известно, что каждое метрическое пространство является $\mathcal{L}^*$-пространством, т.е., пространством со сходимостью (см. теорему 21.II.1 в [4]); в частности, аксиома Урысона в компактных пространствах утверждает, что $z_l \to z_0$ при $l \to \infty$ тогда и только тогда, когда для каждой сходящейся подпоследовательности $z_{l_k} \to z_*$, имеет место равенство $z_* = z_0$ (см., напр., определение 20.I.3 в [4]). Следовательно, достаточно доказать равенство $z_* = z_0$ для каждой сходящейся подпоследовательности $z_{l_k} \to z_*$ при $k \to \infty$. Пусть D_0 – подобласть области D такая, что $z_0 \in D_0$ и $\overline{D_0}$ – компактное подмножество D. По предложению 1, $f(D_0) \subset \mathrm{Kern} f_l(D_0)$ и, следовательно, u_0 вместе с некоторой своей окрестностью принадлежит $f_{l_k}(D_0)$ при всех $k \geq K$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $u_{l_k} \in f_{l_k}(D_0)$, т.е., $z_{l_k} \in D_0$ при всех $k = 1, 2, \ldots$ и, следовательно, $z_* \in D$. В силу непрерывной сходимости $f_l \to f$, мы получим, что $f_{l_k}(z_{l_k}) \to f(z_*)$, т.е., $f_{l_k}(g_{l_k}(u_{l_k})) = u_{l_k} \to f(z_*)$. Из последнего соотношения вытекает, что $u_0 = f(z_*)$, т.е., $f(z_0) = f(z_*)$ и, значит, $z_* = z_0$. $\Box$

Следующее утверждение на плоскости было доказано в работе [6], см. предложение 2.6 в монографии [2].

Теорема 1. *Пусть D – область в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, f_m, $m = 1, 2, \ldots,$ – последовательность гомеоморфизмов D в $\overline{\mathbb{R}^n}$, сходящаяся локально равномерно к дискретному отображению $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ относительно сферической метрики. Тогда f – гомеоморфизм D в $\overline{\mathbb{R}^n}$.*

Доказательство. Прежде всего, докажем от противного, что f – инъективно. Действительно, предположим, что существуют $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$ такие, что $f(x_1) = f(x_2)$ и $x_1 \neq \infty$. Полагаем $B_t = B(x_1, t)$. Пусть t_0 – некоторое число такое, что $\overline{B_t} \subset D$ и $x_2 \notin \overline{B_t}$ при каждом $t \in (0, t_0]$. По теореме Жордана-Брауэра, см. теорему 4.8.15 в [7], $\gamma_m : = f_m(\partial B_t) = \partial f_m(B_t)$ разбивает $\overline{\mathbb{R}^n}$ на две компоненты

$$C_m := f_m(B_t), \qquad C_m^* = \overline{\mathbb{R}^n} \setminus \overline{C_m}\ ,$$

для которых γ_m является общей границей. По построению $y_m := f_m(x_1) \in C_m$ и $z_m := f_m(x_2) \in C_m^*$. Заметим, что шар $B^*(y_m, h(y_m, \partial C_m))$ содержится внутри множества C_m и, следовательно, его замыкание лежит в $\overline{C_m}$. Следовательно,

$$h(y_m, \partial C_m) < h(y_m, z_m), \qquad m = 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

В силу компактности множества $\partial C_m = f_m(\partial B_t)$, найдётся последовательность $x_{m,t} \in \partial B_t$ такая, что

$$f_m(x_{m,t})\,, \qquad m = 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

В силу компактности множества ∂B_t, для каждого $t \in (0, t_0]$ найдётся элемент $x_t \in \partial B_t$ такой, что $h(x_{m_k,t}, x_t) \to 0$ при $k \to \infty$ для некоторой подпоследовательности m_k. Поскольку локально равномерная сходимость непрерывных функций в метрическом пространстве влечёт непрерывную сходимость, см., напр., теорему 21.X.3 в [4]), получаем, что

$$h(f_{m_k}(x_{m_k,t}), f(x_t)) \to 0$$

при $k \to \infty$. Следовательно, из (1) и (2) имеем, что

$$h(f(x_1), f(x_t)) \leq h(f(x_1), f(x_2)) \qquad \forall \quad t \in (0, t_0]\,.$$

Однако, по предположению $f(x_1) = f(x_2)$ и, следовательно, $f(x_t) = f(x_1)$ для каждого $t \in (0, t_0]$. Последнее соотношение противоречит дискретности отображения f. Следовательно, отображение f инъективно.

Осталось доказать, что отображения f и f^{-1} непрерывны. Отображение f непрерывно как локально равномерный предел непрерывных отображений, см., напр., теорему 13.VI.3 в [4]. Наконец, отображение f^{-1} непрерывно ввиду следствия 1. $\Box$

1. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On Beltrami equations with two characteristics // Comp. Var. Ell. Equ. – 2009. – V. 54, no. 10. – P. 933-950.
2. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami Equation: A Geometric Approach, Developments in Mathematics, **26**. – New York: Springer, 2012.
3. *Kolomoitsev Yu., Ryazanov V.* Uniqueness of approximate solutions of the Beltrami equations // Proc. Inst. Appl. Math. & Mech. NASU. – 2009. – V. 19. – P. 116-124.
4. *Куратовский К.* Топология, Т. 1. – М.: Мир, 1966.
5. *Куратовский К.* Топология, Т. 2. – М.: Мир, 1969.
6. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On strong solutions of the Beltrami equations // Comp. Var. Ell. Equ. – 2010. – V. 55, no. 1-3. – P. 219-236.
7. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. – М.: Мир, 1971.

V. I. Ryazanov, E. A. Sevost'yanov

About convergence of homeomorphisms in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$..

It was studied some convergence problems for general spatial homeomorphisms in the paper. In particular, it was proved here the theorem on convergence of inverse mappings as well as the theorem on a homeomorphic limit mapping.

Keywords: *homeomorphisms, convergence of the mappings, inverse mappings.*

В. І. Рязанов, Є.О. Севостьянов

Теореми збіжності гомеоморфізмів в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. .

У роботі вивчено деякі проблеми збіжності загальних просторових гомеоморфізмів. Зокрема, тут доведено теорему про збіжність обернених відображень, а також теорему про гомеоморфність граничного відображення.

Ключові слова: *гомеоморфізми, збіжність відображень, обернені відображення.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`vlryazanov1@rambler.ru`
`esevostyanov2009@mail.ru`

Получено 11.11.12