УДК 517.444

 О. А. Очаковская

ТЕОРЕМЫ ОБ ОДНОМ РАДИУСЕ НА НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Изучается допустимая скорость убывания ненулевой функции, имеющей нулевые интегралы по всем шарам фиксированного радиуса. Рассмотрен случай, когда функция задана в области, содержащей полупространство.

Ключевые слова: *сферические средние, периодичность в среднем.*

1. Введение и формулировка основного результата. Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$. Для всякой области $O \subset \mathbb{R}^n$ и фиксированного $r > 0$ символом $V_r(O)$ обозначим множество всех функций $f \in L^1_{loc}(O)$, имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса r, лежащих в O (если O не содержит таких шаров, то мы полагаем $V_r(O) = L^1_{loc}(O)$). Описание классов $V_r(O)$ для различных O было получено в [1, part 2] (см. также [2], [3] и [4, теорема 16.4.1]). В данной работе рассматривается следующая проблема (см [1, part 2, problem 4.15]).

Проблема 1. Пусть O – неограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и $r > 0$ фиксировано. Предположим, что $f \in V_r(O)$ и для почти всех $x \in O$ выполнено неравенство

$$|f(x)| \leq F(|x|), \tag{1}$$

где F – заданная положительная функция на $[0, +\infty)$. Для каких F, O, r отсюда следует, что $f = 0$?

Первый точный результат в этом направлении был получен Д.Смитом [5] для случая $O = R^n$ Он установил, что если $f \in (V_r \cap C)(\mathbb{R}^n)$ и

$$\lim_{t\to+\infty} F(t)t^{\frac{n-1}{2}} = 0, \tag{2}$$

то $f = 0$. При этом условие (2) нельзя заменить условием

$$F(t) = O(t^{\frac{1-n}{2}}) \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \tag{3}$$

(см. [5]). Известен также ряд результатов, в которых вместо условия (2) рассматриваются оценки сверху для различных интегральных средних функции F. Например, если $f \in V_r(\mathbb{R}^n)$ и при некотором $p \in \left[1, \dfrac{2n}{n-1}\right]$

$$\int_0^{+\infty} t^{n-1}(F(t))^p dt < +\infty,$$

то $f = 0$, а при $p > \dfrac{2n}{n-1}$ это уже не верно (см. [6], где утверждение сформулировано для сферических средних). Более общие и точные результаты в этом направлении были получены в [7], где условия убывания F на бесконечности определяются ростом величины

$$\int_0^R t^{n-1}(F(t))^p dt$$

при $R \to +\infty$ и $p \in \left[1, \dfrac{2n}{n-1}\right]$. Для случая $O = \mathbb{R}^n$ рассматривались также аналоги проблемы 1, в которых поведение функции в правой части неравенства (1) различно по разным переменным (см. [8]).

Для областей O, отличных от $\mathbb{R}^n$, проблема 1 исследована мало. Все имеющиеся результаты касаются случая, когда O содержит внешность шара

$$U_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > R\}$$

при некотором $R > 0$ (см. [1], [3], [9], [10]). Наиболее сильные результаты окончательного характера для широкого класса таких O получены В.В.Волчковым в [1, part 3], где рассмотрена более общая ситуация, когда класс $V_r(O)$ заменяется пространством решений уравнения свертки специального вида. Следуя [1, part 3, definition 2.1], введем следующее определение.

Определение 1. Область $O \subset \mathbb{R}^n$ называется r-областью, если выполнены следующие условия:

а) каждая точка из O лежит в некотором замкнутом шаре радиуса r, содержащемся в O;

б) множество центров всех замкнутых шаров радиуса r, содержащихся в O, является связным.

Результаты работ [1], [3] показывают, в частности, что если O содержит U_R при некотором $R > 0$ и является r-областью, то для функции $f \in V_r(O)$ из условий (1) и (2) следует, что $f = 0$. При этом (2) нельзя заменить условием (3). Таким образом, в случае $U_R \subset O$ требуется такое же убывание F, как и в случае $O = \mathbb{R}^n$.

В данной работе изучается проблема 1 для широкого класса областей O, содержащих полупространство

$$H = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}.$$

Перейдем к формулировке основного результата. Напомним, что всюду в дальнейшем предполагается, что $n \geq 2$ и $r > 0$ фиксировано.

Теорема 1. *Пусть O содержит полупространство H и является r-областью. Пусть также*

$$F(t) = O(\exp(-t/\varphi(t))) \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \tag{4}$$

где φ – положительная возрастающая функция на $[0, +\infty)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$1) \quad \int_1^\infty \frac{dt}{t\varphi(t)} = +\infty; \tag{5}$$

$$2)\quad \textit{при}\quad t\to+\infty\quad \varphi(t)=O\left(\varphi\left(\frac{t}{\varphi(t)}\right)\right); \tag{6}$$

$$3)\quad \textit{при любом}\quad \alpha>0\quad \lim_{t\to+\infty}\frac{\varphi(\alpha t)}{\varphi(t)}=1. \tag{7}$$

Тогда для любой $f\in V_r(O)$ *из условия (1) следует, что* $f=0$.

Отметим, что условия (5), (6) и (7) имеют место для многих медленно растущих функций φ. Например, они выполнены, если при достаточно больших t функция φ совпадает с произведением логарифма и нескольких его различных итераций.

2. Обозначения и вспомогательные утверждения. Мы используем стандартные обозначения Γ и J_ν для гамма-функции и функции Бесселя первого рода порядка ν соответственно (см., например, [11, §1]). Для $z>0$ положим

$$I_\nu(z)=J_\nu(z)z^{-\nu}.$$

Функция I_ν допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость. Из интегрального представления Пуассона для I_ν (см. [11, формула (14.6)]) следует, что для всех $z>0$, $\nu\geq-\dfrac{1}{2}$ имеют место оценки

$$|J_\nu(z)|\leq C_1 \tag{8}$$

$$\left|\left(\frac{d}{dz}\right)^q I_\nu(\alpha z)\right|\leq C_2\alpha^q,\quad q\in\mathbb{Z}_+,\quad \alpha>0, \tag{9}$$

с постоянными $C_1,C_2>0$, зависящими только от ν.

Для $r>0,\eta>0$ рассмотрим функцию

$$\psi_\eta(t)=\begin{cases}(r^2-t^2)^{\frac{n-1}{4}}J_{\frac{n-1}{2}}\left(\eta\sqrt{r^2-t^2}\right), & |t|<r\\ 0, \quad |t|\geq r.\end{cases} \tag{10}$$

Ее преобразование Фурье

$$\hat{\psi}_\eta(z)=\int_{-r}^{r}\psi_\eta(t)e^{-izt}dt,\quad z\in\mathbb{C}, \tag{11}$$

является четной целой функцией экспоненциального типа, удовлетворяющей оценке

$$|\hat{\psi}_\eta(z)|\leq C_3e^{r|Imz|},\quad z\in\mathbb{C}, \tag{12}$$

где C_3 не зависит от z. Используя (10) и формулу Сонина (см. [11, формула (20.10)]), из (11) находим

$$\hat{\psi}_\eta(z)=\sqrt{2\pi}r^{n-1}\eta^{\frac{n-1}{2}}I_{\frac{n}{2}}\left(r\sqrt{\eta^2+z^2}\right). \tag{13}$$

Далее в этом параграфе предполагается, что $n\geq3$. Пусть $\mathbb{S}^{n-2}=\{x\in\mathbb{R}^{n-1}: |x|=1\}$, ω_{n-2} – площадь сферы $\mathbb{S}^{n-2}$, ρ,σ – полярные координаты в $\mathbb{R}^{n-1}$ (для любых $x\in\mathbb{R}^{n-1}$ имеем $\rho=|x|=\sqrt{x_1^2+...+x_{n-1}^2}$, а если $x\neq0$, то $\sigma=x/\rho\in\mathbb{S}^{n-2}$).

Обозначим $\mathcal{H}_k$ – пространство сферических гармоник степени k на $\mathbb{S}^{n-2}$, рассматриваемое как пространство $L^2(\mathbb{S}^{n-2})$ (см. [12, гл. 4, §2]), d_k – размерность $\mathcal{H}_k$, $\left\{Y_l^{(k)}\right\}_{l=1}^{d_k}$ – фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$. В частности, для $k=0$ имеем $d_0 = 1$ и $Y_1^{(0)}(\sigma) = \omega_{n-2}^{-1/2}$ для всех $\sigma \in \mathbb{S}^{n-2}$. При $n=3$, $k \geq 1$ в дальнейшем используется следующий базис в $\mathcal{H}_k$:

$$Y_1^{(k)}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sigma_1 + i\sigma_2)^k, \quad Y_2^{(k)}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sigma_1 - i\sigma_2)^k, \tag{14}$$

(в этом случае $d_k = 2$ для всех $k \geq 1$).

Всякой функции $f \in L^1_{loc}(H)$ соответствует ряд Фурье

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{g_k} f^{k,l}, \tag{15}$$

где $f^{k,l}(x) = f_{k,l}(\rho, x_n) Y_l^{(k)}(z)$ и

$$f_{k,l}(\rho, x_n) = \int_{S^{n-2}} f(\rho\sigma_1, ..., \rho\sigma_{n-1}, x_n) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\omega(\sigma), \tag{16}$$

$d\omega$ – поверхностная мера на $\mathbb{S}^{n-2}$. Если для почти всех (по мере Лебега) $x_n > 0$ функция f принадлежит классу $L(\mathbb{R}^{n-1})$ по переменным $x_1, ..., x_{n-1}$, то из (16) и теореме Фубини имеем

$$\int_0^{\infty} \rho^{n-1} |f_{k,l}(\rho, x_n)| d\rho < +\infty. \tag{17}$$

Для возрастающей функции $\varphi : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$, удовлетворяющей условиям (5)-(7), обозначим через $V_{r,\varphi}(H)$ множество всех $f \in V_r(H)$ таких, что выполнены условия (1) и (4). Из (6) и (7) следует, что

$$\varphi(t) = O(t^{\varepsilon}) \quad \text{при} \quad t \to +\infty \tag{18}$$

для любого $\varepsilon > 0$ (см, [13]). В частности, всякая функция $f \in V_{r,\varphi}(H)$ принадлежит классу $L(\mathbb{R}^{n-1})$ по переменным $x_1, ..., x_{n-1}$ для почти всех $x_n > 0$ и выполнено условие (17).

Далее нам потребуются некоторые свойства класса $V_{r,\varphi}(H)$.

Лемма 1. *Пусть* $f \in V_{r,\varphi}(H)$, $t > 0$ *и* $M_q(t) = 1 + \int_0^{\infty} \rho^{n+k+q-2} |f_{k,l}(\rho, t)| d\rho$, $q \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\inf_{q \geq m} (M_q(t))^{1/q} \right)^{-1} = +\infty. \tag{19}$$

Доказательство. Используя [13, теорема 12], получаем, что существует число $C_1 > 1$ такое, что при всех $t \geq C_1$ имеет место равенство

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_{C_1}^{t} \frac{u(\zeta)}{\zeta} d\zeta + V(t) \right), \tag{20}$$

где $u \in C([C_1, +\infty))$, $u(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to +\infty$, и V – ограниченная функция на $[C_1, +\infty)$, для которой существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t)$. Положим

$$g(t) = \exp\left(\int_{C_1}^{t} \frac{u(\zeta)}{\zeta} d\zeta\right), \quad t \geq C_1. \tag{21}$$

Тогда $g \in C^1([C_1, +\infty))$, $g > 0$ и

$$fg'(t) = o(g(t)) \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{22}$$

Кроме того, из (20), (21) и свойств V следует, что существуют постоянные $C_2, C_3 > 0$ такие, что

$$C_2\varphi(t) \leq g(t) \leq C_3\varphi(t) \quad \text{для всех} \quad t \geq C_1. \tag{23}$$

Далее имеем

$$|M_q(t)| \leq 1 + C_1^q \int_0^{C_1} \rho^{n+k-2} |f_{k,l}(\rho, t)| d\rho + G_q(t), \tag{24}$$

где $G_q(t) = \int_{C_1}^{\infty} \rho^{n+k+q-2} |f_{k,l}(\rho, t)| d\rho$.

Оценим $G_q(t)$ сверху. Используя (16), (4) и (23), получаем

$$G_q(t) \leq \int_{C_1}^{\infty} \rho^{n+k+q-2} \exp\left(-C_4 \frac{\rho}{g(\rho)}\right) d\rho, \tag{25}$$

где $C_4 > 0$ не зависит от q. Положим

$$U_q(\rho) = (n + k + q) \ln \rho - C_4 \frac{\rho}{g(\rho)}, \quad \rho \geq C_1. \tag{26}$$

Из (23) и (18) видно, что $U_q(\rho) \to +\infty$ при $\rho \to +\infty$. Если $U_q(\rho) \leq U_q(C_1)$ для всех $\rho \geq C_1$, то из (25) следует, что

$$G_q(t) \leq C_5 C_1^q, \tag{27}$$

где $C_5 > 0$ не зависит от q. В противном случае существует хотя бы одна точка $\rho_q \in (C_1, +\infty)$, в которой функция U_q достигает максимума на $[C_1, +\infty)$. Тогда $U_q'(\rho_q) = 0$, то есть

$$(n + k + q) = \frac{C_4 \rho_q}{g(\rho_q)} \left(1 - \frac{g'(\rho_q)}{g(\rho_q)}\right).$$

Из этого равенства и (22) вытекает, что $\rho_q \to +\infty$ при $q \to \infty$ и

$$C_4 \rho_q \sim q g(\rho_q) \quad \text{при} \quad q \to \infty. \tag{28}$$

Кроме того, из определения ρ_q и (26) имеем

$$U_q(\rho) \leq (n + k + q) \ln \rho_q - C_4 \frac{\rho_q}{g(\rho_q)}, \quad \rho \geq C_1.$$

Учитывая (6) и (7), отсюда и из (28), (23), (27) находим

$$G_q(t) \leq (C_6 q\varphi(q))^q, \quad q \in \mathbb{N},$$

где $C_6 > 0$ не зависит от q. Используя монотонность φ, из последнего неравенства и (24) получаем утверждение леммы 1. $\Box$

Далее, пусть $f \in V_{r,\varphi}(H)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, ..., d_k\}$. Для любого $\eta > 0$ и почти всех $t \in (0, +\infty)$ положим

$$\Phi(\eta, t) = \int_0^\infty \rho^{k+n-2} f_{k,l}(\rho, t) I_{\frac{n-3}{2}+k}(\rho\eta) d\rho. \tag{29}$$

Оценки (8) и (17) показывают, что Φ непрерывна на $(0, +\infty)$ по переменной η для почти всех $t > 0$.

Лемма 2. *Для любых $\eta > 0$, $h > r$ выполнено равенство*

$$\int_{-r}^{r} \Phi(\eta, t+h)\psi_2(t) dt = 0.$$

Доказательство. Из определения $f^{k,l}$ и $V_{r,\varphi}$ получаем, что $f^{k,l} \in V_{r,\varphi}(H)$. Следовательно,

$$\int_{|x|\leq r} f^{k,l}(x_1 + \xi_1, ..., x_{n-1} + \xi_{n-1}, x_n + h) dx = 0 \tag{30}$$

для любых $\xi = (\xi_1, ..., \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $h > r$. Пусть $\eta > 0$, $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\lambda_1^2 + ... + \lambda_{n-1}^2 = \eta^2$, $(\lambda, \xi) = \lambda_1\xi_1 + ... + \lambda_{n-1}\xi_{n-1}$. Для $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначим $x' = (x_1, ..., x_{n-1})$. Умножим равенство (30) на $e^{i(\lambda,\xi)}$ и проинтегрируем его по ξ на $\mathbb{R}^{n-1}$. После перемены порядка интегрирования и элементарных преобразований находим

$$\int_{|x|\leq r} e^{-i(\lambda,x')} g_\lambda(x_n + h) dx = 0, \tag{31}$$

где

$$g_\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f^{k,l}(x', x_n) e^{i(\lambda,x')} dx', \quad t > 0.$$

Переходя в (31) к повторному интегрированию, получаем

$$\int_{-r}^{r} g_\lambda(x_n + h) \int_{|x'|\leq r^2 - x_n^2} e^{i(\lambda,x')} dx' dx_n = 0.$$

Используя (10) и [12, глава 4, теорема 4.15], отсюда имеем

$$\int_{-r}^{r} g_\lambda(t+h)\psi_\eta(t) dt = 0.$$

Из последнего равенства и (29) следует (см. [2]) утверждение леммы 2. $\Box$

3. Доказательство теоремы 1. Пусть r – область O содержит полупространство H. Предположим, что $f \in V_r(O)$ и выполнены условия (1) и (4), где φ – положительная возрастающая функция на $[0, +\infty)$, удовлетворяющая (5)-(7). Докажем, что $f = 0$. Сначала рассмотрим случай $n \geq 3$. Из равенства (13) следует, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $\eta \in (0, \varepsilon)$ все нули функции $\hat{\psi}_r$ являются вещественными и простыми (см. [11]). Обозначим $Z_\eta = \{z \in \mathbb{R}^1 : \hat{\psi}_\eta(z) = 0\}$. Для любого $\lambda \in Z_\eta$ из оценки (11) и теоремы Пэли-Винера следует, что существует функция $\psi_{\eta,\lambda} \in L^2(\mathbb{R}^1)$ с носителем на $[-r, r]$ такая, что

$$\hat{\psi}_{\eta,\lambda}(z)(z - \lambda) = \hat{\psi}_\lambda(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Последнее равенство означает, что

$$\left(-i\frac{d}{dt} - \lambda\right)\psi_{\eta,\lambda} = \psi_\eta, \tag{32}$$

где дифференцирование понимается в смысле распределений. Решая уравнение (32), находим

$$\psi_{\eta,\lambda}(t) = \int_{-r}^{t} \psi_\eta(\xi) e^{i\lambda(t-\xi)} d\xi, \quad t \in \mathbb{R}^1. \tag{33}$$

Отсюда, в частности, следует, что $\psi_{\eta,\lambda} \in C^2(\mathbb{R}^1)$. Далее, пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, ..., d_k\}$. Для $\eta \in (0, \varepsilon)$ и $\lambda \in Z_\eta$ рассмотрим функцию

$$g_{\lambda,\eta}(h) = \int_{-r}^{r} \Phi(\eta, t + h)\psi_{\eta,\lambda}(t)dt, \quad h > r,$$

где Φ определяется равенством (29). Из (33) имеем $ig'_{\lambda,\eta} + \lambda g_{\lambda,r} = 0$. Это означает, что $g_{\lambda,\eta}(h) = C_1 e^{i\lambda h}$, где постоянная $C_1 \in \mathbb{C}$ не зависит от h. Поскольку $\lambda \in \mathbb{R}^1$, отсюда и из (29) получаем

$$|C_1| = |g_{\lambda,\eta}(h)| \leq \int_{-r}^{r} |\psi_{\eta,\lambda}(t)| \int_0^\infty \rho^{n+k-2} |f_{k,l}(\rho, t + h)| \left| I_{\frac{n-3}{2}+k}(\rho\eta) \right| d\rho dt. \tag{34}$$

Из (16) и (18) следует, что

$$|f_{k,l}(\rho, t + h)| \leq C_2 \exp\left(-(\rho^2 + (h - r)^2)^{1/3}\right) \quad \text{при} \quad h \to \infty,$$

где $C_2 > 0$ не зависит от $\rho > 0$, $t \in [-r, r]$. Переходя в (34) к пределу при $h \to +\infty$ и используя теорему Лебега о мажорированной сходимости, получаем $C_1 = 0$. Таким образом,

$$\int_{-r}^{r} \Phi(\eta, t + h)\psi_{\eta,\lambda}(t)dt = 0 \tag{35}$$

при любых $\eta \in (0, \varepsilon)$, $\lambda \in Z_\eta$, $h > r$. Пусть теперь $\Lambda \subset (0, \varepsilon)$ – счетное множество, всюду плотное на $(0, \varepsilon)$. Из (35), (33) и [14] следует, что для любого $\eta \in \Lambda$ существует множество $A_\eta \subset (0, +\infty)$ с ненулевой лебеговой мерой такое, что $\Phi(\eta, t) = 0$ при всех

$t \in (0, +\infty) \setminus A_\eta$. Полагая $A = (0, +\infty) \setminus \left(\bigcup_{\eta \in \Lambda} A_\eta\right)$, имеем $\Phi(\eta, t) = 0$ при любых $\eta \in \Lambda$, $t \in A$. В силу свойств Λ и непрерывности функции Φ по переменной $\eta \in (0, \varepsilon)$ при всех $t \in A$ (см. (29), (17) и (8) имеем

$$\Phi(\eta, t) = 0 \tag{36}$$

при всех $\eta \in (0, \varepsilon)$, $t \in A$.

С другой стороны, для любых $q \in \mathbb{Z}_+$, $\eta \in (0, +\infty)$ из (29) и (9) получаем

$$\left| \left(\frac{d}{d\eta}\right)^q \Phi(\eta, t) \right| \le C_3 \int_0^\infty \rho^{n+k-2+q} |f_{k,l}(\rho, t)| d\rho,$$

где $C_3 > 0$ не зависит от q. По теореме Данжуа-Карлемана (см. [15]), отсюда и из леммы 1 следует, что для почти всех $t > 0$ функция $\Phi(\eta, t)$ принадлежит квазианалитическому классу функций по переменной η на любом отрезке $[a, b] \subset (0, +\infty)$. Тогда равенство (36) показывает, что $\Phi(\eta, t) = 0$ для всех $\eta > 0$ и почти всех $t > 0$. В силу (29) и произвольности k, l это означает, что $f = 0$ в H. Применяя теперь теорему единственности для класса $V_r(O)$ (см. [1]), получаем $f = 0$ в O. Тем самым требуемое утверждение доказано при $n \ge 3$.

Пусть теперь $n = 2$. В этом случае положим

$$\Phi(\eta, t) = \int_0^\infty f(x_1, t) e^{i\eta x_1} dx, \quad \eta > 0, \quad t > 0. \tag{37}$$

Доказательство леммы 2 показывает, что

$$\int_r^r \Phi(\eta, t + h) \psi_\eta(t) dt = 0 \quad \text{при всех} \quad \eta > 0, \quad h > r.$$

Далее, пусть

$$M_q(t) = 1 + \int_0^\infty x_1^q |f(x_1, t)| dx_1.$$

Из доказательства леммы 1 видно, что выполнено условие (19). Повторяя теперь приведенные выше рассуждения для случая $n > 2$ с функцией Φ, определенной в (37), получаем утверждение теоремы 1 и при $n = 2$.

1. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Kluwer Academic Publishers. Dordrecht / Boston / London. – 2003. – 454 p.
2. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. – М.: ИЛ. – 1958г. – 159 с.
3. *Волчков В.В.* Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Мат. сб. – 1997. – Т. 188. – № 9. – С. 13-30.
4. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. – Т. 2. – М.: Мир, 1986.
5. *Smith I.D.* Harmonic analysis of scalar and vector fields in R^n // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1972. – V. 72. – P. 403-416.
6. *Thangavelu S.* Spherical means and CR functions on the Heisenberg group // J.Anal. Math. – 1994. – V. 63. – P. 255-286.

7. *Волчков В.В.* Теоремы единственности для некоторых классов функций с нулевыми сферическими средними // Мат. заметки. – 1997. – Т. 62. – № 1. – С. 59-65.
8. *Очаковская О.А.* Теоремы типа Лиувилля для функций с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса // ДАН России. – 2007. – Т. 415. – № 2. – С. 171-173
9. *Sitaram A.* Fourier analysis and determining sets for Radon measures on $\mathbb{R}^n$ // Illinois J. Math. – 1984. – V. 28. – P. 339-347.
10. *Shahshahani M. and Sitaram A.* The Pompeiu problem in exterior domains in symmetric spaces // Contemp. Math. – 1987. – V. 63. – P. 267-277.
11. *Коренев Б.Г.* Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука. – 1971. – 288 с.
12. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир. – 1974. – 335 с.
13. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука. – 1985. – 144 с.
14. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Convolution equations and the local Pompeiu property on symmetric spaces and on phase space associated to the Heisenberg group // Journal D'Analyse Mathematique. – V. 105. – P. 43-123. – 2008.
15. *Бадалян Г.В.* Квазистепенной ряд и квазианалитические классы функций. – М.: Наука, 1990.

O. A. Ochakovskaja

One-radius theorems on unbounded domains.

An admissible rate of decrease of a non-trivial function having zero integrals over all balls of fixed radius is studied. The case where a function is determined in a domain containing some half-plane is considered.

Keywords: *spherical means, mean periodisity.*

О. О. Очаковська

Теореми про один радіус на необмежених областях.

Вивчається допустима швидкість спадання ненульової функції, що має нульові інтеграли по всіх кулях фіксованого радіуса. Розглянуто випадок, коли функція задана в області, яка містить півпростір.

Ключові слова: *сферичні середні, періодичність у середньому.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
ochakovskaja@yandex.ua

Получено 02.11.12