УДК 531.38

©2012. **А. В. Мазнев, Ю. Ю. Пилпани**

О РЕДУКЦИИ УРАВНЕНИЙ В ВАРИАЦИЯХ ЗАДАЧИ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ-ПРЕЦЕССИОННЫХ ДВИЖЕНИЯХ

Исследована задача об асимптотически-прецессионных движениях сферического гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Уравнения в вариациях с помощью преобразования А.М. Ляпунова преобразованы к уравнению Хилла, которое позволяет находить характеристичные числа линейной системы без рассмотрения сопряженной системы.

Ключевые слова: *гиростат, прецессии, первый метод Ляпунова.*

Введение. Первый метод Ляпунова [1] нашел широкое применение в исследовании асимптотических движений в динамике твердого тела (см. обзоры [2, 3]). Прецессионные движения гиростата с неподвижной точкой имеют не только наглядный механический смысл, но и служат важной моделью движений механических систем. К настоящему времени получены многочисленные классы таких движений [3, 4], которые описываются как уравнениями Эйлера-Пуассона, так и уравнениями Кирхгофа-Пуассона.

Методика исследования асимптотически-прецессионных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил описана в статье [5]. В этой же работе получены некоторые результаты, посвященные достаточным условиям существования асимптотически-прецессионых движений гиростата с фиксированным распределением масс. Определенный интерес представляют вырожденные классы прецессионных движений – равномерные вращения относительно наклонной оси, так как их изучение возможно без дополнительных условий на компоненты тензора инерции.

Асимптотически-прецессионные движения сферического гиростата рассмотрены только в частных случаях [7-9].

Данная статья посвящена редукции уравнений в вариациях в задаче исследования асимптотически-прецессионных движений сферического гиростата. Указан метод сведения интегрирования этих уравнений к интегрированию уравнения Хилла. Этот метод может быть использован для анализа асимптотически-прецессионных движений во всех случаях предельных движений (регулярных прецессиях, полурегулярных прецессиях первого и второго типа, прецессиях общего типа).

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается уравнениями класса Кирхгофа [3, 10]. Пусть тензор инерции $A = \mathrm{diag}(\mu, \mu, \mu)$, тогда имеем

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\mu}[\boldsymbol{\omega} \times (B\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s})], \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где обозначено: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ –

единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент, характеризующий движение носимых тел; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ обозначает относительную производную по времени.

Уравнения (1) имеют первые интегралы

$$\mu\boldsymbol{\omega}^2 + (C\boldsymbol{\nu} - 2\boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{\nu} = 2E, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (\mu\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda} - \frac{1}{2}B\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \tag{2}$$

здесь E и k – произвольные постоянные.

Метод исследования условий существования прецессий разработан Г.В. Горром [4]. Следуя [4] обозначим через $\boldsymbol{a}$ – единичный вектор с началом в неподвижной точке. Предполагаем, что $\dot{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{0}$, то есть вектор $\boldsymbol{a}$ не изменяется в гиростате. Движение гиростата назвается прецессией относительно вертикали, если в течение времени постоянен угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\nu}$:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0, \quad a_0 = \cos\theta_0, \quad \theta_0 = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\nu}). \tag{3}$$

При наличии инвариантного соотношения из (3) вектор угловой скорости гиростата представим в виде [4]

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu}, \tag{4}$$

где φ и ψ – углы Эйлера. Кинематическому уравнению из (1), геометрическому интегралу из (2) удовлетворяют соотношения

$$\nu_1 = a_0' \sin\varphi, \quad \nu_2 = a_0' \cos\varphi, \quad \nu_3 = a_0, \tag{5}$$

$$\omega_1 = a_0'\dot{\psi}\sin\varphi, \quad \omega_2 = a_0'\dot{\psi}\cos\varphi, \quad \omega_3 = \dot{\varphi} + a_0\dot{\psi}, \tag{6}$$

где $a_0' = \sqrt{1 - a_0^2} = \sin\theta_0$. То есть достаточно рассмотреть динамическое уравнение из (1). После подстановки выражения (4) в это уравнение выпишем скалярные уравнения [4]

$$\mu(\ddot{\varphi} + a_0\ddot{\psi}) = -\dot{\psi}(\boldsymbol{\tau}_3 \cdot \boldsymbol{\tau}_5) - (\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_3), \tag{7}$$

$$\mu(a_0\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}) = -\dot{\varphi}(\boldsymbol{\tau}_3 \cdot \boldsymbol{\tau}_5), \tag{8}$$

$$a_0'^2\mu\dot{\varphi}\dot{\psi} + \dot{\psi}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_5) - \dot{\varphi}(\boldsymbol{\tau}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_5) + (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_4) = 0, \tag{9}$$

где введены обозначения [5]

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{a} - a_0\boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \boldsymbol{\nu} - a_0\mathbf{a}, \quad \boldsymbol{\tau}_3 = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\tau}_4 = \boldsymbol{s} - C\boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\tau}_5 = \boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}. \tag{10}$$

Можно показать, что из уравнений (7), (8) следуют соотношения

$$\mu(a_0\dot{\varphi} + \dot{\psi}) = k - (\boldsymbol{\lambda} - \frac{1}{2}B\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}, \tag{11}$$

$$\mu(\dot{\varphi}^2 + 2a_0\dot{\varphi}\dot{\psi} + \dot{\psi}^2) = 2E + (2\boldsymbol{s} - C\boldsymbol{\nu}) \cdot \nu. \tag{12}$$

Обозначим

$$k-(\boldsymbol{\lambda}-\frac{1}{2}B\boldsymbol{\nu})\cdot\boldsymbol{\nu}=f_2(\varphi),\quad 2E+(2\boldsymbol{s}-C\boldsymbol{\nu})\cdot\boldsymbol{\nu}=g_2(\varphi),\tag{13}$$

где в силу соотношений (5)

$$\begin{aligned}f_2(\varphi)&=b_2\cos 2\varphi+b_2'\sin 2\varphi+b_1\cos\varphi+b_1'\sin\varphi+b_0,\\ g_2(\varphi)&=c_2\cos 2\varphi+c_2'\sin 2\varphi+c_1\cos\varphi+c_1'\sin\varphi+c_0,\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{gathered}b_2=\frac{1}{4}a_0'^2(B_{22}-B_{11}),\quad b_2'=\frac{1}{2}a_0'^2B_{12},\\ b_1=a_0'(a_0B_{23}-\lambda_2),\quad b_1'=a_0'(a_0B_{13}-\lambda_1),\\ b_0=\frac{1}{4}[a_0'^2(B_{11}+B_{22})+2a_0^2B_{33}]-a_0\lambda_3+k,\quad c_2=\frac{1}{2}a_0'^2(C_{11}-C_{22}),\\ c_2'=-a_0'^2C_{12},\quad c_1=2a_0'(s_2-a_0C_{23}),\quad c_1'=2a_0'(s_1-a_0C_{13}),\\ c_0=2E+2a_0s_3-\frac{1}{2}[a_0'^2(C_{11}+C_{22})+2a_0^2C_{33}].\end{gathered}\tag{15}$$

Из уравнений (11), (12) получим

$$\begin{aligned}\dot\psi&=\frac{1}{\mu}(f_2(\varphi)-a_0\mu\dot\varphi),\\ \dot\varphi^2&=\frac{1}{a_0'^2\mu^2}(\mu g_2(\varphi)-f_2^2(\varphi)).\end{aligned}\tag{16}$$

Так как $f_2(\varphi), g_2(\varphi)$ – известные функции (см. формулы (13)-(15)), то условия существования прецессионных движений (3)-(5) сводятся к условиям совместности уравнений (9), (16). Отметим, что в [5, 7, 8] вместо (9) использовано другое соотношение.

Обозначим решение, которое удовлетворяет уравнениям (4), (5), (9), (16), следующим образом:

$$\boldsymbol{\omega}^*=\boldsymbol{\omega}^*(t),\quad \boldsymbol{\nu}^*=\boldsymbol{\nu}^*(t).\tag{17}$$

Поставим задачу исследования движений сферического гиростата, которые при $t\to\infty$ стремятся к прецессионному движению (17). Введем возмущения $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}^*(t)+\boldsymbol{\Omega},\quad \boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\nu}^*(t)+\boldsymbol{\gamma}.\tag{18}$$

Подставим выражения (18) в уравнения (1)

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}=\frac{1}{\mu}[\boldsymbol{\tau}_5\times\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\tau}_4\times\boldsymbol{\gamma}+(\boldsymbol{\omega}^*+\boldsymbol{\Omega})\times B\boldsymbol{\gamma}+(\boldsymbol{\nu}^*+\boldsymbol{\gamma})\times C\boldsymbol{\gamma}],\tag{19}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}=(\boldsymbol{\nu}^*+\boldsymbol{\gamma})\times\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{\gamma}.\tag{20}$$

Уравнения (19), (20) являются уравнениями для возмущений $\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\gamma}$ из (18). Так как при анализе асимптотически-прецессионных движений будем использовать первый метод Ляпунова, то выпишем линейную систему, вытекающую из (19), (20)

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{\tau}_5 \times \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\tau}_4 \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\omega}^* \times B\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\nu}^* \times C\boldsymbol{\gamma}), \tag{21}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\nu}^* \times \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\gamma}. \tag{22}$$

Уравнения (21), (22) имеют первые интегралы

$$\mu(\boldsymbol{\omega}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_1, \quad \boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_2, \quad \mu(\boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}) + (\mu\boldsymbol{\omega}^* + \boldsymbol{\tau}_5) \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_3. \tag{23}$$

В статье поставлена задача: на основе первого метода Ляпунова [1] исследовать условия существования асимптотически-периодических движений, предельным движением которых является прецессия (17).

2. Анализ условий существования предельных движений. Поскольку случай регулярных прецессий ($\dot{\varphi} = n$, $\dot{\psi} = m$, n и m – постоянные) рассмотрен в [3, 9], то здесь будем предполагать, что величины $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ одновременно не могут принимать постоянные значения.

Первый случай полурегулярной прецессии: $\dot{\psi} = m$. Пусть в уравнениях (7)-(12) выполняются условия

$$\begin{gathered} a_0 = 0, \quad B_{12} = 0, \quad B_{22} = B_{11}, \quad C_{12} = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \\ C_{13} = -mB_{13}, \quad C_{23} = -mB_{23}, \quad s_3 = -m\lambda_3. \end{gathered} \tag{24}$$

Тогда уравнения (9), (11) становятся тождествами, а из уравнения (12) получим

$$\begin{gathered} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{\mu}[\frac{1}{2}(C_{11} - C_{22})\cos 2\varphi + 2s_1 \sin\varphi + 2s_2\cos\varphi + c_0^*], \\ c_0^* = 2E - \mu m^2 - \frac{1}{2}(C_{11} + C_{22}). \end{gathered} \tag{25}$$

Второй случай полурегулярной прецессии: $\dot{\psi} = m$. Пусть выполнены условия ($a_0 \neq 0$)

$$\begin{gathered} B_{12} = 0, \quad B_{11} = B_{22}, \quad C_{12} = 0, \quad s_2 = a_0C_{23}, \quad C_{23} + mB_{23} = 0, \\ (B_{13}a_0 - \lambda_1)^2 = a_0^2\mu(C_{22} - C_{11}), \quad C_{13} = \frac{1}{\mu a_0}[B_{11}(a_0B_{13} - \lambda_1) - \mu m\lambda_1], \\ 2a_0(s_1 - a_0C_{13})(m\mu + a_0'^2B_{11}) + (a_0B_{13} - \lambda_1)[a_0m(a_0'^2B_{11} + a_0^2B_{33}) + \\ +2a_0'^2(s_3 + a_0(C_{22} - C_{33}))] = 0. \end{gathered} \tag{26}$$

При выполнении условий (26) зависимость $\varphi(t)$ определяется из уравнения

$$\begin{gathered} \dot{\varphi} = n_1\sin\varphi + n_0, \\ n_1 = \frac{a_0'}{\mu a_0}(B_{13}a_0 - \lambda_1), \quad n_0 = \frac{a_0}{\mu(B_{13}a_0 - \lambda_1)}[s_1 - a_0C_{13} + m\mu(\lambda_1 - a_0B_{13})]. \end{gathered} \tag{27}$$

Отметим, что условия (26) обобщают условия, полученные в статье [8]. Для применения метода Ляпунова предполагаем, что $\varphi(t)$ – монотонная функция времени ($n_0 > 0,\ n_0 > n_1$), то есть из формулы (27) имеем

$$\varphi = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{n_0\,\mathrm{tg}\,\tau}{\sqrt{n_0^2-n_1^2}-n_1\,\mathrm{tg}\,\tau}, \quad \tau = t\sqrt{n_0^2-n_1^2}. \tag{28}$$

Когда выполнены условия (24), функция $\varphi(t)$ находится путем обращения эллиптического интеграла, вытекающего из (25).

В указанных вариантах прецессии $\dot{\psi} = m$, и поэтому в силу (5), (6) предельное движение (17) характеризуется соотношениями (5) и

$$\omega_1 = a_0' m \sin\varphi, \quad \omega_2 = a_0' m \cos\varphi, \quad \omega_3 = a_0 m + \dot{\varphi}, \tag{29}$$

где $\dot{\varphi}$ определяется одной из формул (25), (27).

Третий класс полурегулярных прецессий: $\dot{\varphi} = n = const$. Он имеет место при выполнении условий [3]

$$\begin{gathered} a_0 = 0, \quad B_{ij} = 0\ (i \neq j), \quad B_{11} = B_{22}, \quad s_2 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \\ C_{12} = 0, \quad C_{23} = 0, \quad C_{13} = -n\lambda_1, \quad \lambda_1^2 = \mu(C_{22} - C_{11}). \end{gathered} \tag{30}$$

Скорость прецессии можно получить из выражения (11)

$$\dot{\psi} = -\frac{1}{\mu\lambda_1}(s_1\mu + \lambda_1^2 \sin(nt + \varphi_0)). \tag{31}$$

Четвертый класс полурегулярных прецессий: $\dot{\varphi} = n$. Положим в уравнениях (7)-(9)

$$\begin{gathered} B_{12} = 0, \quad B_{22} = B_{11}, \quad C_{12} = 0, \quad s_2 = a_0 C_{23}, \quad \lambda_1^2 = \mu(C_{22} - C_{11}), \\ a_0'^2 C_{23} + n\lambda_2 = 0, \quad n = \frac{1}{2\mu\lambda_1}[a_0\lambda_1(B_{33} - B_{11}) - \lambda_1\lambda_3 - \mu C_{13}], \\ s_3 = [\frac{1}{\lambda_1}(C_{13}a_0 - s_1) - a_0 n][(B_{33} - B_{11})a_0 - \lambda_3 - \mu n] + \\ + a_0(C_{33} - C_{22}) - nB_{11}, \end{gathered} \tag{32}$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\lambda_1\mu}[\mu(C_{13}a_0 - s_1) - a_0\lambda_1\mu n - \lambda_1^2 a_0' \sin(nt + \varphi_0)]. \tag{33}$$

Последние два класса прецессий рассмотрены А.В. Мазневым (см. обзор [3]). В условиях (30), (32) есть определенные уточнения условий [3].

При рассмотрении асимптотически-прецессионных движений общего вида сферического гиростата получаются условия [3], которые объединяют все прецессии. Эти условия таковы:

$$B_{12} = 0, \quad B_{22} = B_{11}. \tag{34}$$

Таким образом, результатом настоящего пункта является новый подход в определении условий существования полурегулярных прецессий и формулировка общего свойства прецессий гиростата. Отметим, что условия существования прецессий общего вида, полученные в [3], имеют достаточно громоздкий вид и поэтому здесь они не приводятся.

3. Преобразование линейной системы. Рассмотрим систему уравнений (21), (22) и интегралы (23) при условии, что вектор угловой скорости из (4) имеет вид

$$\boldsymbol{\omega}^* = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} + \dot{\varphi}\boldsymbol{\nu}^*. \tag{35}$$

В дальнейшем звездочки над переменными опускаем. Для записи указанных уравнений и интегралов введем новые переменные u_i:

$$\begin{gathered} u_1 = \mu(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{a}), \quad u_2 = \mu(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\nu}), \quad u_3 = \mu(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\tau}_3), \\ u_4 = \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{a}, \quad u_5 = \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nu}, \quad u_6 = \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\tau}_3, \end{gathered} \tag{36}$$

где согласно обозначениям (10) $\boldsymbol{\tau}_3 = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\nu}$. То есть в качестве новых переменных приняты независимые переменные, зависящие от проекций векторов возмущений $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ на векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\nu}$. Если переменные u_i из (36) будут найдены как функции времени, то векторы $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ определятся из формул

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{\mu a_0'^2}(u_1\boldsymbol{\tau}_1 + u_2\boldsymbol{\tau}_2 + u_3\boldsymbol{\tau}_3), \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{a_0'^2}(u_4\boldsymbol{\tau}_1 + u_5\boldsymbol{\tau}_2 + u_6\boldsymbol{\tau}_3). \tag{37}$$

При наличии соотношений (35), (36) интегралы (23) таковы:

$$\begin{gathered} \dot{\varphi}u_1 + \dot{\psi}u_2 - a_0'^{-2}[(\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_1)u_4 + (\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_2)u_5 + (\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_3)u_6] = c_1, \\ u_5 = c_2, \quad u_2 + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_1)u_4 + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_2)u_5 + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_3)u_6 = c_3, \end{gathered} \tag{38}$$

где $\boldsymbol{b} = a_0'^{-2}[\mu(\dot{\varphi}\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu}) + \boldsymbol{\tau}_5]$.

В силу интегралов (38) введем переменные $x_i : \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_6)$ и

$$x = q(t)u, \tag{39}$$

где q_{ij} имеют вид

$$\begin{gathered} q_{11} = 0, \quad q_{12} = 0, \quad q_{13} = 1, \quad q_{14} = 0, \quad q_{15} = 0, \quad q_{16} = 0, \\ q_{21} = 0, \quad q_{22} = 0, \quad q_{23} = 0, \quad q_{24} = 1, \quad q_{25} = 0, \quad q_{26} = 0, \\ q_{31} = 0, \quad q_{32} = 0, \quad q_{33} = 0, \quad q_{34} = 0, \quad q_{35} = 0, \quad q_{36} = 1, \\ q_{41} = \dot{\varphi}, \quad q_{42} = \dot{\psi}, \quad q_{43} = 0, \quad q_{44} = -a_0'^{-2}(\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_1), \\ q_{45} = -a_0'^{-2}(\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_2), \quad q_{46} = -a_0'^{-2}(\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_3), \\ q_{51} = 0, \quad q_{52} = 0, \quad q_{53} = 0, \quad q_{54} = 0, \quad q_{55} = 1, \quad q_{56} = 0, \\ q_{61} = 0, \quad q_{62} = 1, \quad q_{63} = 0, \quad q_{64} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_1, \quad q_{65} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_2, \quad q_{66} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_3. \end{gathered} \tag{40}$$

Поскольку в силу (40) $|q(t)| = \dot{\varphi}$, то в предположении $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ существует и обратное к (39) преобразование. Отметим, что преобразование, которое является суперпозицией преобразований (36), (39), является преобразованием Ляпунова, то оно не изменяет характеристичных чисел линейной системы (21), (22).

Запишем систему (21), (22) в переменных x_i [5]

$$\dot{x}_1 - h_{12}(t)x_2 - h_{13}(t)x_3 = R_1(t), \tag{41}$$

$$\dot{x}_2 - \frac{1}{\mu}x_1 + \dot{\psi}x_3 = R_2(t), \tag{42}$$

$$\dot{x}_3 - h_{32}(t)x_2 - h_{33}(t)x_3 = R_3(t), \tag{43}$$

$$\dot{x}_4 = 0, \quad \dot{x}_5 = 0, \quad \dot{x}_6 = 0, \tag{44}$$

$$\begin{aligned} R_1(t) &= h_{14}(t)x_4 + h_{15}(t)x_5 + h_{16}(t)x_6, \\ R_2(t) &= h_{24}(t)x_4 + h_{25}(t)x_5 + h_{26}(t)x_6, \\ R_3(t) &= h_{34}(t)x_4 + h_{35}(t)x_5 + h_{36}(t)x_6, \end{aligned} \tag{45}$$

где функции $h_{ij}(t)$ $(i = \overline{1,3},\ j = \overline{4,6})$ выписаны в [5]. На основании (38), (44) $x_4 = c_1,\ x_5 = c_2,\ x_6 = c_6$. То есть функции (45) по предположению являются периодическими функциями времени.

Выпишем функции $h_{12}(t), h_{13}(t), h_{32}(t), h_{33}(t)$

$$\begin{gathered} h_{12}(t) = a_0'^{-2}\dot{\varphi}^{-1}[\dot{\varphi}^2(\boldsymbol{\tau}_2 \cdot B\boldsymbol{\tau}_1) - \dot{\varphi}\dot{\psi}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot B\boldsymbol{\tau}_1) - \dot{\varphi}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot C\boldsymbol{\tau}_1) - \\ -a_0'^2\dot{\varphi}(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}_4) + D_1(\boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_1) - D_2(\boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1)], \\ h_{13}(t) = a_0'^{-2}\dot{\varphi}^{-1}[\dot{\varphi}^2(\boldsymbol{\tau}_2 \cdot B\boldsymbol{\tau}_3) - \dot{\varphi}\dot{\psi}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot B\boldsymbol{\tau}_3) - \dot{\varphi}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot C\boldsymbol{\tau}_3) + \\ +D_1(\boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_3) - D_2(\boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_3)], \\ h_{32}(t) = \frac{1}{\mu}a_0'^{-2}\dot{\varphi}^{-1}[(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)(\boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1) - (\boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_1)] + \dot{\psi}, \\ h_{33}(t) = \frac{1}{\mu}a_0'^{-2}\dot{\varphi}^{-1}[(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)(\boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_3) - (\boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_3)]. \end{gathered} \tag{46}$$

В (46) обозначено

$$\begin{gathered} \boldsymbol{g}_1 = \dot{\varphi}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{g}_2 = \dot{\psi}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\tau}_4 a_0'^{-2}, \\ D_1 = a_0'^{-2}[\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{\tau}_3 \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{\tau}_1 + \dot{\psi}], \quad D_2 = a_0'^{-2}[\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{\tau}_2 - a_0\dot{\psi}]. \end{gathered} \tag{47}$$

Функции (46) имеют достаточно сложный вид. Однако, если воспользоваться соотношениями, которые вытекают в результате дифференцирования по t соотношений (11), (12) и учета обозначений (10)

$$\begin{gathered} \dot{\varphi}(\boldsymbol{\tau}_3 \cdot \boldsymbol{\tau}_4) = -\mu[\ddot{\varphi}(\dot{\varphi} + a_0\dot{\psi}) + \ddot{\psi}(\dot{\psi} + a_0\dot{\varphi})], \\ \dot{\varphi}(\boldsymbol{\tau}_3 \cdot \boldsymbol{\tau}_5) = \mu(a_0\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}), \end{gathered} \tag{48}$$

а также равенства (9)

$$\dot\psi(\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_5)+(\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_4)=\dot\varphi[(\boldsymbol{\tau}_2\cdot\boldsymbol{\tau}_5)-a_0'^2\mu\dot\psi] \tag{49}$$

и производной по t этого равенства, то можно получить достаточно простой вид функций (46).

Действительно, укажем вначале выражения для D_1 и D_2 из (47)

$$D_1=-\frac{a_0'^2}{\mu}[a_0\mu\dot\varphi+(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\tau}_5)],\quad D_2=\frac{a_0'^2}{\mu}[\mu\dot\varphi+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\tau}_5)], \tag{50}$$

затем, используя (47), (10), вычислим значения скалярных произведений

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_1)=a_0'^{-2}\dot\varphi[\mu a_0'^2\dot\varphi+(\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_5)],\quad (\boldsymbol{g}_2\cdot\boldsymbol{\tau}_1)=a_0'^{-2}\dot\varphi(\boldsymbol{\tau}_2\cdot\boldsymbol{\tau}_5),\\ (\boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_3)=a_0'^{-2}\mu(a_0\ddot\varphi+\ddot\psi),\quad (\boldsymbol{g}_2\cdot\boldsymbol{\tau}_3)=-a_0'^{-2}\mu(\ddot\varphi+a_0\ddot\psi).\end{gathered} \tag{51}$$

На основании (48)-(51) из системы (46) получим

$$\begin{gathered}h_{12}(t)=\frac{1}{a_0'^2}[-\mu a_0'^2\dot\varphi^2+\dot\varphi((\boldsymbol{\tau}_2\cdot B\boldsymbol{\tau}_1)-2a_0'^2(\boldsymbol{\tau}_5\cdot\boldsymbol{a}))]-\dot\psi(\boldsymbol{\tau}_1\cdot B\boldsymbol{\tau}_1)-\\ -(\boldsymbol{\tau}_1\cdot C\boldsymbol{\tau}_1)-a_0'^2(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\tau}_4)-\frac{1}{\mu}[(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\tau}_5)(\boldsymbol{\tau}_2\cdot\boldsymbol{\tau}_5)+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\tau}_5)(\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_5)],\\ h_{13}(t)=\frac{\mu(\ddot\varphi\dot\psi+\ddot\psi\dot\varphi)}{\dot\varphi},\quad h_{32}(t)=\frac{1}{\mu}[\mu(\dot\psi-a_0\dot\varphi)-\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\tau}_5],\quad h_{33}(t)=\frac{\ddot\varphi}{\dot\varphi}.\end{gathered} \tag{52}$$

В силу формул (52) однородная система, вытекающая из (41)-(43), принимает вид

$$\begin{aligned}\dot x_1&=h_{12}(t)x_2+\frac{\mu(\dot\varphi\ddot\psi+\ddot\varphi\dot\psi)}{\dot\varphi}x_3,\\ \dot x_2&=\frac{1}{\mu}x_1-\dot\psi x_3,\\ \dot x_3&=h_{32}(t)x_2+\frac{\ddot\varphi}{\dot\varphi}x_3.\end{aligned} \tag{53}$$

Система (53) удобна тем, что ее решение сводится к решению уравнения Хилла.

Из второго уравнения системы (53) выразим x_1

$$x_1=\mu(\dot x_2+\dot\psi x_3). \tag{54}$$

Подставим x_1 из равенства (54) в первое уравнение (53) и учтем третье уравнение этой системы

$$\ddot x_2+(\dot\psi h_{32}(t)-\frac{h_{12}(t)}{\mu})x_2=0. \tag{55}$$

Учитывая формулы (52), уравнение Хилла (55) запишем в компактной форме

$$\ddot x_2+p(t)x_2=0, \tag{56}$$

$$p(t) = \frac{1}{\mu a_0'^2}\{a_0'^2\mu(\dot{\psi}^2 - \dot{\varphi}^2 - a_0\dot{\varphi}\dot{\psi}) + \dot{\varphi}[(\boldsymbol{\tau}_2 \cdot B\boldsymbol{\tau}_1) - 2a_0'^2(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_5)] - \\ -\dot{\psi}[(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot B\boldsymbol{\tau}_1) + a_0'^2(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}_5)] - (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot C\boldsymbol{\tau}_1) - a_0'^2(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}_4) - \\ -\frac{1}{\mu}[(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}_5)^2 + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_5)^2 - 2a_0(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_5)(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\tau}_5)]\}. \tag{57}$$

Сравнение структуры функции $p(t)$ из (57) и полученных ранее формул для этой функции (см., например, [8, 9]) показывает, что, во-первых, функция (57) получена для всех случаев прецессионных движений и, во-вторых, она имеет наиболее простой вид. Это обстоятельство в значительной степени влияет на получение условий существования асимптотически-прецессионных движений.

4. Общая схема использования уравнения (56). При исследовании условий существования асимптотически-прецессионных движений гиростата (например, классов движения, для которых предельными движениями являются указанные выше классы прецессий, или прецессии общего вида [3]) применима следующая схема анализа:

1. На параметры задачи накладываем условия, при выполнении которых предельное движение является периодическим.

2. В формулу (57) подставляем условия существования исследуемого класса движений и функции $\dot{\varphi}, \dot{\psi}$, полученные из соотношений (16).

3. Поскольку функция $p(t)$ из (57) может быть преобразована к виду $p(t) = P(\sin\varphi(t), \cos\varphi(t))$, где P – алгебраическая функция от $\sin\varphi, \cos\varphi$, то требуем, чтобы существовали такие условия на параметры задачи, при выполнении которых $p(t) \leq 0$ ($p(t) \not\equiv 0$).

4. На основании результатов Ляпунова [1] выписываем решение уравнения Хилла (56), имеющее положительное характеристичное число β^2:

$$x_2(t) = e^{-\beta^2 t}\psi(t), \tag{58}$$

где $\psi(t)$ – периодическая функция времени.

5. Из третьего уравнения системы (53) определяем зависимость

$$x_3(t) = \dot{\varphi}(t)\int\limits_t^{\infty} \frac{h_{32}(t)\psi(t)e^{-\beta^2 t}}{\dot{\varphi}(t)}\, dt. \tag{59}$$

6. Из формулы (54), используя соотношения (58), (59), находим $x_1(t)$:

$$x_1(t) = \mu(\dot{x}_2(t) + \dot{\psi}(t)x_3(t)). \tag{60}$$

7. Поскольку $x_4 = c_1,\ x_5 = c_2,\ x_6 = c_3$, то для получения зависимости $u(t)$ из (39) в виде

$$u = q^{-1}(t)x \tag{61}$$

в качестве вектора $\mathbf{x}$ берем вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)$.

8. Вычисленные на основе (61) компоненты $u_i(t)$ подставляем в формулы (37). Эти формулы описывают решение линейной системы (21), (22).

9. В силу равенств (58)-(61) делаем заключение о том, что линейная система (21), (22) имеет одно положительное характеристичное число, а нелинейная система (19), (20) допускает однопараметрическое семейство решений

$$\Omega_i = \sum_{n=1}^{\infty} N_i^{(n)}(t) c^n e^{-\beta^2 nt}, \quad \gamma_i = \sum_{m=1}^{\infty} M_i^{(m)}(t) c^m e^{-\beta^2 mt}, \tag{62}$$

которое описывает асимптотически-прецессионное движение гиростата.

Вывод. Получена новая форма уравнения Хилла в задаче о редукции уравнений в вариациях, которые описывают асимптотически-прецессионные движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Она применима для всех типов предельных движений (регулярных, полурегулярных прецессий и прецессий общего вида), обладающих свойством периодичности прецессионного движения.

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – Собр. соч. в 5 т. – М.-Л.: Изд-во СССР. – 1952. – Т. 2. – С. 7-263.
2. *Вархалев Ю.П., Горр Г.В.* Первый метод Ляпунова в исследовании асимптотических движений в динамике твердого тела // Механика твердого тела. – 1992. – Вып. 24. – С. 25-41.
3. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 384 с.
4. *Горр Г.В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // Прикл. математика и механика. – Т. 67, вып. 4. – 2003. – С. 573-587.
5. *Горр Г.В., Думбай Д.И.* Об ассимптотически-прецессионных движениях гиростата в обобщенной задаче динамики // Механика твердого тела. – 1994. – Вып. 26(I). – С. 20-28.
6. *Мазнев А.В., Пилпани Ю.Ю.* Ассимптотически-равномерные движения относительно наклонной оси гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Прикл. математика и механика. – Т. 76, вып. 2. – 2012. – С. 237-245.
7. *Молочинская А.И.* Об одном классе асимптотически-прецессионных движений сферического гиростата // Вісн. Донецьк. ун-ту. Серія А. – 2005. – № 2. – С. 88-93.
8. *Горр Г.В., Миронова Е.М.* Об ассимптотически-прецессионных движениях сферического гиростата // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 56-62.
9. *Пилпани Ю.Ю.* Об одном классе ассимптотически-прецессионных движений сферического гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Труды ИПММ НАНУ. – Т. 22. – С. 177-183.
10. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. I: The equations of motion and motion and their transformations // J. Mechan. Theor. Appl. – 1986. – **5**, N 5. – P. 747-474.

A. V. Maznev, J. J. Pilpani

Variational equations reduction of problem asymptotically precession gyrostat motions.

The problem about asymptotically-precession motions of spherical gyrostat under the action of potential and gyroscopic forces is investigated. Variational equations by converting A. Lyapunov kept to the Hill equation, which allows us to find the characteristic numbers of the linear system without considering the adjoint system.

Keywords: *gyrostat, precessions, Lyapunov's first method.*

О. В. Мазнєв, Ю. Ю. Пілпані

Про редукцію рівнянь у варіаціях задачі про асимптотично-прецесійні рухи.

Досліджено задачу про асимптотично-прецесійні рухи сферичного гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил. Рівняння у варіаціях за допомогою перетворення О.М. Ляпунова зведено до рівняння Хілла, яке дозволяє знаходити характеристичні числа лінійної системи без розгляду зв'язаної системи.

Ключові слова: *гіростат, прецесії, перший метод Ляпунова.*

Донецкий национальный ун-т
`maznev_av@rambler.ru`

Получено 29.09.12