УДК 517.5

©2012. **Д. А. Ковтонюк**

# ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ГОМЕОМОРФИЗМОВ КЛАССОВ СОБОЛЕВА

В работе получены условия гомеоморфной продолжимости на границу гомеоморфных решений уравнений Бельтрами с обобщенными производными.

***Ключевые слова:*** *уравнения Бельтрами, классы Соболева, нижние и кольцевые $Q$-гомеоморфизмы, граничное поведение.*

**1. Введение.** Ранее нами было установлено, что любое гомеоморфное решение уравнения Бельтрами с обобщенными производными является так называемым нижним $Q$-гомеоморфизмом с $Q$ равным дилатации, см. [1]. В данной работе установлено, что такие решения одновременно являются так называемыми кольцевыми $Q$-гомеоморфизмами с тем же $Q$, если дилатация локально суммируема. На этой основе получены новые критерии гомеоморфного продолжения на границу решений уравнений Бельтрами. Определения слабо плоских границ и областей, локально связных на границе, можно найти в работе [2].

Пусть $D$ – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т.е., связное и открытое подмножество $\mathbb{C}$, и пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. (почти всюду) в $D$. **Уравнением Бельтрами** называется уравнение вида

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z, \tag{1}$$

где $f_{\bar{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, $f_x$ и $f_y$ – частные производные отображения $f$ по $x$ и $y$, соответственно. Функция $\mu$ называется **комплексным коэффициентом**, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \tag{2}$$

**дилатацией** уравнения (1). Уравнение Бельтрами (1) называется **вырожденным**, если $K_\mu$ является существенно неограниченной, т.е. $K_\mu \notin L^\infty(D)$.

**2. О нижних $Q$-гомеоморфизмах.** Пусть $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Положим

$$A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

$$S_i = S(z_0, r_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Далее, как обычно, $\Delta(E, F; D)$ обозначает семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{C}}$, которые соединяют $E$ и $F$ в $D$, т.е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $a < t < b$.

Непрерывное отображение $\gamma$ открытого подмножества $\Delta$ действительной оси $\mathbb{R}$ или окружности в $D$ называется **штриховой линией**, см., например, раздел 6.3 в

[3]. Напомним, что любое открытое множество $\Delta$ в $\mathbb{R}$ состоит из счетного набора попарно непересекающихся интервалов. Это дает мотивировку для термина "штриховая линия".

Пусть задано семейство $\Gamma$ штриховых линий $\gamma$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Борелевскую функцию $\varrho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ называют **допустимой** для $\Gamma$, пишут $\varrho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \varrho \, ds \ \geqslant \ 1 \qquad \forall \, \gamma \in \Gamma. \tag{3}$$

**Конформным модулем** семейства $\Gamma$ называется величина

$$M(\Gamma) \ = \ \inf_{\varrho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} \varrho^2(z) \, dm(z), \tag{4}$$

где $dm(z)$ соответствует мере Лебега в $\mathbb{C}$. Говорят, что свойство $P$ имеет место для **п.в.** (почти всех) $\gamma \in \Gamma$, если подсемейство всех линий в $\Gamma$, для которых $P$ не верно, имеет нулевой модуль, ср. [4]. Также говорят, что измеримая по Лебегу функция $\varrho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ является **обобщенно допустимой** для $\Gamma$, пишут $\varrho \in \operatorname{ext}\operatorname{adm}\Gamma$, если (3) имеет место для п.в. $\gamma \in \Gamma$, см., например, раздел 9.2 в [3].

Для заданных областей $D$ и $D'$ в $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $z_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, и измеримой функции $Q : D \to (0, \infty)$ говорят, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ является **нижним $Q$-гомеоморфизмом в точке** $z_0$, если

$$M(f\Sigma_\varepsilon) \ \geqslant \ \inf_{\varrho \in \operatorname{ext}\operatorname{adm}\Sigma_\varepsilon} \int\limits_{D \cap R_\varepsilon} \frac{\varrho^2(z)}{Q(z)} \, dm(z) \tag{5}$$

для каждого кольца $R_\varepsilon = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \varepsilon < |z - z_0| < \varepsilon_0\}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in (0, d_0)$, где $d_0 = \sup\limits_{z \in D} |z - z_0|$, и $\Sigma_\varepsilon$ обозначает семейство штриховых линий, состоящее из всех пересечений окружностей $S(r) = S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$, $\quad r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, с областью $D$, см. [5] или главу 9 в монографии [3].

Это понятие может быть распространено на случай $z_0 = \infty \in \overline{D}$ стандартным способом путем применения инверсии $T$ относительно единичной окружности в $\overline{\mathbb{C}}$, $T(z) = z/|z|^2$, $T(\infty) = 0$, $T(0) = \infty$. Назовем гомеоморфизм $f : D \to D'$ **нижним $Q$-гомеоморфизмом в** $\infty \in \overline{D}$, если отображение $F = f \circ T$ является нижним $Q_*$-гомеоморфизмом с $Q_* = Q \circ T$ в 0. Также будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ является **нижним $Q$-гомеоморфизмом на** $\partial D$, если $f$ является нижним $Q$-гомеоморфизмом в любой точке $z_0 \in \partial D$.

Приведем критерий нижнего $Q$-гомеоморфизма, см. [5].

Предложение 1. Пусть $D$ и $D'$ – области в $\mathbb{C}$, $z_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, и $Q : D \to (0, \infty)$ – измеримая по Лебегу функция. Гомеоморфизм $f : D \to D'$ является нижним $Q$-гомеоморфизмом в точке $z_0$ тогда и только тогда, когда

$$M\left(f\left(\Sigma_\varepsilon\right)\right) \geqslant \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\| \, Q \|_{\,1}(r)} \quad \forall \, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \ \varepsilon_0 \in (0, d_0), \tag{6}$$

где

$$\|Q\|_1(r) = \int\limits_{D(z_0,r)} Q(z)\, ds \tag{7}$$

есть $L_1$ – норма функции $Q$ над множеством $D(z_0,r) = \{z \in D : |z - z_0| = r\}$.

По предложению 1, согласно равенствам Хессе и Цимера, см., напр., приложения A3 и A6 в [3], получаем следующую лемму.

**Лемма 1.** *Пусть $D$ и $D'$ – области в $\mathbb{C}$, $Q : D \to (0,\infty)$ – измеримая по Лебегу функция и $f : D \to D'$ – нижний $Q$-гомеоморфизм в точке $z_0 \in \overline{D}$. Тогда*

$$M\left(\Delta\left(fS_1, fS_2; fD\right)\right) \leqslant \frac{1}{I}, \tag{8}$$

*где $S_i = S(z_0,r_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r_i\}$, $i = 1,2$, $0 < r_1 < r_2$, и*

$$I = I(z_0,r_1,r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{||Q||_1(z_0,r)}, \tag{9}$$

$$||Q||_1(z_0,r) = \int\limits_{D(z_0,r)} Q(z)\, ds \tag{10}$$

*– $L^1$-норма функции $Q$ по $D(z_0,r) = \{z \in D : |z - z_0| = r\} = D \cap S(z_0,r)$.*

Как уже говорилось во введении в [1] установлен следующий важный факт.

**Теорема 1.** *Пусть $f$ – гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1) класса $W^{1,1}_{\rm loc}$. Тогда $f$ является нижним $Q$-гомеоморфизмом в каждой точке $z_0 \in \overline{D}$ с $Q(z) = K_\mu(z)$.*

**3. О кольцевых $Q$-гомеоморфизмах.** Следующее понятие мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу, см., напр., [6], и тесно связано с решением вырожденных уравнений типа Бельтрами на плоскости.

Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ является **кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в точке** $z_0 \in D$, если $f$ удовлетворяет соотношению

$$M\left(\Delta\left(fS_1, fS_2; fD\right)\right) \leqslant \int\limits_A Q(z) \cdot \eta^2(|z - z_0|)\, dm(z) \tag{11}$$

для любого кольца $A = A(z_0,r_1,r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d(z_0) = \operatorname{dist}(z_0,\partial D)$, и для любой измеримой по Лебегу функции $\eta : (r_1,r_2) \to [0,\infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1. \tag{12}$$

Говорим, что гомеоморфизм $f$ из $D$ в $\overline{\mathbb{C}}$ является **кольцевым $Q$-гомеоморфизмом** в $D$, если условие (11) выполнено для всех точек $z_0 \in D$.

Приведённое выше понятие впервые было введено в работе [7], в связи с исследованием уравнений Бельтрами на плоскости, а позднее было распространено на пространственный случай, см. работу [8], а также [3].

В работах [9] и [10] впервые рассматривались кольцевые $Q$-гомеоморфизмы в граничных точках области $D$. Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ называется **кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в граничной точке** $z_0 \in \partial D$, если $f$ удовлетворяет соотношению

$$M\left(\Delta\left(fC_1, fC_2; fD\right)\right) \leqslant \int\limits_{A\cap D} Q(z)\cdot\eta^2(|z-z_0|)\,dm(z) \tag{13}$$

для любого кольца $A = A(z_0, r_1, r_2)$ и произвольных континуумов $C_1$ и $C_2$ в $D$, которые принадлежат различным компонентам дополнения кольца $A$ в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащим $z_0$ и $\infty$, соответственно, и для любой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, удовлетворяющей условию (12). Говорим, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ является **кольцевым $Q$-гомеоморфизмом** в $\overline{D}$, если условие (13) выполнено для всех точек $z_0 \in \overline{D}$.

Приведём критерий, когда произвольный гомеоморфизм является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом во внутренних точках области, см. теорему 2.1 в [8], а также теорему 7.2 в [3]. Ниже мы придерживаемся следующих стандартных соглашений: $a/\infty = 0$ для $a \neq \infty$, $a/0 = \infty$ для $a > 0$ и $0 \cdot \infty = 0$, см., напр., раздел I.3 в [11].

Предложение 2. Пусть $Q : D \to [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в точке $z_0 \in D$ тогда и только тогда, когда для всех $0 < r_1 < r_2 < d(z_0) = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$ выполнено соотношение

$$M\left(\Delta\left(fS_1, fS_2; fD\right)\right) \leqslant \frac{2\pi}{J}, \tag{14}$$

где $S_i = S(z_0, r_i)$, $i = 1, 2$, $J = J(z_0, r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{rq_{z_0}(r)}$, $q_{z_0}(r)$ – среднее интегральное значение функции $Q$ по окружности $|z - z_0| = r$.

**4. О взаимосвязи нижних и кольцевых $Q$-гомеоморфизмах и уравнениях Бельтрами.** Прежде всего, докажем следующую лемму.

**Лемма 2.** *Пусть $D$ – область в $\mathbb{C}$, $z_0 \in \overline{D}$, $0 < r_1 < r_2 < d(z_0) := \sup\limits_{z\in D} |z - z_0|$, $A = A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ – кольцо, и пусть $Q : D \to (0, \infty)$ – локально интегрируемая функция. Полагаем*

$$\eta_0(t) = \frac{1}{I\cdot ||Q||_1(z_0, t)}, \tag{15}$$

*где $I = I(z_0, r_1, r_2)$ и $||Q||_1(z_0, r)$, $r \in (r_1, r_2)$, определены в (9) и (10), соответственно. Тогда*

$$\frac{1}{I} = \int\limits_{A\cap D} Q(z)\cdot\eta_0^2(|z-z_0|)\,dm(z) \le \int\limits_{A\cap D} Q(z)\cdot\eta^2(|z-z_0|)\,dm(z) \tag{16}$$

*для любой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что*

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1. \tag{17}$$

*Доказательство.* Если $I = \infty$, то левая часть соотношения (16) равна нулю и неравенство в этом случае очевидно. Если $I = 0$, то $||Q||_1(z_0, r) = \infty$ для п.в. $r \in (r_1, r_2)$, и обе части неравенства (16) по теореме Фубини равны бесконечности. Пусть теперь $0 < I < \infty$. Тогда $||Q||_1(z_0, r) \neq 0$ и $\eta_0(r) \neq \infty$ п.в. в $(r_1, r_2)$. Полагая $\alpha(r) = \eta(r) \cdot ||Q||_1(z_0, r)$ и $\omega(r) = \frac{1}{||Q||_1(z_0,r)}$, по стандартным соглашениям будем иметь, что $\eta(r) = \alpha(r)\omega(r)$ п.в. в $(r_1, r_2)$ и что

$$C := \int\limits_{A \cap D} Q(z) \cdot \eta^2 \left(|z - z_0|\right) \, dm(z) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \alpha^2(r) \cdot \omega(r) \, dr.$$

Применяя неравенство Иенсена с весом, см. теорему 2.6.2 в [12], к выпуклой функции $\varphi(t) = t^2$, заданной в интервале $\Omega = (r_1, r_2)$, с вероятностной мерой $\nu(E) = \frac{1}{I} \int\limits_E \omega(r) \, dr$ получаем, что $\left(⨍ \alpha^2(r)\omega(r)dr\right)^{1/2} \geqslant ⨍ \alpha(r)\omega(r) \, dr = \frac{1}{I}$, где мы также использовали тот факт, что $\eta(r) = \alpha(r)\omega(r)$ удовлетворяет соотношению (17). Таким образом, $C \geqslant \frac{1}{I}$, что и доказывает (16). $\Box$

Комбинируя леммы 1 и 2, получаем следующее.

**Следствие 1.** *При условиях и обозначениях лемм 1 и 2 имеет место неравенство*

$$M(\Delta \left(fS_1, fS_2; fD\right)) \leqslant \int\limits_{A \cap D} Q(z) \cdot \eta^2 \left(|z - z_0|\right) \, dm(z). \tag{18}$$

**Теорема 2.** *Пусть $D$ и $D'$ – области в $\mathbb{C}$, и пусть $Q : D \to (0, \infty)$ – локально интегрируемая функция. Если $f : D \to D'$ – нижний $Q$-гомеоморфизм в точке $z_0 \in \overline{D}$, то $f$ является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в точке $z_0$.*

*Доказательство.* Поскольку семейство кривых $\Delta \left(fC_1, fC_2; fD\right)$ минорируется семейством $\Delta \left(fS_1, fS_2; fD\right)$, где $S_1 = S(z_0, r_1)$ и $S_2 = S(z_0, r_2)$, то

$$M \left(\Delta \left(fC_1, fC_2; fD\right)\right) \leqslant M \left(\Delta \left(fS_1, fS_2; fD\right)\right),$$

и заключение теоремы 1 получается из следствия 1. $\Box$

Комбинируя теоремы 1 и 2, приходим к следующему заключению.

**Теорема 3.** *Пусть $f$ – гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1) с $K_\mu \in L^1_{\rm loc}$ класса $W^{1,1}_{\rm loc}$. Тогда $f$ является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом в каждой точке $z_0 \in \overline{D}$ с $Q(z) = K_\mu(z)$.*

Таким образом, теория граничного поведения кольцевых $Q$-гомеоморфизмов из [13] также может быть применена к изучению произвольных гомеоморфных решений уравнения Бельтрами с обобщенными производными.

**5. Продолжение на границу решений уравнений Бельтрами.** В дальнейшем мы предполагаем $K_\mu$ продолженной нулем вне области $D$.

Комбинируя теорему 3 с леммой 6.7, теоремой 6.10 и замечанием 6.10 из [13], получаем следующую общую лемму.

**Лемма 3.** *Пусть $D$ и $D'$ – области в $\mathbb{C}$, $D$ ограничена и локально связна на своей границе $\partial D$, а граница $\partial D'$ – слабо плоская. Предположим, что $f : D \to D'$ – гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1) с $K_\mu \in L^1_{\rm loc}$ класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ такое, что*

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} K_\mu(z) \cdot \psi^2(|z-z_0|)\, dm(z) = o\left(I^2(\varepsilon)\right), \quad \forall\ z_0 \in \partial D, \tag{19}$$

*при $\varepsilon \to 0$ для некоторого $\varepsilon_0 = \delta(z_0) \in (0, d(z_0))$, где $d(z_0) = \sup\limits_{z\in D} |z - z_0|$, и $\psi(t)$ – неотрицательная измеримая (по Лебегу) функция на $(0, \infty)$ такая, что*

$$0 < I(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty, \quad \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{20}$$

*Тогда $f$ имеет гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.*

Полагая в лемме 3 $\psi(t) = 1/t$, имеем следующий результат о гомеоморфном продолжении на границу.

**Теорема 4.** *Пусть $D$ и $D'$ – области в $\mathbb{C}$, $D$ ограничена и локально связна на своей границе $\partial D$, а граница $\partial D'$ – слабо плоская. Предположим, что $f : D \to D'$ – гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1) с $K_\mu \in L^1_{\rm loc}$ класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ такое, что*

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} K_\mu(z)\ \frac{dm(z)}{|z-z_0|^2} = o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^2\right), \quad \forall\ z_0 \in \partial D, \tag{21}$$

*при $\varepsilon \to 0$ для некоторого $\varepsilon_0 = \delta(z_0) \in (0, d(z_0))$, где $d(z_0) = \sup\limits_{z\in D} |z - z_0|$. Тогда $f$ имеет гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.*

Замечание. Аналогично, полагая в лемме 3 $\psi(t) = 1/(t \log 1/t)$, получаем, что в теореме 4 условие (21) можно заменить на более слабое условие

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} K_\mu(z)\ \frac{dm(z)}{\left(|z-z_0|\log\frac{1}{|z-z_0|}\right)^2} = o\left(\left[\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^2\right), \quad \forall\ z_0 \in \partial D. \tag{22}$$

Более общо, здесь можно использовать функции вида $\psi(t) = 1/(t \log 1/t \cdot \log\log 1/t \cdot \cdots \cdot \log\ldots\log 1/t)$.


1. *Kovtonyuk D.A., Ryazanov V.I.* The Beltrami equations and lower $Q$-homeomorphisms // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. – Т. 21. – С. 114-117.
2. *Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И.* К теории границ пространственных областей // Труды ИПММ НАН Украины. – 2006. – Т. 13. – С. 110-120.

3. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. Springer Monographs in Mathematics. – New York etc.: Springer, 2009.
4. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – V. 98. – P. 171-219.
5. *Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И.* К теории нижних $Q$-гомеоморфизмов // Укр. мат. вестник. – 2008. – Т. 5, № 2. – С. 159-184; transl. in Ukrainian Math. Bull. – 2008. – V. 5, no. 2. – P. 157-181.
6. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – V. 103. – P. 353-393.
7. *Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equation // J. Anal. Math. – 2005. – V. 96. – P. 117-150.
8. *Рязанов В.И., Севостьянов Е.А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых $Q$-гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн. – 2007. – Т. 48, № 6. – С. 1361-1376.
9. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* To strong ring solutions of the Beltrami equations // Uzbek. Math. J. – 2009. – No 1. – P. 127-137.
10. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On strong solutions of the Beltrami equations // Complex Var. Elliptic Equ. – 2010. – V. 55, no 1-3. – P. 219-236.
11. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: ИЛ, 1949.
12. *Ransford Th.* Potential Theory in the Complex Plane. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
13. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami Equations: A Geometric Approach. Developments in Mathematics. – V. 26. – New York etc.: Springer, 2012.


**D. A. Kovtonyuk**

**The boundary behavior of homeomorphisms in the Sobolev classes.**

In the paper it is obtained criteria of homeomorphic extension to the boundary of homeomorphic solutions of the Beltrami equations.

***Keywords:*** *Beltrami equations, Sobolev classes, lower and ring Q-homeomorphisms, boundary behavior.*

**Д. О. Ковтонюк**

**Межова поведінка гомеоморфізмів класів Соболєва.**

У роботі отримано умови гомеоморфного продовження на межу гомеоморфних розв'язків рівнянь Бельтрамі з узагальненими похідними.

***Ключові слова:*** *рівняння Бельтрамі, класи Соболєва, нижні та кільцеві Q-гомеоморфізми, межова поведінка.*

*Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк*
`denis_ kovtonyuk@bk.ru`

*Получено 05.11.12*