УДК 531.38

©2012. **А. В. Зыза**

НОВОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

В работе найдено новое решение уравнений движения гиростата, описываемое дифференциальными уравнениями Кирхгофа. Основные переменные задачи представлены в виде многочленов по вспомогательной переменной, зависящей от одной из компонент вектора угловой скорости и определяются функциями, полученными в результате обращения гиперэллиптических интегралов.

Ключевые слова: *гиростат, полиномиальные решения, уравнения Кирхгофа, первые интегралы, потенциальные и гироскопические силы.*

Введение. В работах В.А.Стеклова [1], Н.Ковалевского [2], Д.Н.Горячева [3] установлены новые решения уравнений Эйлера-Пуассона, обладающие полиномиальной структурой относительно компонент вектора угловой скорости тяжелого твердого тела. П.В.Харламов показал [4], что решения В.А.Стеклова и Н.Ковалевского можно обобщить в задаче о движении гиростата под действием силы тяжести. А.И.Докшевич [5] также рассматривал условия существования полиномиальных решений, которые по структуре отличны от выше перечисленных решений.

Обобщение полиномиальных решений указанных выше классов в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил существенно усложняется, так как в процессе исследования этих решений редукция уравнений Кирхгофа-Пуассона к уравнениям класса Ковалевского-Харламова возможна только в частных случаях [6]. Тем не менее на основе полуобратного метода найдены новые решения уравнений Кирхгофа-Пуассона не только класса Стеклова-Ковалевского-Горячева [7, 8], но и класса Докшевича [9].

Данная работа посвящена исследованию условий существования решения, которое характеризуется следующим свойством: первая компонента вектора угловой скорости является квадратом новой переменной, вторая компонента и квадрат третьей являются многочленами по вспомогательной переменной, первая и вторая компоненты единичного вектора вертикали – полиномы по вспомогательной переменной, а третья компонента – алгебраическая функция вспомогательной переменной.

Получены условия существования данного решения и приведен пример их разрешимости. Решение представлено функциями, которые получаются обращением гиперэллиптических интегралов от вспомогательной переменной.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение заряженного и намагниченного гиростата с неподвижной точкой в поле потенциальных и гироскопических сил. Потенциальные силы возникают при взаимодействии магнитов с постоянным магнитным полем, электрических зарядов с электрическим полем и ньютоновском притяжении масс. Центры ньютоновского и кулоновского притяжений лежат на оси, проходящей через неподвижную точку и параллельной вектору, характеризующему направление постоянного магнитного поля. Гироскопические силы определяются лоренцевым взаимодействием магнитного поля на движущиеся в пространстве электрические заряды и циклическим движением роторов в теле-носителе. Движение такого гиростата описывается дифференциальными уравнениями класса Г.Кирхгофа [10]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s}),$$
$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

Эти уравнения допускают три первых интеграла

$$A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E_0, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k_0,$$
$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, характеризующий направление оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$ – гиростатический момент; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, 0)$ – вектор обобщенного центра масс; A – тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке; B и C – симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает относительную производную; E_0 и k_0 – постоянные интегралов.

Запишем уравнения (1) и первые интегралы (2) в скалярном виде, полагая $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_3)$, $C = \mathrm{diag}(C_1, C_2, C_3)$:

$$\left.\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \lambda_2\omega_3 + B_3\omega_2\nu_3 - B_2\omega_3\nu_2 + s_2\nu_3 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3;\\ A_2\dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 - \lambda_1\omega_3 + B_1\omega_3\nu_1 - B_3\omega_1\nu_3 - s_1\nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_1\nu_3;\\ A_3\dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1 + B_2\omega_1\nu_2 - B_1\omega_2\nu_1 + s_1\nu_2 - s_2\nu_1 +\\ &\quad + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2; \tag{4}$$

$$\left.\begin{gathered} A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 - 2(s_1\nu_1 + s_2\nu_2) + C_1\nu_1^2 + C_2\nu_2^2 + C_2\nu_3^2 = 2E_0;\\ (A_1\omega_1 + \lambda_1)\nu_1 + (A_2\omega_2 + \lambda_2)\nu_2 + A_3\omega_3\nu_3 - \frac{1}{2}\left(B_1\nu_1^2 + B_2\nu_2^2 + B_3\nu_3^2\right) = k_0;\\ \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \end{gathered}\right\} \tag{5}$$

Поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (3), (4) решений вида

$$\omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2 = Q(\sigma) = \sum_{k=0}^{n} b_k\sigma^k, \quad \omega_3^2 = R(\sigma) = \sum_{i=0}^{m} c_i\sigma^i,$$
$$\nu_1 = \varphi(\sigma) = \sum_{j=0}^{l} a_j\sigma^j, \quad \nu_2 = \psi(\sigma) = \sum_{i=0}^{n_1} g_i\sigma^i, \quad \nu_3 = \frac{\varkappa(\sigma)}{\sigma}\omega_3, \tag{6}$$
$$\varkappa(\sigma) = \sum_{j=0}^{m_1} f_j\sigma^j,$$

где n, m, l, n_1, m_1 – натуральные числа или нули; b_k, c_i, a_j, g_i, f_j – неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Подставим выражения (6) в уравнения (3), (4) и геометрический интеграл из (5):

$$\dot{\sigma} = (\varphi'(\sigma))^{-1}(\psi(\sigma) - Q(\sigma)\varkappa(\sigma)\sigma^{-1})\sqrt{R(\sigma)}; \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} &\psi'(\sigma)(\psi(\sigma)\sigma - Q(\sigma)\varkappa(\sigma)) = \varphi'(\sigma)\sigma\Phi(\sigma), \quad \Phi(\sigma) = \sigma\varkappa(\sigma) - \varphi(\sigma);\\ &(R(\sigma)(\varkappa(\sigma)\sigma^{-1})^2)'\sigma\Phi(\sigma) = 2\psi'(\sigma)\varkappa(\sigma)(Q(\sigma)\varphi(\sigma) - \psi(\sigma)\sigma^2); \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} 2A_1\sigma^2\Phi(\sigma) = \psi'(\sigma)[\varkappa(\sigma)\{(C_3 - C_2)\psi(\sigma) + B_3Q(\sigma) + s_2\}+\\ + \{(A_2 - A_3)Q(\sigma) - B_2\psi(\sigma) + \lambda_2\}\sigma]; \end{aligned} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} A_2Q'(\sigma)\sigma\Phi(\sigma) &= \psi'(\sigma)[\varkappa(\sigma)\{(C_1 - C_3)\varphi(\sigma) - B_3\sigma^2 - s_1\}+\\ &\quad + \{(A_3 - A_1)\sigma^2 + B_1\varphi(\sigma) - \lambda_1\}\sigma];\\ A_3R'(\sigma)\Phi(\sigma) &= 2\psi'(\sigma)[\psi(\sigma)\{(C_2 - C_1)\varphi(\sigma) + B_2\sigma^2 + s_1\}+\\ &\quad + Q(\sigma)\{(A_1 - A_2)\sigma^2 - B_1\varphi(\sigma) + \lambda_1\} - \lambda_2\sigma^2 - s_2\varphi(\sigma)]; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$(\varphi^2(\sigma) + \psi^2(\sigma) - 1)\sigma^2 + R(\sigma)\varkappa^2(\sigma) = 0. \tag{11}$$

В уравнениях (7)-(10) штрихом обозначена производная по вспомогательной переменной σ. После интегрирования уравнений (8)-(10) зависимость σ от времени t находим из уравнения (7).

2. Новое частное решение. Рассмотрим случай, когда максимальные степени полиномов из (6) таковы: $n = 3$, $m = 6$, $l = 2$, $n_1 = 4$, $m_1 = 2$. Тогда

$$\begin{aligned} &\omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2 = Q(\sigma) = b_3\sigma^3 + b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0,\\ &\omega_3^2 = R(\sigma) = c_6\sigma^6 + c_5\sigma^5 + c_4\sigma^4 + c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0,\\ &\nu_1 = \varphi(\sigma) = a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0,\\ &\nu_2 = \psi(\sigma) = g_4\sigma^4 + g_3\sigma^3 + g_2\sigma^2 + g_1\sigma + g_0,\\ &\nu_3 = \varkappa(\sigma)\sigma^{-1}\sqrt{R(\sigma)}, \quad \varkappa(\sigma) = f_2\sigma^2 + f_1\sigma + f_0. \end{aligned} \tag{12}$$

Подставим значения для компонент векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ из (12) в первое кинематическое уравнение из (8) и динамическое уравнение (9). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях многочленов, стоящих в левых и правых частях этих уравнений, заключаем, что уравнение (9) при $g_1 \neq 0$, $g_2 \neq 0$, $g_3 \neq 0$, $f_0 = 0$ может быть тождеством по σ только при выполнении условий

$$\begin{aligned} &A_2 = A_3, \quad B_2 = B_3, \quad C_2 - C_3 = 0,\\ &(B_3b_0 + s_2)f_1 - B_3g_0 + \lambda_2 = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Тогда в силу (13) динамическое уравнение (9) упрощается

$$\Phi(\sigma) = \psi'(\sigma)(2A_1)^{-1}\mu, \quad \mu = f_2s_2 + B_3(f_1b_1 - g_1). \tag{14}$$

Соотношения (14) позволяют упростить другие уравнения исследуемой системы (8)-(10). Исключим функцию $\Phi(\sigma)$ из уравнений(8), (10). Затем подставим в упрощенные уравнения и уравнения (11), (14) полиномы из (12). Требование того, чтобы полученные равенства при условиях (13) были тождествами по σ, приводит к следующей системе уравнений на параметры задачи и коэффициенты решения (12):

$$
\begin{aligned}
&g_4 - b_3 f_2 = 0, \quad g_3 - b_3 f_1 - b_2 f_2 = 0, \quad g_2 - b_2 f_1 - b_1 f_2 = 0,\\
&2A_1 g_0 - a_1\mu = 0, \quad A_1(g_1 - b_1 f_1) - a_2\mu = 0,\\
&b_0 = 0, \quad 2A_1(f_1 - a_2) - 3g_3\mu = 0, \quad A_1 f_2 - 2g_4\mu = 0,\\
&g_2\mu + A_1 a_1 = 0, \quad g_1\mu + 2A_1 a_0 = 0, \quad 2c_6 f_2\mu + A_1 g_4 = 0,\\
&\mu(6c_6 f_1 + 7c_5 f_2) + 4A_1(g_3 - b_3 a_2) = 0,\\
&\mu(5c_5 f_1 + 6c_4 f_2) + 4A_1(g_2 - b_3 a_1 - b_2 a_2) = 0,\\
&\mu(4c_4 f_1 + 5c_3 f_2) + 4A_1(g_1 - b_3 a_0 - b_2 a_1 - b_1 a_2) = 0,\\
&\mu(3c_3 f_1 + 4c_2 f_2) + 4A_1(g_0 - b_2 a_0 - b_1 a_1) = 0,\\
&\mu(2c_2 f_1 + 3c_1 f_2) - 4A_1 b_1 a_0 = 0, \quad c_1 f_1 + 2c_0 f_2 = 0,\\
&\beta = C_1 - C_3, \quad B_3 - \beta a_2 = 0, \quad \xi_0 = B_1 a_2 + A_3 - A_1, \quad \xi_1 = \beta a_0 - s_1,\\
&\xi_2 = B_1 a_0 - \lambda_1, \quad 3\mu A_3 b_3 - 2A_1(\beta f_2 a_1 + \xi_0) = 0,\\
&\mu A_3 b_2 - A_1(\xi_1 f_2 + \beta a_1 f_1 + B_1 a_1) = 0, \quad \mu A_3 b_1 - 2A_1(\xi_1 f_1 + \xi_2) = 0,\\
&3\mu A_3 c_6 + 2A_1(\beta g_4 a_1 + \xi_0 b_3) = 0,\\
&5\mu A_3 c_5 + 4A_1(\xi_1 g_4 + \beta g_3 a_1 + B_1 a_1 b_3 + \xi_0 b_2) = 0,\\
&\mu A_3 c_4 + A_1(\xi_1 g_3 + \beta g_2 a_1 + B_1 a_1 b_2 + \xi_0 b_1 + \xi_2 b_3) = 0,\\
&3\mu A_3 c_3 + 4A_1(\xi_1 g_2 + \beta g_1 a_1 + B_1 a_1 b_1 + \xi_2 b_2 + s_2 a_2 + \lambda_2) = 0,\\
&\mu A_3 c_2 + 2A_1(\xi_1 g_1 + \beta g_0 a_1 + \xi_2 b_1 + s_2 a_1) = 0,\\
&\mu A_3 c_1 + 4A_1(\xi_1 g_0 + s_2 a_0) = 0, \quad a_0 + g_0^2 + c_0 f_1^2 - 1 = 0.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Система алгебраических уравнений (13), (15) разрешима относительно ненулевых параметров A_1, A_3, B_3, β. Считая $\alpha = B_3^2 + \beta A_1 > 0$, запишем решение системы (13), (15) в виде:

$$C_2 = C_3, \quad A_2 = A_3, \quad B_2 = B_3,$$

$$B_1 = \frac{A_1\beta(4A_1 - A_3) + 2A_3 B_3(B_3 - \sqrt{\alpha})}{4A_1 B_3},$$

$$
\begin{aligned}
&\delta = -8A_1^3 A_3^2(4A_1 - A_3)\beta^3 - A_1^2 B_3[(16(4A_1 + 3A_3)A_1^2 - (20A_1 + 11A_3)A_3^2)B_3 -\\
&- 16(4A_1^2 + A_1 A_3 - A_3^2)A_3\sqrt{\alpha}]\beta^2 - A_1 B_3^3[(32(4A_1 + A_3)A_1^2 - (60A_1 - 13A_3)A_3^2)B_3 -\\
&- (4A_1 - A_3)(12A_1 - 11A_3)A_3\sqrt{\alpha}]\beta - 4B_3^5[(4(4A_1 - A_3)A_1^2 -\\
&(2A_1 - A_3)A_3^2)B_3 + (4A_1^2 + 2A_1 A_3 - A_3^2)A_3\sqrt{\alpha},
\end{aligned}
$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{32A_1\beta b_3^2}\left\{4A_1^2\beta - A_3((\sqrt{\alpha}+B_3)^2 - 4B_3^2) + \delta^{-1}[256A_1^5\alpha^2\beta B_3^2 + \right.$$
$$+ 64A_1^3A_3B_3\alpha^{3/2}(2(\alpha-4B_3^2)B_3\sqrt{\alpha} + 4A_1\alpha\beta + (11\alpha - 5B_3^2)B_3^2) +$$
$$+ 16(A_1A_3)^2B_3\alpha((20A_1\alpha\beta + 3(21\alpha - B_3^2)B_3^2)B_3 - (32A_1\alpha\beta + 3(7\alpha+13B_3^2)B_3^2\sqrt{\alpha}) -$$
$$- 12A_1A_3^3B_3\sqrt{\alpha}(2(\alpha+B_3^2)(5\alpha+9B_3^2)B_3\sqrt{\alpha} - \alpha(4A_1\alpha\beta +$$
$$+ (19\alpha + 34B_3^2)B_3^2) - 3B_3^6) - 9A_3^4B_3^2\sqrt{\alpha}((A_1\alpha\beta - (5\alpha+11B_3^2)B_3^2)\sqrt{\alpha} -$$
$$\left. - B_3(A_1\alpha\beta - (13\alpha + 3B_3^2)B_3^2))]\right\},$$

$$\lambda_2 = -\frac{(4(A_1-A_3)\alpha + A_3(\sqrt{\alpha}+B_3)^2)B_3}{8A_1\beta^2 f_2 b_3},$$

$$s_1 = \frac{1}{8b_3^2}\{-B_3 + \delta^{-1}[-64(A_1B_3)^3\alpha^2 + 16A_1^2A_3\alpha^{3/2}(-7B_3^3\sqrt{\alpha} + 8A_1\alpha\beta +$$
$$+ (12\alpha - 5B_3^2)B_3^2) + 4A_1A_3^2\alpha((37\alpha - 3B_3^2)B_3^3 - 2\sqrt{\alpha}(4A_1\alpha\beta +$$
$$+ (6\alpha + 11B_3^2)B_3^2)) - 9(A_3B_3)^3\sqrt{\alpha}((\alpha+3B_3^2)\sqrt{\alpha} - (3\alpha + B_3^2)B_3)]\},$$

$$s_2 = \frac{\alpha}{2\beta f_2 b_3},$$

$$f_2 = \frac{\sqrt{2\delta}b_3}{8A_1^{3/2}\alpha\beta}, \quad f_1 = \frac{(3A_3B_3 + (4A_1 - 3A_3)\sqrt{\alpha})B_3}{4A_1\beta\sqrt{\alpha}},$$

$$c_6 = -b_3^2, \quad c_5 = \frac{((4A_1+A_3)\sqrt{\alpha} - A_3B_3)B_3b_3^2}{2A_1\beta f_2\sqrt{\alpha}},$$

$$c_4 = -\frac{B_3b_3^2}{16(A_1\beta f_2)^2\alpha}[\alpha(24A_1B_3(2A_1+A_3) - A_3(5A_3B_3 + 32A_1\sqrt{\alpha})) +$$
$$+ A_3B_3^2(2\sqrt{\alpha}(4A_1 + 5A_3) - 5A_3B_3)],$$

$$c_3 = \frac{B_3}{32(A_1\beta f_2)^3\alpha^2}\{16(\alpha A_1)^2((4A_1+3A_3)(B_3b_3)^2 - 2A_1(\beta f_2)^2) +$$
$$+ \alpha A_3B_3b_3^2(4A_1A_3B_3(3\alpha - 5B_3^2) - 3A_3^2B_3(\alpha+3B_3^2) - 16A_1^2\sqrt{\alpha}(3\alpha + A_1\beta) -$$
$$- 8A_1A_3\sqrt{\alpha}(2\alpha - 3B_3^2)) + 3(A_3B_3)^3\sqrt{\alpha}(3\alpha + B_3^2)b_3^2\},$$

$$c_2 = -\frac{B_3}{256(A_1\beta f_2)^4\alpha^2}[64A_1^3\alpha^{3/2}(\beta f_2)^2((A_3 - 4A_1)B_3\sqrt{\alpha} + A_3(\alpha - 2B_3^2)) +$$
$$+ b_3^2\{256A_1^3B_3^2\alpha^{3/2}((A_1+A_3)B_3\sqrt{\alpha} - A_3(2\alpha - B_3^2)) + (A_1A_3)^2B_3(32\alpha(8A_1\alpha\beta -$$
$$- (\alpha + B_3^2)B_3^2) - 64B_3(4\alpha - 5B_3^2)\alpha^{3/2} + 9(A_3B_3\beta)^2) + 48A_1A_3^3B_3^2(2A_1\alpha\beta +$$
$$+ (5\alpha - B_3^2)(B_3 - \sqrt{\alpha})B_3)\sqrt{\alpha} - 36(A_3B_3)^4(\sqrt{\alpha} - B_3)^2\sqrt{\alpha}\}],$$

$$c_1 = -\frac{B_3^2}{16A_1^2(\beta f_2)^3\alpha}[8A_1((2A_1 - A_3)B_3\sqrt{\alpha} - A_3(\alpha - 2B_3^2))\sqrt{\alpha} -$$
$$- A_3^2((\alpha - 3B_3^2)B_3 - 2(\alpha - 2B_3^2)\sqrt{\alpha})], \tag{16}$$

$$c_0 = \frac{\delta_1}{b_3^4}, \quad \delta_1 = \frac{8(A_1B_3)^3\alpha^2}{\delta^2}((4A_1 - 3A_3)\alpha + 3A_3B_3\sqrt{\alpha})(16A_1^2B_3\alpha -$$
$$- 8A_1A_3(B_3\sqrt{\alpha} + (\alpha - 2B_3^2))\sqrt{\alpha} + A_3^2(2(\alpha - 2B_3^2)\sqrt{\alpha} - B_3(\alpha - 3B_3^2))),$$

$$g_4 = b_3f_2, \quad g_3 = -\frac{(\sqrt{\alpha} - B_3)A_3B_3b_3}{A_1\sqrt{\alpha}\beta}, \quad g_2 = \frac{(B_3 - \sqrt{\alpha})A_3B_3b_3}{A_1\beta^2 f_2},$$

$$g_0 = \frac{\delta_2}{b_3^2}, \quad \delta_2 = \frac{\sqrt{A_1}A_3B_3(\sqrt{\alpha} - B_3)\alpha}{\beta\sqrt{2\delta}}, \quad g_1 = \frac{\delta_3}{b_3},$$

$$\delta_3 = \frac{B_3}{2\beta}[1 + \delta^{-1}\{64A_1^3(B_3\alpha)^2 - 16A_1^2A_3B_3\alpha^{3/2}((\sqrt{\alpha} - 5B_3)B_3 +$$
$$+ 4\alpha) + 12A_1A_3^2B_3\alpha((B_3^2 - 7\alpha)B_3 + 2(2\alpha + B_3^2)\sqrt{\alpha}) +$$
$$+ 9A_3^3B_3^2(\alpha(\alpha + 3B_3^2) - (3\alpha + B_3^2)B_3\sqrt{\alpha})\}],$$

$$a_2 = \frac{B_3}{\beta}, \quad a_1 = \frac{(\sqrt{\alpha} - B_3)A_3B_3}{2A_1\beta^2 f_2}, \quad a_0 = -\frac{\delta_3}{4b_3^2},$$

$$b_2 = \frac{(A_3B_3 - (4A_1 + A_3)\sqrt{\alpha})B_3b_3}{4A_1\sqrt{\alpha}\beta f_2},$$

$$b_1 = \frac{B_3b_3}{16(A_1\beta f_2)^2\alpha}[8A_1\sqrt{\alpha}((2A_1 + A_3)B_3\sqrt{\alpha} + (B_3^2 - 2\alpha)A_3) -$$
$$- 3A_3^2B_3(\sqrt{\alpha} - B_3)^2], \quad b_0 = 0.$$

Здесь b_3 – корень уравнения

$$b_3^4 = \delta_1 f_1^2 + \delta_2^2 + \frac{\delta_3^2}{16}.$$

Решение (12) при условиях (16) будет действительным, если

$$\delta > 0, \quad \delta_1 > 0. \tag{17}$$

Зависимость σ от времени находим из (7)

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{4b_3}\sqrt{R(\sigma)}. \tag{18}$$

Рассмотрим численный пример решения (12), (13), (16), (18) дифференциальных уравнений (3), (4) при условиях (17).

Пусть

$$A_1 = \frac{19}{20}A_3, \quad A_2 = A_3 = a,$$
$$B_1 = -\frac{(33 + 10\sqrt{5})}{190}B_3, \quad B_2 = B_3 = b, \quad C_2 = C_3, \quad \beta = -\frac{b^2}{a}, \tag{19}$$
$$(a > 0, \quad b > 0).$$

Тогда из (16) получим:

$$\mathbf{s} = \frac{b}{160\gamma b_3^2}\left(-\frac{1587950 + 370317\sqrt{5}}{\gamma};\ 19\sqrt{19};\ 0\right),$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{a}{40\gamma b_3^2}\left(-\frac{11532595 + 3911143\sqrt{5}}{76\gamma};\ (5\sqrt{5}+26)\sqrt{19};\ 0\right); \tag{20}$$

$$\omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2 = b_3\sigma^3 + \frac{\sqrt{19}\sigma}{2\gamma}\left((5\sqrt{5}-12)\sigma + \frac{\sqrt{19}}{4\gamma b_3}(321\sqrt{5}-512)\right),$$

$$\begin{gathered}\omega_3^2 = R(\sigma) = -b_3^2\sigma^6 - \frac{(5\sqrt{5}-12)\sqrt{19}b_3}{\gamma}\sigma^5 - \frac{57(67\sqrt{5}-81)}{4\gamma^2}\sigma^4 - \\ - \frac{513(1258\sqrt{5}+5489)\sqrt{19}}{8\gamma^3 b_3}\sigma^3 + \frac{361(6686614\sqrt{5}+10849313)}{64(\gamma^2 b_3)^2}\sigma^2 - \\ - \frac{361(273\sqrt{5}+823)\sqrt{19}}{32(\gamma b_3)^3}\sigma + \frac{6859(12891\sqrt{5}+22121)}{128(\gamma b_3)^4},\end{gathered} \tag{21}$$

$$\nu_1 = \frac{a}{b}\left(-\sigma^2 - \frac{(\sqrt{5}-10)\sqrt{19}}{4\gamma b_3}\sigma + \frac{5(6668\sqrt{5}+31417)}{16(\gamma b_3)^2}\right),$$

$$\begin{gathered}\nu_2 = \frac{a}{b}\left(-\frac{4\sqrt{19}\gamma b_3^2}{361}\sigma^4 - \frac{20(2\sqrt{5}-1)b_3}{19}\sigma^3 + \frac{(\sqrt{5}-10)\sqrt{19}}{2\gamma}\sigma^2 - \right. \\ \left. - \frac{5(6668\sqrt{5}+31417)}{4\gamma^2 b_3}\sigma - \frac{(\sqrt{5}-10)\sqrt{19}}{16\gamma b_3^2}\right),\end{gathered}$$

$$\nu_3 = -\frac{2}{19}\frac{a}{b}\left(\frac{2\gamma\sqrt{19}b_3}{19}\sigma + 15\sqrt{5}+2\right)\sqrt{R(\sigma)}.$$

Здесь

$$\gamma = \sqrt{20189\sqrt{5}+67017},$$

$$b_3 = \frac{\sqrt{739}(1106746334602 - 205863866086\sqrt{5})^{1/4}\sqrt{a}}{65032\sqrt{b}}.$$

Функцию $\sigma = \sigma(t)$ находим из уравнения (18). Действительность решения (18)-(21) вытекает из условия, что подкоренная функция $\omega_3(\sigma) = \sqrt{R(\sigma)}$ в точке $\sigma = 0$ принимает положительное значение. При этом зависимость $\sigma = \sigma(t)$ выражается функциями времени, полученными в результате обращения гиперэллиптических интегралов.

1. *Стеклов В.А.* Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1899. – **10**, № 1. – С. 1-3.

2. *Kowalewsky N.* Eine neue partikulare Lösung der Differenzial Gleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1908. – B. 65. – S. 528-537.
3. *Горячев Д.Н.* Новое частное решение задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1899. – **10**, № 1. – С. 23-24.
4. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1965. – 221 с.
5. *Докшевич А.И.* Новое частное решение уравнений движения гиростата, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 12-15.
6. *Горр Г.В., Зыза А.В.* О редукции дифференциальных уравнений в двух задачах динамики твердого тела // Труды ИПММ НАН Украины. – 2009. – Т. 18. – С. 29-36.
7. *Горр Г.В., Зыза А.В.* Полиномиальные решения в одной задаче о движении гиростата с неподвижной точкой // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 6. – С. 12-21.
8. *Зыза А.В.* Один случай полиномиальных решений уравнений Кирхгофа-Пуассона // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 103-109.
9. *Зыза А.В.* Об одном классе полиномиальных решений уравнений Кирхгофа // Вісник Донецького нац. університету. Сер. А: Природничі науки. – 2006. – Вып. 1. – С. 40-46.
10. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2010. – 364 с.

A. V. Zyza

A new solution to the equation of gurostat movement under the influence of potential and guroscopic forces.

A new solution to the equation of gurostat movement has been found in the paper, which is described by Kirchhoff s equation. The main variables of the task are presented as polynomials of one of the components of anqualar velocity vector and are defined by the functions obtained as a result of huperelliptic integral inversion.

Keywords: *gurostat, polunomial, solution, Kirchhoff s equation, first integrals, potential and guroscopic forces.*

О. В. Зиза

Новий розв'язок рівнянь руху гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил.

У роботі знайдено новий розв'язок рівнянь руху гіростата, який описується диференціальними рівняннями Кірхгофа. Основні змінні задачі зображено у вигляді многочленів від однієї з компонент вектора кутової швидкості й визначено функціями, отриманими в результаті обернення гіпереліптичних інтегралів.

Ключові слова: *гіростат, поліноміальні розв'язки, рівняння Кірхгофа, перші інтеграли, потенціальні і гіроскопічні сили.*

Донецкий национальный ун-т
3bl3a@mail.ru

Получено 14.11.12