УДК 517.5

©2012. **В. В. Волчков, Вит. В. Волчков**

ТЕОРЕМЫ ТИПА МОРЕРЫ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Изучаются функции с нулевыми искаженными средними по окружностям фиксированных радиусов. Найдена характеризация решений уравнения $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) - \frac{z}{4}f(z) = 0$ в терминах указанных интегральных средних.

Ключевые слова: *теоремы типа Мореры, искаженная свертка, группа Гейзенберга.*

1. Введение. Характеризация голоморфных функций в терминах различных интегральных условий изучалась многими авторами. В ряде работ последних лет рассматривался случай, когда контуры интегрирования в интегральном условии конгруэнтны (относительно некоторой группы) одному или нескольким фиксированным контурам. Указанный аспект теорем типа Мореры тесно связан с известной проблемой Помпейю (см. [1-5] и имеющуюся там библиографию).

В данной работе изучаются классы функций, удовлетворяющих условиям вида

$$\int_{|w|=r} f(z-w)e^{\frac{i}{2}\mathrm{Im}(z\overline{w})}dw = 0, \tag{1}$$

где r является фиксированным числом или принадлежит заданному двухэлементному множеству. Интерес к уравнению (1) обусловлен тем, что оно тесно связано с CR-функциями на группе Гейзенберга H^n, которая широко используется в различных областях математики. Ряд достаточных условий для CR-функций на H^n был установлен в [6], [7]. Наличие экспоненты в (1) препятствует простой связи между Помпейю и Морера свойствами на H^n, которая существует в обычной евклидовой ситуации. В связи с этим, доказательство теорем типа Мореры на H^n требует значительных усилий. В [6] авторы существенно используют тауберову теорему для подалгебры радиальных функций из $L^1(H^n)$, принадлежащую Хуланики и Риччи [8]. Доказательства в [7] опираются на спектральную теорию, развитую Стрихарцем в [9]. Соответственно, все результаты в [6], [7] носят глобальный характер и включают ограничения на рост функции на бесконечности.

Принципиальное отличие данной работы состоит в том, что уравнение (1) изучается здесь локально, а именно для $f \in C(B_R)$, где $B_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $R \in (r, \infty)$. В этом случае получено описание функций с условием (1), доказана теорема единственности, а также найдена характеризация решений уравнения

$$Df(z) := \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) - \frac{z}{4}f(z) = 0 \tag{2}$$

в терминах указанных интегральных средних (см. теоремы 1-3). Отметим, что решения уравнения (2) можно рассматривать как класс обобщенных аналитических функций в смысле Векуа [10]. Таким образом, теорема 3 является теоремой типа Мореры для указанного класса функций. Методы доказательства теорем 1-3 основаны на теории трансмутационных операторов на фазовом пространстве группы Гейзенберга, развитой авторами в [5].

2. Основные результаты. Пусть G – область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, A и B – функции, определенные в G. Следуя [10], обозначим $\mathfrak{A}(A, B, G)$ совокупность локально интегрируемых в G функций, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + Af + B\overline{f} = 0.$$

Элементы $\mathfrak{A}(A, B, G)$ называются обобщенными аналитическими функциями в смысле Векуа. В указанной терминологии нас будет интересовать характеризация обобщенных аналитических функций класса $\mathfrak{A}(-z/4, 0, B_R)$.

Интегральные средние в (1) тесно связаны с собственными функциями дифференциального оператора

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{4}|z|^2 \mathrm{Id} + \left(z\frac{\partial}{\partial z} - \overline{z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) - \Delta,$$

где Id – тождественный оператор, Δ – оператор Лапласа на $\mathbb{C}$. Сформулируем сначала аналог классической теоремы о среднем для таких функций.

Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}$, $t \geqslant 0$ положим

$$\phi_{\lambda,m}(t) = t^{|m|} e^{-t^2/4} \, {}_1F_1\left(\frac{m + |m| + 1 - \lambda^2}{2}; |m| + 1; \frac{t^2}{2}\right),$$

где ${}_1F_1$ – вырожденная гипергеометрическая функция Куммера [11, гл. 6]. Отметим, что функции $\Phi_{\lambda,m}(z) = \phi_{\lambda,m}(\rho)e^{im\varphi}$, где ρ, φ – полярные координаты точки $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяют уравнению

$$\mathfrak{L}\Phi_{\lambda,m} = \lambda^2 \Phi_{\lambda,m}.$$

Кроме того, нетрудно убедиться, что $\mathfrak{L}f = -f$, если f принадлежит ядру оператора D.

Предложение 1. *Пусть $f \in C(B_R)$, $\mathfrak{L}f = \lambda^2 f$ в B_R и $r \in (0, R)$. Тогда в круге B_{R-r} имеет место равенство*

$$\int_{|w|=r} f(z - w) e^{\frac{i}{2}\mathrm{Im}(z\overline{w})} dw = -2\pi r i \phi_{\lambda,-1}(r)(Df)(z). \tag{3}$$

Пусть $M_r(B_R)$ – множество функций $f \in C(B_R)$, удовлетворяющих уравнению (1) при $|z| < R - r$. Равенство (3) показывает, что важную роль в структуре класса $M_r(B_R)$ играют нули λ целой функции $\phi_{\lambda,-1}(r)$. Следующее утверждение дает детальную информацию об этих нулях.

Предложение 2.

(i) *Функция $\phi_{\lambda,-1}(r)$ имеет бесконечно много нулей λ. Все нули $\phi_{\lambda,-1}(r)$ являются вещественными, простыми и расположены симметрично относительно точки $\lambda = 0$.*

(ii) *Пусть $\lambda_l = \lambda_l(r)$ ($l \in \mathbb{N}$) – последовательность всех положительных нулей $\phi_{\lambda,-1}(r)$, занумерованных в порядке возрастания, и пусть $0 < a \leqslant r \leqslant b < +\infty$. Тогда*

$$r\lambda_l = \pi\left(\frac{5}{4} + l + j(r)\right) + \left(\frac{r^3}{12} - r - \frac{3}{4r}\right)\frac{1}{2\lambda_l} + O\left(\frac{1}{\lambda_l^3}\right),$$

где $j(r)$ – целое число, не зависящее от l, а постоянные в O зависят только от a, b.

(iii) *Пусть $N(r) = \{\lambda > 0 : \phi_{\lambda,-1}(r) = 0\}$, $\lambda, \mu \in N(r)$ и $\lambda \neq \mu$. Тогда*

$$\int_0^r \varrho\phi_{\lambda,-1}(\varrho)\phi_{\mu,-1}(\varrho)d\varrho = 0.$$

(iv) *Предположим, что $v \in L[0, r]$ и*

$$\int_0^r \varrho v(\varrho)\phi_{\lambda,-1}(\varrho)d\varrho = 0$$

для всех $\lambda \in N(r)$. Тогда $v = 0$.

Перейдем теперь к описанию гладких функций класса $M_r(B_R)$. Представим функцию $f \in C^\infty(B_R)$ в виде ряда Фурье

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(z),$$

где

$$f_m(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta})e^{-im\theta}d\theta\, e^{im\varphi}.$$

Теорема 1. *Пусть $f \in C^\infty(B_R)$. Тогда для того, чтобы $f \in M_r(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $m \in \mathbb{Z}$ имели место равенства*

$$f_m(z) = c_m z^m e^{|z|^2/4} + \sum_{\lambda \in N(r)} d_\lambda \Phi_{\lambda,m}(z), \tag{4}$$

где c_m, d_λ – константы, удовлетворяющие условиям: 1) $c_m = 0$ при $m < 0$; 2) $d_\lambda = O(\lambda^{-c})$ при $\lambda \to +\infty$ для любого фиксированного $c > 0$.

Указанное условие на d_λ влечет сходимость ряда (4) в пространстве $C^\infty(B_R)$. Отметим, что аналогичное разложение справедливо для всех функций класса $M_r(B_R)$.

При этом коэффициенты d_λ растут не быстрее фиксированной степени λ, а ряд (4) сходится в смысле распределений.

Доказательство теоремы 1 существенно опирается на следующую теорему единственности для класса $M_r(B_R)$.

Теорема 2.

(i) *Пусть* $f \in M_r(B_R)$ *и* $f = 0$ *в* $B_{r+\varepsilon}$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$. *Тогда* $f = 0$ *в* B_R.

(ii) *Если* $f \in (M_r \cap C^\infty)(B_R)$ *и* $f = 0$ *в* B_r, *то* $f = 0$ *в* B_R.

(iii) *Для любого* $m \in \mathbb{N}$ *существует ненулевая функция* $f \in (M_r \cap C^m)(B_R)$ *такая, что* $f = 0$ *в* B_r.

(iv) *Для любого* $\varepsilon \in (0, r)$ *существует ненулевая функция* $f \in (M_r \cap C^\infty)(B_R)$ *такая, что* $f = 0$ *в* $B_{r-\varepsilon}$.

Это утверждение является аналогом известного результата Ф. Йона для функций с условием (1) (см. [12]).

Теорема 1 позволяет получить характеризацию решений уравнения $Df = 0$ в терминах интегральных средних (1) по окружностям двух фиксированных радиусов.

Пусть $r_1, r_2 \in (0, R)$, $r_1 \neq r_2$. Определим $M_{r_1,r_2}(B_R) = M_{r_1}(B_R) \cap M_{r_2}(B_R)$. Для целого $s \geqslant 0$ (или для $s = \infty$) положим $M^s_{r_1,r_2}(B_R) = M_{r_1,r_2}(B_R) \cap C^s(B_R)$. Свойства $M_{r_1,r_2}(B_R)$ существенно зависят от наличия общих элементов у множеств $N(r_1)$ и $N(r_2)$, а также от скорости сближения элементов этих множеств на бесконечности. Обозначим $N(r_1, r_2) = N(r_1) \cap N(r_2)$ и пусть Ω – множество пар (r_1, r_2), для которых выполнено следующее условие: при любом $c > 0$ существует $\lambda \in N(r_1)$ такое, что $|\phi_{\lambda,-1}(r_2)| < (1 + \lambda)^{-c}$. Очевидно, что $(r_1, r_2) \in \Omega$, если $N(r_1, r_2) \neq \varnothing$. Перечислим некоторые свойства множеств $N(r_1, r_2)$ и Ω.

Предложение 3.

(i) *При любом* $r_1 > 0$ *множество* $\{r_2 > 0 : N(r_1, r_2) \neq \varnothing\}$ *является счетным и всюду плотным на* $(0, \infty)$.

(ii) *При любом* $r_1 > 0$ *пересечение множества* $\{r_2 > 0 : (r_1, r_2) \in \Omega\}$ *с любым интервалом* $(a, b) \subset (0, \infty)$ *является несчетным.*

(iii) *При любом* $r_1 > 0$ *множество* $\{r_2 > 0 : (r_1, r_2) \in \Omega\}$ *имеет нулевую лебегову меру на* $(0, \infty)$.

(iv) *Если* $(r_1, r_2) \in \Omega$ *и* $N(r_1, r_2) = \varnothing$, *то число* r_1/r_2 *иррационально.*

Следующий результат является локальной теоремой типа Мореры для функций класса $\mathfrak{A}(-z/4, 0, B_R)$.

Теорема 3.

(i) *Если* $r_1 + r_2 < R$, $N(r_1, r_2) = \varnothing$ *и* $f \in M_{r_1,r_2}(B_R)$, *то* $Df = 0$.

(ii) *Если* $r_1 + r_2 = R$, $N(r_1, r_2) = \varnothing$ *и* $f \in M^{\infty}_{r_1,r_2}(B_R)$, *то* $Df = 0$.

(iii) *Если* $r_1 + r_2 = R$, $N(r_1, r_2) = \varnothing$, $(r_1, r_2) \in \Omega$ *и* $f \in M_{r_1,r_2}(B_R)$, *то* $Df = 0$.

(iv) *Если* $r_1+r_2 = R$, $(r_1, r_2) \notin \Omega$, *то для любого целого* $s \geqslant 0$ *существует функция* $f \in M^{s}_{r_1,r_2}(B_R)\backslash\mathfrak{A}(-z/4, 0, B_R)$.

(v) *Если* $r_1 + r_2 > R$, *то существует функция* $f \in M^{\infty}_{r_1,r_2}(B_R)\backslash\mathfrak{A}(-z/4, 0, B_R)$.

(vi) *Если* $N(r_1, r_2) \neq \varnothing$, *то существует вещественно-аналитическая функция* $f \in M_{r_1,r_2}(B_R)\backslash\mathfrak{A}(-z/4, 0, B_R)$.

Предложение 3 показывает, что все ситуации, описанные в теореме 3, реализуются при подходящих r_1, r_2.

Утверждения (iv), (ii) и (vi) теоремы 3 позволяют сделать вывод о характере допустимой гладкости функций класса $M_{r_1,r_2}(B_R)\backslash\mathfrak{A}(-z/4, 0, B_R)$. В частности, максимальная гладкость (вещественная аналитичность) у таких функций возможна в случае $N(r_1, r_2) \neq \varnothing$. При условиях утверждения (iv) возможна любая конечная гладкость, и этот результат не может быть улучшен (см. утверждение (ii)). В остальных случаях (то есть, когда $N(r_1, r_2) = \varnothing$ и $r_1+r_2 > R$), вопрос о точной характеристике максимальной гладкости функций класса $M_{r_1,r_2}(B_R)\backslash\mathfrak{A}(-z/4, 0, B_R)$ решается в терминах теории квазианалитических классов функций.

Теорема 4. *Пусть* $R > r_2 > r_1 > 0$. *Тогда выполнены следующие утверждения.*

(i) *Если* $N(r_1, r_2) = \varnothing$, $f \in M^{\infty}_{r_1,r_2}(B_R)$ *и существует последовательность* $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ *положительных чисел такая, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\inf_{q\geqslant j} M_q^{1/q}\right)^{-1} = \infty \tag{5}$$

и

$$\sup_{z\in B_{r_1}}\left|\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^{\alpha_2} f\right| \leqslant M_{\alpha_1+\alpha_2} \tag{6}$$

для всех $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}_+$, *то* $Df = 0$.

(ii) *Если* $r_1+r_2 > R$, *то для любой последовательности* $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ *положительных чисел такой, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\inf_{q\geqslant j} M_q^{1/q}\right)^{-1} < \infty,$$

существует функция $f \in M^{\infty}_{r_1,r_2}(B_R)\backslash\mathfrak{A}(-z/4, 0, B_R)$, *удовлетворяющая условию*

$$\sup_{z\in B_R}\left|\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^{\alpha_2} f\right| \leqslant M_{\alpha_1+\alpha_2}$$

для всех $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}_+$.

Согласно известной теореме Данжуа-Карлемана, условия (5) и (6) означают, что f принадлежит квазианалитическому классу функций в круге B_{r_1}. При $N(r_1, r_2) \neq \varnothing$ первое утверждение теоремы 4 неверно (см. утверждение (vi) теоремы 3).

Относительно других локальных вариантов теоремы типа Мореры см. [4], [5] и библиографию к этим работам.

1. *Беренстейн К.А., Струппа Д.* Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. – Т. 54. – М.: ВИНИТИ, 1989. – С. 5-111.
2. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations / ed. Fuglede B. et. al. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. – P. 185-194.
3. *Zalcman L.* Supplementary bibliography to 'A bibliographic survey of the Pompeiu problem' // Contemp. Math. / Radon Transform and Tomography. – 2001. – V. 278. – P. 69-74.
4. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 pp.
5. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – London: Springer-Verlag, 2009. – 671 pp.
6. *Agranovsky M., Berenstein C., Chang D.C.* Morera theorem for holomorphic H^p spaces in the Heisenberg group // J. Reine Angew. Math. – 1993. – V. 443. – P. 49-89.
7. *Thangavelu S.* Spherical means and CR functions on the Heisenberg group // J. Analyse Math. – 1994. – V. 63. – P. 255-286.
8. *Hulanicki A., Ricci F.* A Tauberian theorem and tangential convergence for boundary harmonic functions on balls in $\mathbb{C}^n$ // Invent. Math. – 1980. – V. 62. – P. 325-331.
9. *Strichartz R.* L^p harmonic analysis and Radon transform on the Heisenberg group // J. Funct. Anal. – 1991. – V. 96. – P. 350-406.
10. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.
11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, I. М.: Наука, 1973. – 294 с.
12. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М.: ИЛ, 1958. – 158 с.

V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov

Morera type theorems for generalized analytic functions.

Functions with zero twisted means over circles of fixed radii are studied. A characterization of solutions of the equation $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) - \frac{z}{4} f(z) = 0$ in terms of the above means is founded.

Keywords: *Morera type theorems, twisted convolution, Heisenberg group.*

В. В. Волчков, Віт. В. Волчков

Теореми типу Морери для узагальнених аналітичних функцій.

Вивчаються функції з нульовими викривленими середніми по колах фіксованих радіусів. Знайдено характеризацію розв'язків рівняння $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) - \frac{z}{4} f(z) = 0$ у термінах зазначених інтегральних середніх.

Ключові слова: *теореми типу Морери, викривлена згортка, група Гейзенберга.*

Донецкий национальный ун-т
`valeriyvolchkov@gmail.com`

Получено 27.11.12