УДК 531.38

©2012. **О. С. Волкова**

ДВА ЛИНЕЙНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕАВТОНОМНОГО ГИРОСТАТА

Исследованы специальные классы вращений вокруг неподвижной точки тяжелого гиростата с фиксированным направлением гиростатического момента. Показано, что если уравнения движения гиростата допускают два линейных по компонентам угловой скорости инвариантных соотношения, то будет выполняться по крайней мере одно линейное по компонентам суммарного момента количества движения соотношение. Изучены случаи, когда выполняются два или три таких соотношения.

Ключевые слова: *гиростат с неподвижной точкой, переменный гиростатический момент, инвариантное соотношение.*

Введение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из тела-носителя S, имеющего неподвижную точку, и закрепленных на нем тел S^i, $i = 1, 2, .., n$. Пусть система $\{S, S^1, .., S^n\}$ удовлетворяет определению гиростата П.В. Харламова [1]. В этом случае динамические характеристики носителя не зависят от вращения присоединенных тел, а уравнения движения имеют вид

$$\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}, \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{J}$ – обобщенный тензор инерции; $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость гиростата в подвижном базисе; $\boldsymbol{\nu}$ – орт вертикали; $\boldsymbol{e}$ – орт радиус-вектора центра масс; $\boldsymbol{\lambda}$ – переменный гиростатический момент. Считаем, что симметричный тензор $\boldsymbol{J}$ приведен к главным осям: $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3)$.

При $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathrm{const}$ известны два первых интеграла уравнений движения:

$$(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = g, \quad |\boldsymbol{\nu}|^2 = 1. \tag{2}$$

Предположим, что направление гиростатического момента фиксировано в связанном с корпусом гиростата базисе: $\boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$, $|\boldsymbol{\alpha}| = 1$, где $\lambda(t)$ – непрерывно дифференцируемая ограниченная функция времени. Обозначим $\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \lambda(t)\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{K}$.

Исследуем движения гиростата, характеризующиеся двумя линейными по $\boldsymbol{\omega}$ инвариантными соотношениями. В [2] показано, что всегда можно выбрать $\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}$ так, чтобы

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta_1}) = c, \ (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta_2}) = 0, \quad \boldsymbol{\beta_1} \perp \boldsymbol{\beta_2}, \ |\boldsymbol{\beta_1}| = |\boldsymbol{\beta_2}| = 1, \tag{3}$$

где $c = \mathrm{const}$; тогда для вектора угловой скорости справедливо разложение

$$\boldsymbol{\omega} = c\boldsymbol{\beta_1} + \omega\,(\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}), \ \text{ где } \ \omega = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}). \tag{4}$$

Поскольку движения с перманентной осью вращения для гиростата с гиростатическим моментом $\lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$ изучались ранее в [3-6] и других работах, здесь будем предполагать, что $\omega = \omega(t) \neq \mathrm{const}$ и $c \neq 0$.

В задаче о движении твердого тела двум линейным соотношениям вида (3) соответствуют решение Бобылева–Стеклова [7, 8] и решение задачи о движении физического маятника (при $c = 0$). В случае $\boldsymbol{\lambda} = \text{const}$ решение системы (1) с соотношениями (3) получено П.В. Харламовым [9]. Для гиростата с $\boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$, находящегося под действием общих потенциальных и гироскопических сил, два линейных по $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\nu}$ инвариантных соотношения изучались в [10] в предположении, что λ – линейная функция компонент вектора $\boldsymbol{\nu}$. Поиску решений, допускающих два линейных по $\boldsymbol{\omega}$ соотношения и соответствующих немаятниковым движениям неавтономного гиростата, посвящены работы [2], [11].

В [2] изучен вопрос существования решений системы (1) с соотношениями (3) в случае, когда проекция суммарного момента количества движения на барицентрическую ось постоянна: $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{e}) = \text{const}$. Выписаны условия на параметры, при которых существуют решения с указанными свойствами.

Полученные в [2] условия детально проанализированы в п. 1 данной работы, исследованы также соответствующие квадратуры для определения зависимости $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\nu}$ и λ от времени. В п. 2 продолжено исследование существования решений с соотношениями (3) без предположения о постоянстве барицентрической проекции вектора $\boldsymbol{K}$. Завершающий п. 3 содержит сопоставление результатов работ [2], [11].

Замена независимой переменной. Кинематические уравнения системы (1) с учетом разложения (4) могут быть представлены в виде

$$
\begin{aligned}
&(\dot{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{\beta_1}) = \omega\,(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_2}),\\
&(\dot{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) = -c(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_2}),\\
&(\dot{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{\beta_2}) = c(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) - \omega\,(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_1}).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Отметим, что $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_2})$ не тождественный ноль, иначе из (5) следовало бы $\dot{\boldsymbol{\nu}} = 0$ и $\omega(t) = \text{const}$. На промежутках знакопостоянства функции $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_2})$ введем вспомогательную переменную τ: $\dot{\tau} = (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_2})$; тогда система (5) сведется к уравнениям

$$
(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) = -c\tau, \;\; (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_1}) = \int \omega(\tau)\, d\tau,
\tag{6}
$$

$$
\dot{\tau} = \pm\sqrt{1 - c^2\tau^2 - \left(\int \omega(\tau)\, d\tau\right)^2}.
\tag{7}
$$

Зависимость $\omega(\tau)$ предстоит найти из условий разрешимости динамических уравнений системы (1) относительно функции $\lambda(\tau)$. После исключения $\lambda(\tau)$ из (1) система сводится к двум интегродифференциальным уравнениям для функции $\omega(\tau)$. Как следствие, можно получить два алгебраических соотношения вида $M_1(\omega, \tau){=}0$, $M_2(\omega, \tau){=}0$, где M_1, M_2 – многочлены с коэффициентами, сложным образом зависящими от параметров. Значит, необходимым условием совместности системы (1) при условиях (3) будет $R(\tau) \equiv 0$, где $R(\tau)$ – результант M_1 и M_2 как многочленов от ω. Указанное тождество приводит к системе алгебраических условий на параметры гиростата и начальные условия движения. Проверка разрешимости такой системы в общем случае требует громоздких выкладок.

1. Исследование решений, соответствующих случаю $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{e}) = \mathbf{const}$. Случай $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{e})$=const рассмотрен в [2]: показано, что $\boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{\beta_2}$ и $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{\beta_2}) = 0$; приведены дополнительные условия на параметры системы (1), обеспечивающие существование решений с соотношениями (3). Для каждого из трех наборов условий выпишем и проанализируем квадратуры, связывающие t со вспомогательной переменной τ, и укажем зависимости от τ фазовых переменных.

$$\text{A)}\ \ \boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{\beta_2} \parallel \boldsymbol{J\beta_2} \perp \boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}), \tag{8}$$

зависимость гиростатического момента от τ имеет вид

$$\lambda(\tau) = -(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}), \boldsymbol{\alpha})\omega(\tau) + (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_2})\tau + \lambda_0, \ \ \lambda_0 = \text{const},$$

а функция $\omega(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$[(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_2})\tau + \lambda_0](\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta_2}, \boldsymbol{\omega}) + c(\boldsymbol{J\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}, \boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})\int \omega\, d\tau + (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1})c\tau. \tag{9}$$

Решения уравнения (9) определяют два различных семейства движений гиростата.

i) При $\boldsymbol{e} \nparallel \boldsymbol{\beta_1}$ из (9) получаем

$$\omega(\tau) = \frac{\omega_0}{L^2(\tau)} - \frac{c(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1})}{(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})}, \ L(\tau) = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})\tau - c(\boldsymbol{J\beta_1}, \boldsymbol{\beta_1}) - \lambda_0(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1}),$$

функция $\lambda(\tau)$, необходимая для реализации заданного движения, имеет вид

$$\lambda(\tau) = -\frac{\omega_0(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})}{L^2(\tau)} - \frac{L(\tau)}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1})} + \frac{c(\boldsymbol{J\beta_1} \times \boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_2})}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1})(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})}, \ \omega_0 = \text{const} \neq 0,$$

компоненты $\boldsymbol{\nu}$ выражаются через τ согласно формулам (6)-(7): $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) = -c\tau$,

$$(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_1}) = \frac{-\omega_0}{(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})L(\tau)} - \frac{c(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1})\tau}{(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})} - \frac{c^2(\boldsymbol{J\beta_1}, \boldsymbol{e})}{(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})^2}, \ (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_2}) = \dot{\tau},$$

а функция $L(\tau(t))$ связана с t эллиптической квадратурой

$$dL(\tau) = \pm\frac{\sqrt{-c^2L^4(\tau) - 2kc^2L^3(\tau) + k_2L^2(\tau) + k_1L(\tau) - \omega_0^2(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})^2}}{(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})L(\tau)}\, dt, \tag{10}$$

$$\text{где} \quad k = \lambda_0(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1}) + c(\boldsymbol{J\beta_1}, \boldsymbol{\beta_1}) + c(\boldsymbol{J\beta_1}, \boldsymbol{e})(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1}),$$
$$k_1 = -2c\omega_0(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})[(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})^2(\boldsymbol{J\beta_1}, \boldsymbol{e})c + (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1})k],$$
$$k_2 = -c^4(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})^2(\boldsymbol{J\beta_1}, \boldsymbol{e})^2 - c^2k^2 - 2c\omega_0(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1}) + (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})^4.$$

Отметим, что нечетные степени $L(\tau)$ в (10) одновременно не исчезают: $\boldsymbol{J\beta_1} \nparallel \boldsymbol{e}$, поскольку при условиях (8) выполняется $\boldsymbol{Je} \parallel \boldsymbol{\beta_1}$. Обозначим через $M_4(L)$ многочлен от $L(\tau)$ под радикалом в (10). С учетом того, что старший коэффициент и свободный член $M_4(L)$ строго отрицательны, заключаем, что условие $M_4(L) \geq 0$ требует ограниченности $L(\tau)$ и $\dfrac{1}{L(\tau)}$. Но тогда и $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}$ будут ограничены.

В качестве примера укажем случай, когда уравнение (10) интегрируется в элементарных функциях. При $c^4 = \dfrac{(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})^2}{(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{e})^2}$ всегда существует такое ω_0, что $M_4(L)$ имеет хотя бы один кратный (возможно, комплексный) корень: требуемое значение ω_0 находится из кубического уравнения с коэффициентами, зависящими от $c, k, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}$. Но возможны случаи, когда при выбранном наборе параметров $M_4(L) \le 0$ для всех L. При $k = c(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{e})[(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1}) \pm 1]$ кубическое уравнение для ω_0 вырождается в квадратное. Для определенности положим $k = c(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{e})[(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1}) + 1]$, тогда при

$$\omega_0 = \frac{-(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})}{2c}\left[(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1}) + 2\sqrt{2 - 2(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1})} - 3\right]$$

многочлен $M_4(L)$ имеет двукратный корень вида

$$L_1 = \frac{c(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{e})}{2}\frac{\left[(\tilde{e}-3)(\tilde{e}^2 - 30\tilde{e} + 33)\sqrt{2} + 4(3\tilde{e}-5)(\tilde{e}-7)\sqrt{1-\tilde{e}}\right]}{(5\tilde{e}^2 - 30\tilde{e} + 29)\sqrt{2} - (\tilde{e}^2 - 22\tilde{e} + 41)]\sqrt{1-\tilde{e}}} \ne 0,$$

где $\tilde{e} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1})$, и два других действительных корня L_2, L_3 – такие, что

$$L_2 < L_3, \;\; (L_3 - L_1)(L_1 - L_2) > 0.$$

Соответственно, функция $L(t)$ на интервалах монотонности задается уравнением

$$(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})\frac{dL}{dt} = \pm\left|\frac{c(L - L_1)}{L}\right|\sqrt{(L - L_2)(L_3 - L)},$$

которое интегрируется в виде

$$\begin{gathered}\mp\frac{\varepsilon c\chi(t - t_0)}{(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})} = \chi \arcsin\left(\frac{2L - L_2 - L_3}{L_2 - L_3}\right) + \\ + \frac{L_1}{2}\ln\frac{(2\chi\sqrt{(L - L_2)(L_3 - L)} + (L_2 + L_3)(L + L_1) - 2(L_1 L + L_2 L_3))^2}{(L - L_1)^2},\end{gathered} \tag{11}$$

где $\varepsilon = \operatorname{sgn}\{c(L - L_1)L\}$, $\chi = \sqrt{(L_3 - L_1)(L_1 - L_2)}$. Соотношение (11) неявно задает зависимость $L(t)$ такую, что $\exists \lim\limits_{t\to\infty} L(t) = L_1$. Следовательно, движение гиростата будет *асимптотически равномерным* вращением, причем абсолютная величина гиростатического момента также будет стремиться к постоянной.

ii) При $\boldsymbol{e} \parallel \boldsymbol{\beta_1}$ уравнение (9) вырождается в алгебраическое. Кроме того, из (8) следует, что векторы $\boldsymbol{\beta_1}$, $\boldsymbol{\beta_2}$, $\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}$ направлены по главным осям. Тогда

$$\omega(\tau) = [\,2e_1\tau + \lambda_0\,]/J_1, \quad \lambda(\tau) = [\,(J_1 - 2J_3)e_1\tau + \lambda_0(J_1 - J_3)]/(J_1\alpha_3),$$

$$(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_1}) = [\,e_1\tau^2 + \lambda_0\tau + \nu_0\,]/J_1, \;\; (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) = -c\tau, \;\; (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_2}) = \dot{\tau}, \;\; \nu_0 = \mathrm{const},$$

$$\dot{\tau} = \frac{\pm 1}{J_1}\sqrt{-\tau^4 - 2\lambda_0 e_1\tau^3 - [J_1^2c^2 + 2e_1\nu_0 + \lambda_0^2]\tau^2 - 2\lambda_0\nu_0\tau + J_1^2 - \nu_0^2}. \tag{12}$$

Уравнение (12) интегрируется в эллиптических функциях; тип функции $\tau(t)$ зависит от значений произвольных постоянных λ_0, c, ν_0. Здесь так же, как в i), старший коэффициент многочлена $M_4(\tau)$ отрицателен, поэтому функция $\tau(t)$ ограничена. Условие $\exists\, \tau : M_4(\tau) > 0$ выполняется в четырех различных случаях:

I) $M_4(\tau)$ имеет один трехкратный корень и один простой;

II) $M_4(\tau)$ имеет один двукратный и два простых вещественных корня;

III) $M_4(\tau)$ имеет пару комплексных и два простых вещественных корня;

IV) все корни многочлена $M_4(\tau)$ вещественны и различны.

Для случая ii) нетрудно привести примеры выполнения каждого из условий I)-IV). Положим для определенности $e_1 = +1$, тогда

I) $\nu_0 = 0,\ J_1 = \dfrac{2}{3\sqrt{3}\,c^2},\ \lambda_0^2 = \dfrac{32}{27\,c^2}$;

II) $\nu_0 = -\dfrac{J_1^2 c^2}{2},\ J_1 = \dfrac{\sqrt{141 - 39\sqrt{13}}}{3c^2},\ \lambda_0^2 = \dfrac{-35 + 13\sqrt{13}}{18c^2}$;

III) $\nu_0 = -J_1 = \dfrac{-2}{c^2},\ \lambda_0 \neq 0$; IV) $\nu_0 = -\dfrac{J_1^2 c^2}{2},\ J_1 = \dfrac{\sqrt{141 - 39\sqrt{13}}}{3c^2},\ \lambda_0^2 = \dfrac{1}{c^2}$.

Соответствующие наборам параметров I) – IV) решения дифференциального уравнения (12) здесь не приводим. Отметим только, что движения гиростата с параметрами из пунктов I) – II) этого примера будут асимптотически равномерными вращениями, а в пунктах III) – IV) зависимость фазовых переменных от времени будет периодической.

При $\boldsymbol{\sigma} \neq 0$ указанные в [2] решения можно объединить одной формой записи:

$$\text{B)}\quad \boldsymbol{e} \parallel \boldsymbol{\beta_1},\ \boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta_2} \parallel \boldsymbol{J\beta_2},\quad |\boldsymbol{\sigma}| = |\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) \times \boldsymbol{\alpha}| \neq 0, \tag{13}$$

$$\text{C)}\quad \boldsymbol{e} \parallel \boldsymbol{\beta_1},\ \boldsymbol{\sigma} \perp (\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}),\ (\boldsymbol{J\beta_1} \times \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) = -2(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_1}) \neq 0 \tag{14}$$

и выполняются общие условия

$$(\boldsymbol{J\beta_k}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_k}) \neq 0,\quad \omega(\tau) = \tilde{\omega}_1\tau + \tilde{\omega}_0,\quad \lambda(\tau) = \frac{-(\boldsymbol{J\beta_k}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})\tilde{\omega}_1}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_k})}\,\tau + \lambda_0, \tag{15}$$

где $k = 1$ в случае B), $k = 2$ в случае C), а λ_0 однозначно выражается через $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_0$:

$$\lambda_0 = \frac{2(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_1})}{\tilde{\omega}_1}[(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})\tilde{\omega}_0 + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1})c] - (\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})\tilde{\omega}_0 - c(\boldsymbol{J\beta_1}, \boldsymbol{\alpha}).$$

Зависимости от τ компонент орта вертикали определяются равенствами

$$(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_1}) = \frac{\tilde{\omega}_1}{2}\,\tau^2 + \tilde{\omega}_0\tau + \nu_0,\ \ (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) = -c\tau,\ \ (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta_2}) = \dot{\tau},\ \ \nu_0 = \mathrm{const},$$

$$\dot{\tau} = \pm\sqrt{1 - c^2\tau^2 - \left(\frac{\tilde{\omega}_1}{2}\,\tau^2 + \tilde{\omega}_0\tau + \nu_0\right)^2}. \tag{16}$$

Для набора B) условий на параметры гиростата постоянные $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_0$ задаются так:

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e})}{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_2})},\ \ \tilde{\omega}_0 = c\left(\frac{2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1})} + \frac{(\boldsymbol{J\beta_1} \times \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_2})}{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_2})}\right),$$

а в случае C) соответствующие выражения имеют вид

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{-(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta_1})(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta_2})}{(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\beta_1})},\ \ \tilde{\omega}_0 = \frac{c(\boldsymbol{J\beta_1}\times\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta_1})}{(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\beta_1})}.$$

Так же, как в случае A)*ii*), при условиях B) и C) функция $\omega(\tau)$ линейна, уравнение (16) определяет эллиптическую зависимость $\tau(t)$ и исследуется подобным (12) образом. Но, в отличие от (12), здесь только две произвольных постоянных: c, ν_0.

Каждый из наборов условий A), B), очевидно, не противоречив. Проверки требует совместность условий C). Пусть векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta_1}$ заданы, причем $\boldsymbol{\alpha}\nparallel\boldsymbol{\beta_1}$. Тогда $\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2}$ – единичный вектор, который принадлежит пересечению конуса $(\boldsymbol{Jy}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}) = 0$ с плоскостью $(\boldsymbol{J\beta_1}\times\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta_1}),\boldsymbol{y}) = 0$, проходящей через начало координат, и не принадлежит плоскостям $(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{y}) = 0, (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta_1}),\boldsymbol{y}) = 0$ и конусу $(\boldsymbol{Jy}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{\beta_1}) = 0$. Обозначим $\boldsymbol{\beta_1}=\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\eta}$.

Если $\boldsymbol{\alpha}$ лежит в главной плоскости и

$$\alpha_1^2(J_2-J_3)^2+\alpha_2^2(J_1-J_3)^2+\alpha_3^2(J_1-J_2)^2\neq 0, \tag{17}$$

то конус распадается на пару перпендикулярных плоскостей, пересекающих плоскость $(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{y}) = 0$. Пусть, к примеру, $\alpha_1 = 0$, тогда имеем объединение плоскостей $y_1 = 0$ и $(J_1-J_2)\alpha_3y_2+(J_3-J_1)\alpha_2y_3 = 0$. Условия существования вектора $\boldsymbol{y}$ и направляющие векторы допустимых осей при $\alpha_1 = 0$ таковы:

1) $\alpha_2\alpha_3\beta_1(J_2-J_3)\neq 0: \ \ \boldsymbol{y}\parallel(0,\,\alpha_2(J_1-2J_3),\,\alpha_3(J_1-2J_2))\,,\ 2J_2\neq J_1\neq 2J_3;$

   $\boldsymbol{y}\parallel(J_1\beta_1(J_2-J_3)\alpha_2\alpha_3,\,(J_3-J_1)\alpha_2\Theta,\,(J_2-J_1)\alpha_3\Theta),$

   где $\Theta = 2J_1(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})_1+(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\alpha})_1,\ \ \Theta\neq J_1(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})_1,\ \Theta\neq 0,\ J_2\neq J_1\neq J_3;$

2) $\alpha_2 = 0,\ \beta_1\neq 0,\ J_1 = 2J_2\neq 2J_3,\ \ \ y_1 = 0,\ y_2y_3\neq 0;$

3) $\beta_1 = 0,\ (\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})_1\neq 0,\ \Theta = 0,\ (J_1-J_2)\alpha_3y_2 = (J_1-J_3)\alpha_2y_3\neq 0,\ y_1\neq 0;$

4) $J_2 = J_3 = 2J_1,\ (\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})_1\neq 0,\ \ \alpha_3y_2-\alpha_2y_3 = 0,\ y_1y_2y_3\neq 0.$

Если (17) не выполняется, то $(\boldsymbol{Jy}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha})\equiv 0$, но плоскости $(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{y})=0, (\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y})=0$ и $(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{y}) = 0$ совпадают; следовательно, при таких параметрах движение гиростата не является допустимым.

Пусть теперь $\boldsymbol{\alpha}$ не лежит в главной плоскости. Равенство $\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})$ в таком случае невозможно, то есть $\boldsymbol{\eta}\neq 0$. Взаимное расположение плоскости $(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{y}) = 0$ и конуса $(\boldsymbol{Jy}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}) = 0$ определяется знаком выражения

$$d = (\boldsymbol{J\alpha}\times\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{J\beta})^2-8\alpha_1\alpha_2\alpha_3(J_2-J_3)(J_3-J_1)(J_1-J_2)(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}):$$

при $d>0$ в пересечении лежат две образующих конуса, при $d=0$ – одна, а при $d<0$ допустимых $\boldsymbol{y}$ не существует. В частности, $d>0$ при $\boldsymbol{J\beta}\parallel\boldsymbol{\beta}$, и допустимая ось существует всегда, когда $2J_2\neq J_1\neq 2J_3$. Несложно указать и случаи с $d\leq 0$. Положим $\beta_1=(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})_1=0,\ J_1=1,\ J_2=3/2.$ Если дополнительно задать $J_3=3/4$, то $d = 0$, а если $J_3 \in (1/2; 3/4)$, то $d < 0$. Поскольку при $J_3 = 3/4$ пересечение $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{y}) = 0$ и $(\boldsymbol{J}\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$ принадлежит конусу $(\boldsymbol{J}\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\beta}) = 0$, то для всех J_3 из интервала $(1/2;\, 3/4]$ искомого $\boldsymbol{y}$ не существует. Итак, в случае C) условия существования вектора $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}$ изучены при всех значениях параметров.

Замечание. Условия C) без учета неравенства $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta_1}) \neq 0$, но при дополнительном ограничении $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) \parallel \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2} \perp \boldsymbol{e}$ соответствуют условиям П.В. Харламова [9] существования решения с двумя инвариантными соотношениями задачи о движении гиростата с $\lambda = \text{const}$. В упомянутой задаче это решение как частный случай содержит решение Бобылева – Стеклова. В решении A)ii) данной работы при $J_1 = 2J_3$ параметры также удовлетворяют условиям Бобылева – Стеклова, а функция $\lambda(\tau)$ вырождается в постоянную. Соответствующие пунктам A)ii) и C) решения задачи о движении *неавтономного* гиростата содержат разное число произвольных постоянных.

2. Линейные по компонентам вектора $\boldsymbol{K}$ соотношения. Если система (1) допускает линейные по $\boldsymbol{\omega}$ инвариантные соотношения (3), то из разложения (4) следует, что

$$\boldsymbol{K} = \omega \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) + \lambda \boldsymbol{\alpha} + c\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1}. \tag{18}$$

Значит, должно выполняться хотя бы одно линейное по $\boldsymbol{K}$ соотношение:

$$(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{\sigma}) = c(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\sigma}) \quad \text{при} \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) \times \boldsymbol{\alpha} \neq 0; \tag{19}$$

$$(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{r_i}) = c(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{r_i}) \quad \text{при} \quad \boldsymbol{r_i} \perp \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) \parallel \boldsymbol{\alpha}, \quad i = 1, 2. \tag{20}$$

Рассмотрим случаи, когда проекция вектора $\boldsymbol{K}$ на некую фиксированную в подвижном базисе плоскость постоянна.

2.1. Три линейных по $\boldsymbol{K}$ соотношения. Покажем, что момент количества движения гиростата не может оставаться неизменным, если $\dot{\omega} c \neq 0$. Аналогичное утверждение было принято в [2] без доказательства как вспомогательное, поэтому доказательство проведем, не опираясь на список решений A)-C) с $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{e}) = \text{const}$.

Предложение 1. Если во время движения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом выполняются условия (3) и $\dot{\boldsymbol{K}} = 0$, то это движение может быть только вращением вокруг перманентной оси.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K_0}$ – постоянный вектор, тогда динамическое уравнение сводится к

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K_0} = \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}. \tag{21}$$

Возможность $\boldsymbol{K_0} = 0$ приводит к $\boldsymbol{\nu} \parallel \boldsymbol{e}$, откуда с учетом геометрического интеграла получаем $\dot{\boldsymbol{\nu}} = 0$, $\boldsymbol{\nu} \parallel \boldsymbol{\omega}$, то есть ось вращения перманентна. Пусть далее $\boldsymbol{K_0} \neq 0$, тогда интеграл (2) дает линейное по $\boldsymbol{\nu}$ соотношение $(\boldsymbol{K_0}, \boldsymbol{\nu}) = g$. Спроектируем (21) на $\boldsymbol{\omega}$, получим второе линейное по $\boldsymbol{\nu}$ соотношение $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\nu}) = \text{const}$. Если $\boldsymbol{K_0} \nparallel \boldsymbol{e}$, то интеграл $|\boldsymbol{\nu}|^2 = 1$ снова приводит к $\dot{\boldsymbol{\nu}} = 0$, $\boldsymbol{\nu} \parallel \boldsymbol{\omega}$. Рассмотрим оставшийся вариант $\boldsymbol{K_0} \parallel \boldsymbol{e}$. Умножим (21) скалярно на $\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}$:

$$(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\omega})g - (\boldsymbol{K_0}, \boldsymbol{e})(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\omega}) = |\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}|^2 = 1 - (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\nu})^2. \tag{22}$$

Принимая во внимание формулы (6), запишем $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\omega}) = c(\int\omega(\tau)\,d\tau - \omega\tau)$. Продифференцируем (22) по τ:

$$[(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})g + c(\boldsymbol{K_0},\boldsymbol{e})\tau]\,\omega'_\tau = 0,$$

откуда $\omega'_\tau = 0$, либо $(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})^2 g^2 + c^2 = 0$; то есть $\omega = \mathrm{const}$ либо $c = 0$, и ось вращения сохраняет неизменное направление. Доказательство завершено. □

Таким образом, при условии постоянства вектора $\boldsymbol{K}$ движения гиростата с угловой скоростью (4), где $\dot\omega \neq 0$, $c \neq 0$, невозможны. Далее считаем, что $\dot{\boldsymbol{K}} \neq 0$. Рассмотрим случаи, когда выполняются ровно два линейных по $\boldsymbol{K}$ соотношения.

2.2. Два линейных по $\boldsymbol{K}$ соотношения при $\boldsymbol{\alpha} \nparallel \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})$. Проверим, возможно ли в случае $\boldsymbol{\alpha} \nparallel \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})$ дополнительное к (19) линейное соотношение $(\boldsymbol{K},\boldsymbol{\varkappa}) = \mathrm{const}$. Без ограничения общности положим $\boldsymbol{\varkappa} \perp \boldsymbol{\sigma}$; будем также считать, что $(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\alpha}) \neq 0$ и $(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})) \neq 0$, иначе из $(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2}),\boldsymbol{\varkappa})\omega + (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varkappa})\lambda = \mathrm{const}$ следовало бы $\dot\omega = 0$ либо $\dot\lambda = 0$. Покажем, что рассматриваемый случай не приводит к новым решениям.

Предложение 2. Если во время движения гиростата с переменным $\boldsymbol{\lambda} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$ выполняются соотношения (3), (19) и $(\dot{\boldsymbol{K}},\boldsymbol{\varkappa}) = 0$, где $\boldsymbol{\varkappa}$ удовлетворяет перечисленным выше требованиям, то $(\boldsymbol{\varkappa}\times\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{e}) = 0$ и $(\boldsymbol{K},\boldsymbol{e}) = const$.

Доказательство. При выполнении соотношений (3) из $(\boldsymbol{K},\boldsymbol{\varkappa}) = \mathrm{const}$ можно выразить λ через ω, тогда (18) примет вид

$$\boldsymbol{K} = \frac{\omega}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varkappa})}(\boldsymbol{\varkappa}\times\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{K_0}, \quad \boldsymbol{K_0} = \mathrm{const}. \tag{23}$$

Спроектируем динамическое уравнение системы (1) на векторы $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varkappa}$ и $(\boldsymbol{\varkappa}\times\boldsymbol{\sigma})$. С учетом (23) получим

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\sigma}) = -\boldsymbol{\sigma}^2\omega\,(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\varkappa})(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varkappa})^{-1} - (\boldsymbol{K_0}\times\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\sigma}),\\
&(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\varkappa}) = \boldsymbol{\varkappa}^2\omega\,(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varkappa})^{-1} - (\boldsymbol{K_0}\times\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\varkappa}),\\
&(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\varkappa}\times\boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{\varkappa}\times\boldsymbol{\sigma})^2\dot\omega\,(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varkappa})^{-1} - (\boldsymbol{K_0}\times\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\varkappa}\times\boldsymbol{\sigma}).
\end{aligned} \tag{24}$$

Для исключения $\dot\omega$ из последнего уравнения воспользуемся соотношением

$$(\boldsymbol{\varkappa}\times\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{e})\,\dot\omega = \omega(\boldsymbol{\varkappa}\times\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}) + (\boldsymbol{K_0}\times\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varkappa}), \tag{25}$$

полученным проектированием динамического уравнения на вектор $\boldsymbol{e}$. Итак, пусть $(\boldsymbol{\varkappa}\times\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{e}) \neq 0$, тогда подстановка $\dot\omega$ из (25) в (24) даст зависимость $(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\varkappa}\times\boldsymbol{\sigma})$ от ω. Поскольку $\lambda = \lambda(\omega)$, система (1) допускает аналог интеграла энергии

$$(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\nu}) + h = \int\frac{(\boldsymbol{\varkappa}\times\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega})}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varkappa})}\,d\omega = \frac{(\boldsymbol{\varkappa}\times\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})}{2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varkappa})}\,\omega^2 + \frac{c(\boldsymbol{\varkappa}\times\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\beta_1})\,\omega}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varkappa})}. \tag{26}$$

Подставим в тождество $\dfrac{(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\sigma})^2}{\boldsymbol{\sigma}^2} + \dfrac{(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\varkappa})^2}{\boldsymbol{\varkappa}^2} + \dfrac{(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\varkappa}\times\boldsymbol{\sigma})^2}{\boldsymbol{\varkappa}^2\boldsymbol{\sigma}^2} + (\boldsymbol{e},\boldsymbol{\nu})^2 = 1$ найденные зависимости скалярных произведений от ω. Слева получим многочлен четвертой степени, старший коэффициент которого исчезает, только если векторы $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varkappa}$, $\boldsymbol{\varkappa}\times\boldsymbol{\sigma}$ и $(\boldsymbol{\varkappa}\times\boldsymbol{\sigma})\times\boldsymbol{e}$ одновременно ортогональны вектору $\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2}$. Но из $\boldsymbol{\sigma}\perp(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})$, $\boldsymbol{\varkappa}\perp(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})$ и $\boldsymbol{\sigma}\nparallel\boldsymbol{\varkappa}$ следует $(\boldsymbol{\varkappa}\times\boldsymbol{\sigma})\parallel(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})$, что вступает в противоречие с $(\boldsymbol{\varkappa}\times\boldsymbol{\sigma})\perp(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})$. Значит, предположение $(\boldsymbol{\varkappa}\times\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{e})\neq 0$ было не верно. Из компланарности $\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{e}$ и соотношений $(\dot{\boldsymbol{K}},\boldsymbol{\varkappa})=(\dot{\boldsymbol{K}},\boldsymbol{\sigma})=0$ заключаем, что $(\dot{\boldsymbol{K}},\boldsymbol{e})=0$. □

Таким образом, случай сводится к исследованному ранее.

2.3. Два линейных по $\boldsymbol{K}$ соотношения при $\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})$. Изучим случай $\boldsymbol{\lambda}=\lambda(t)\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})$, когда $\boldsymbol{K}$ удовлетворяет линейным соотношениям (20) и

$$\boldsymbol{K}=p\,\boldsymbol{\alpha}+c\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1},\quad \text{где } p=(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2}),\boldsymbol{\alpha})\omega+\lambda. \tag{27}$$

Пусть $(\boldsymbol{K},\boldsymbol{e})\neq\text{const}$ и, соответственно, $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e})\neq 0$. Сформулируем необходимое условие существования решений.

Предложение 3. Если уравнения движения гиростата с $\boldsymbol{\lambda}(t)\parallel\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})$ допускают решения с соотношениями (3), то многочлен 14-го порядка $R(p)$ с коэффициентами, зависящими от параметров гиростата и начальных условий [1], должен тождественно обращаться в ноль.

Доказательство. Умножим динамическое уравнение системы (1) скалярно на $\boldsymbol{\epsilon_1}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta_2}$ и $\boldsymbol{\epsilon_2}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\epsilon_1}$, получим зависимости $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\epsilon_1}\times\boldsymbol{e})$ и $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\epsilon_2}\times\boldsymbol{e})$ от ω, p:

$$(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\epsilon_1}\times\boldsymbol{e})=((\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta_2})p+c(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2}))\,(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\alpha})=:F_1(\omega,p) \tag{28}$$

$$(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\epsilon_2}\times\boldsymbol{e})=c(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta_2})(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\alpha})-(p+c(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\alpha}))\,(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\epsilon_1})=:F_2(\omega,p). \tag{29}$$

Очевидно, что $\boldsymbol{\epsilon}_1\neq 0$, иначе $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})\parallel\boldsymbol{\beta_2}\perp(\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})$. Компланарность векторов $\boldsymbol{\epsilon_1}\times\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{\epsilon_2}\times\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{\epsilon_1}\times\boldsymbol{e})$ позволяет записать не содержащее $\dot{p}$ выражение и для $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{\epsilon_1}\times\boldsymbol{e}))$:

$$(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{\epsilon_1}\times\boldsymbol{e}))=\frac{(\boldsymbol{\epsilon_1},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\epsilon_2},\boldsymbol{e})F_1(\omega,p)+(\boldsymbol{\epsilon_1}\times\boldsymbol{e})^2F_2(\omega,p)}{|\boldsymbol{\epsilon_1}|^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e})}:=F_2^*(\omega,p). \tag{30}$$

При $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e})\neq 0$ всегда $\boldsymbol{\epsilon_1}\times\boldsymbol{e}\neq 0$, и векторы $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{\epsilon_1}\times\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{\epsilon_1}\times\boldsymbol{e})$ образуют ортогональный базис. Разложим по нему $\boldsymbol{\beta_1}$, $\boldsymbol{\beta_2}$, $\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2}$. С учетом (6), (7) запишем

$$\dot{\tau}=(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta_2})(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{e})+\frac{(\boldsymbol{\epsilon_1}\times\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta_2})F_1+(\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{\epsilon_1}\times\boldsymbol{e}),\boldsymbol{\beta_2})F_2^*}{|\boldsymbol{\epsilon_1}\times\boldsymbol{e}|^2}, \tag{31}$$

$$\tau=-\frac{1}{c}\left[(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{e})+\frac{(\boldsymbol{\epsilon_1}\times\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})F_1+(\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{\epsilon_1}\times\boldsymbol{e}),\boldsymbol{\beta_1}\times\boldsymbol{\beta_2})F_2^*}{|\boldsymbol{\epsilon_1}\times\boldsymbol{e}|^2}\right], \tag{32}$$

$$\int\omega(\tau)\,d\tau=(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta_1})(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{e})+\frac{(\boldsymbol{\epsilon_1}\times\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta_1})F_1+(\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{\epsilon_1}\times\boldsymbol{e}),\boldsymbol{\beta_1})F_2^*}{|\boldsymbol{\epsilon_1}\times\boldsymbol{e}|^2}. \tag{33}$$

Отметим, что $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{e})$ выражается через $F_1(\omega,p)$, $F_2^*(\omega,p)$ из интеграла $|\boldsymbol{\nu}|^2=1$:

$$(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{e})=\pm\sqrt{1-|\boldsymbol{\epsilon_1}\times\boldsymbol{e}|^{-2}[F_1^2+F_2^{*2}]}. \tag{34}$$

[1] Разрешающий многочлен $R(p)$ будет выписан ниже, в процессе доказательства.

Обозначим правые части (31)-(33) соответственно через φ_1, φ_2, φ_3: $\varphi_i = \varphi_i(\omega, p)$, $i = \overline{1,3}$. Согласно Предложению 1, $p \neq \text{const}$, поэтому будем считать, что $\omega = \omega(p)$. Функции $\varphi_2(\omega, p)$, $\varphi_3(\omega, p)$ по определению удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial p} - \omega\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial p} + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial\omega} - \omega\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial\omega}\right)\frac{d\omega}{dp} = 0. \tag{35}$$

При $\boldsymbol{\epsilon_1} \neq 0$ векторы $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\epsilon_1}, \boldsymbol{\epsilon_2}$ не компланарны, дополним систему (28), (29) проекцией (1) на $\boldsymbol{\omega}$: $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha})\dot{p} = (\dot{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{e})$, откуда

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{e})}{\partial p} + \frac{\partial(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{e})}{\partial\omega}\frac{d\omega}{dp}. \tag{36}$$

Исключая $\dfrac{d\omega}{dp}$ из (35) и (36), получим соотношение

$$\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial\omega} - \omega\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial\omega}\right)\left[(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}) - \frac{\partial(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{e})}{\partial p}\right] + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial p} - \omega\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial p}\right)\frac{\partial(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{e})}{\partial\omega} = 0. \tag{37}$$

Учитывая в (37) известные зависимости от ω, p и избавляясь от радикала, заключаем, что необходимым условием существования решений с соотношениями (3) будет равенство нулю многочлена $M(\omega, p)$, степень которого по каждой из переменных равна четырем. Зададимся целью получить более простые алгебраические соотношения между ω и p. Поскольку $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{e}) \neq \text{const}$, выразим $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{e})$ из интеграла кинетического момента (2), записанного в проекциях на $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{\epsilon_1} \times \boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e} \times (\boldsymbol{\epsilon_1} \times \boldsymbol{e})$:

$$(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{e}) = \frac{\tilde{g} - (\boldsymbol{K}, \boldsymbol{\epsilon_1} \times \boldsymbol{e})F_1 - (\boldsymbol{K}, \boldsymbol{e} \times (\boldsymbol{\epsilon_1} \times \boldsymbol{e}))F_2^*}{|\boldsymbol{\epsilon_1} \times \boldsymbol{e}|^2(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{e})}, \tag{38}$$

где $\tilde{g} = g\,|\boldsymbol{\epsilon_1} \times \boldsymbol{e}|^2$, $\boldsymbol{K}$ удовлетворяет разложению (27), F_1, F_2^* определены в (28),(30). Подставим в (38) $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{e})$ из (34) и возведем в квадрат, получим

$$|\boldsymbol{\epsilon_1} \times \boldsymbol{e}|^2\Big[|\boldsymbol{\epsilon_1} \times \boldsymbol{e}|^2 - F_1^2 - F_2^{*2}\Big](\boldsymbol{K}, \boldsymbol{e})^2 - [(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{\epsilon_1} \times \boldsymbol{e})F_1 + (\boldsymbol{K}, \boldsymbol{e} \times (\boldsymbol{\epsilon_1} \times \boldsymbol{e}))F_2^* - \tilde{g}]^2 = 0. \tag{39}$$

По ω (39) есть многочлен второй степени, а по p – четвертой; обозначим его $N(\omega, p)$. Отметим, что соотношения (34), (37), (39) могут быть функционально зависимыми, поэтому удовлетворяющую им $\omega(p)$ нужно подставить в (35).

Алгебраическое соотношение еще меньшей степени можно получить из (37) и (38): правая часть (38) – известная функция от ω и p, вычислив $\dfrac{\partial(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{e})}{\partial\omega}, \dfrac{\partial(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{e})}{\partial p}$ и учтя их в (37), получим равенство $S(\omega, p) = 0$, где $S(\omega, p)$ – полином второго порядка по ω и третьего по p.

Необходимым условием существования решений будет тождественное равенство нулю результанта N и S как полиномов относительно ω: $R(p) \equiv 0$. Пусть

$$N(\omega, p) = A\omega^2 + B\omega + C, \quad S(\omega, p) = E\omega^2 + F\omega + G,$$

где $A = A_0p^4 + A_1p^3 + A_2p^2 + A_3p + A_4$, $E = E_0p^3 + E_1p^2 + E_2p + E_3$;

для многочленов 4-й степени $B(p)$, $C(p)$ и многочленов 3-й степени $F(p)$, $G(p)$ коэффициенты определяются аналогично. Тогда результант

$$R(p) = (AG - EC)^2 + (AF - EB)(CF - BG), \tag{40}$$

где правая часть – многочлен 14-й степени по p. Доказательство завершено. □

Вычисления показали, что $A_0^2 + A_2^2 > 0$, то есть $A \neq 0$. Тождество $A^2R(p) \equiv 0$ может быть представлено в виде

$$(2A(AG - EC) - B(AF - EB))^2 + (AF - EB)^2(4CA - B^2) \equiv 0. \tag{41}$$

Подсчитаем в (41) старший коэффициент по $p:$ он сохранит форму записи (41), но все величины нужно заменить соответствующими с нулевым индексом. Выпишем

$$A_0 = -[(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1})^2 + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_2})^2]k, \quad B_0 = 2c\,(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1})(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})k,$$
$$C_0 = -c^2[(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})^2 + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_2})^2]k, \text{ где } k = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e})^2|\boldsymbol{\epsilon_1} \times \boldsymbol{e}|^4|\boldsymbol{\epsilon_1}|^8 > 0.$$

Отсюда $(4C_0A_0 - B_0^2) = 4c^2k^2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_2})^2 \geqslant 0,$ то есть (41) разлагается на сумму квадратов. Имеем такие возможности:

$$A_0\,(2A_0G_0 + 2E_0C_0 - B_0F_0) = 0, \ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_2}) = 0, \tag{42}$$
$$A_0F_0 - E_0B_0 = 0, \ A_0G_0 - E_0C_0 = 0, \ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta_2}) \neq 0, \tag{43}$$

поэтому варианты $\boldsymbol{\alpha} \parallel (\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})$, $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta_2}, \boldsymbol{\alpha} \not\perp \boldsymbol{\beta_1}$ и $\boldsymbol{\alpha} \not\perp \boldsymbol{\beta_2}$ требуют отдельного изучения в предположении $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e}) \neq 0$.

Варианты $\boldsymbol{\beta_2} \perp \boldsymbol{\alpha} \not\perp \boldsymbol{\beta_1}$, $\boldsymbol{\alpha} \not\perp \boldsymbol{\beta_2}$ оставим для дальнейших исследований, здесь же рассмотрим простейший случай $\boldsymbol{\alpha} \parallel (\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})$. Результант $R(p)$, заданный формулой (40), будет уже многочленом 10-й степени со старшим коэффициентом

$$(\boldsymbol{J\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2})^2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e})^8\left[(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e})^2 + (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_2})^2\right]^8\left[(\boldsymbol{J\beta_1}, \boldsymbol{\beta_1})^2 + (\boldsymbol{J\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2})^2\right]c^8.$$

При сделанных допущениях это выражение обратится в ноль только при $\boldsymbol{J\beta_1} \perp \boldsymbol{\beta_2}$, но тогда коэффициент $R(p)$ при p^8 строго отрицателен:

$$-(\boldsymbol{J\beta_1}, \boldsymbol{\beta_1})^4\,c^6\,(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e})^{10}\left[(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e})^2 + (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta_2})^2\right]^8 < 0.$$

Значит, решений при $\boldsymbol{\alpha} \parallel (\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) \parallel \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) \not\perp \boldsymbol{e}$ не существует. Таким образом, условие $R \equiv 0$ позволяет проверять существование решений с соотношениями (3).

3. Об одном решении уравнений движения тяжелого гиростата. В работе [11] исследованы условия существования двух линейных инвариантных соотношений уравнений Кирхгофа – Пуассона в предположении, что гиростатический момент имеет фиксированное направление: $\boldsymbol{\lambda}(t) \parallel \boldsymbol{\alpha}$. В п. 2 рассмотрен случай, когда гиростат движется в поле одной только силы тяжести.

Приведем обозначения: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{J\omega}$ – момент количества движения корпуса гиростата, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{J}^{-1}$– гирационный тензор, $\boldsymbol{s} = |\boldsymbol{s}|\boldsymbol{e}$ – радиус-вектор центра масс. Инвариантные соотношения записаны в виде $x_1 = b$, $x_2 = c$. Предполагается, что $x_3 \neq \text{const};$ координатные оси выбраны так, что $\alpha_2 = 0$.

В п. 2.1 работы [11] получено решение, существующее при условиях

$$c = 0,\ \alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 1,\ s_2 = s_3 = 0,\ a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0. \tag{44}$$

В п. 2.2 указано еще одно решение: ограничения на параметры авторы задают в виде

$$\begin{gathered}\alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 1,\ s_3 = 0,\ a_{13} = a_{23} = 0,\\ \frac{b}{c} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{a_{11} - a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}}.\end{gathered} \tag{45}$$

Очевидно, что в обоих случаях верно $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{s}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{s})\lambda = s_1 b + s_2 c = \mathrm{const}$. Если равенства (45) записать, избавившись от знаменателей, получим набор условий, объединяющий в себе (44) и (45). Покажем, что он соответствует частному случаю условий A) – условиям A)*ii*), указанным ранее в работах [2, 12, 13].

Отметим, что в (44) тензор $\boldsymbol{a}$ диагонален, а значит, координатные оси являются главными. Запишем (44) в векторных обозначениях: исходя из (3), положим $\boldsymbol{\beta_1} = (1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{\beta_2} = (0, 1, 0)^T$. Несложно убедиться, что равенства (44) представляют собой условия A)*ii*):

$$\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{s} \parallel \boldsymbol{\beta_1} \perp \boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta_2} \parallel \boldsymbol{\beta_2} \perp \boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}) \parallel (\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2}). \tag{46}$$

Это решение приведено в [2] на с. 46; ранее оно также было представлено в [12, 13]. В [11] величина λ задана дробно-рациональной функцией от ν_1, ν_3. Но из формул (2.2), (2.4) работы [11] следует равенство $\lambda = [(2a_1 - a_3)s_1\nu_3 + c_*(a_1 - a_3)](a_1 a_3 b)^{-1}$. Если дополнительно $2a_1 = a_3$, $c_* = 0$, получаем решение Бобылева – Стеклова.

При условиях (45) вычислим $|\boldsymbol{as} \times \boldsymbol{s}|$: введем $u = s_1/s_2$, тогда

$$|\boldsymbol{as} \times \boldsymbol{s}| = s_2^2\, |a_{12}\, u^2 + (a_{22} - a_{11})u - a_{12}| = 0.$$

То есть $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{\alpha}$ и в этом случае направлены вдоль главных осей. Согласно определению векторов $\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}$, условиями (45) они заданы так: $\boldsymbol{\beta_1} = \boldsymbol{s}/|\boldsymbol{s}|$, $\boldsymbol{\beta_2} = (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{s})/|\boldsymbol{s}|$, что вместе с $\boldsymbol{J\alpha} \parallel \boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{s} \parallel \boldsymbol{Js}$ снова приводит к условиям (46).

Выводы. Исследованы такие классы вращений неавтономного гиростата, что уравнения движения допускают два линейных по $\boldsymbol{\omega}$ и два или три линейных по $\boldsymbol{K}$ инвариантных соотношения. При $\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})$ задача о существовании решений с соотношениями (3) сведена к определению коэффициентов многочлена $R(p)$ и проверке совместности условий на параметры, полученных из тождества $R(p) \equiv 0$. Предложенный метод будет использован в дальнейших исследованиях.

При $\boldsymbol{\alpha} \nparallel \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})$ в первую очередь будут рассмотрены условия $\boldsymbol{\sigma} \perp (\boldsymbol{\beta_1} \times \boldsymbol{\beta_2})$, $\boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{\beta_2}$, выполненные для наборов параметров B)–C).

1. *Харламов П.В.* Гиростаты // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. – 1988. – **9**. – С. 38–41.
2. *Волкова О.С.* О движениях гиростата, характеризующихся линейными по компонентам угловой скорости инвариантными соотношениями // Механика твердого тела. – 2011. – **41**. – С. 39–50.
3. *Дружинин Э.И.* О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // Прикл. математика и механика. – 1999. – **63**, Вып. 5. – С. 825–826.

4. *Ковалева Л.М., Позднякович А.Е.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 100-105.
5. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Там же. – 2009. – Вып. 39. – С. 42–49.
6. *Волкова О.С.* Некоторые классы движений тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом: автореф. дисс. ... канд. физ. - мат. наук: 01.02.01; ИПММ НАНУ. – Донецк, 2010. – 19 с.
7. *Стеклов В.А.* Один случай движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Тр. Отд. физ. наук О–ва любителей естествознания. – 1896. – **8**, вып. 2. – С. 19–21.
8. *Бобылев Д.К.* Об одном частном решении дифференциальных уравнений вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Там же. – С. 21–25.
9. *Харламов П.В.* Одно решение задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, вып. 1. – С. 158–159.
10. *Мазнев А.В.* О двух линейных инвариантных соотношениях уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2011. – **41**. – С. 51–60.
11. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* О двух линейных инвариантных соотношениях уравнений движения гиростата в случае переменного гиростатического момента // Динамические системы. – 2012. – Т. 2 (30), № 1–2. – С. 23–32.
12. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Решения с линейными инвариантными соотношениями уравнений движения тяжелого гиростата // Сб. тезисов междунар. конференции ICSCD'11. – Донецк: ИПММ НАНУ, 2011. – С. 27-29.
13. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Точные решения уравнений движения гиростата вокруг неподвижной точки // Современные проблемы математики, механики и информатики. / Под ред. Н.Н. Кизиловой, Г.Н. Жолткевича. – Харьков: Изд-во "Апостроф", 2011. – С. 74-84.

O. S. Volkova

Two linear invariant relations in the problem of a nonautonomous gyrostat motion.

The special kinds of rotation about a fixed point are studied for a heavy nonautonomous gyrostat in the case of fixed gyrostatic momentum direction. If the motion equations admit two linear in angular velocity invariant relations it is shown that there exists at least one invariant relation which is linear in total angular momentum components. The cases of two or three such relations are investigated.

Keywords: *gyrostat with fixed point, variable gyrostatic momentum, invariant relation.*

О. С. Волкова

Два лінійних інваріантних співвідношення рівнянь руху неавтономного гіростата.

Досліджено спеціальні класи обертань навколо нерухомої точки важкого гіростата з фіксованим напрямком гіростатичного момента. Показано, що якщо рівняння руху гіростата допускають два лінійних за компонентами кутової швидкості інваріантних співвідношення, то повинно виконуватися ще хоча б одне лінійне за моментом кількості руху співвідношення. Вивчено випадки, коли система допускає два або три таких співвідношення.

Ключові слова: *гіростат, змінний гіростатичний момент, інваріантне співвідношення.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`volkova@iamm.ac.donetsk.ua`

Получено 30.11.12