УДК 531.36; 519.21

©2012. **И. Г. Васильева, А. Л. Зуев**

ЧАСТИЧНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Для систем стохастических дифференциальных уравнений Ито доказывается теорема об асимптотической устойчивости по вероятности относительно части переменных с использованием функции Ляпунова со знакопостоянной производной. Рассмотрены задачи одноосной стабилизации спутника с помощью реактивных двигателей ориентации и одноосной стабилизации спутника с помощью двух маховиков.

Ключевые слова: *стохастические дифференциальные уравнения Ито, устойчивость по вероятности,устойчивость относительно части переменных.*

1. Введение. Задача устойчивости движения по отношению к части переменных была поставлена А.М. Ляпуновым [1] и детально исследована в монографиях В.В. Румянцева и А.С. Озиранера [2], В.В. Воротникова [3] и других ученых. Такая задача естественным образом возникает в прикладных задачах, если для нормального функционирования системы необходимо обеспечить ее устойчивость лишь относительно некоторых фазовых переменных.

Эта задача также представляет интерес для класса систем, которые неустойчивы по Ляпунову, и в то же время асимптотически устойчивы относительно части переменных.

При изучении реальных динамических систем параметры системы и воздействия на нее часто являются недетерминированными величинами, и приходится привлекать вероятностные законы для их моделирования. Из потребностей задач стабилизации движений, подверженных случайным воздействиям, возникла теория устойчивости стохастических дифференциальных уравнений в работах И.Я. Каца и Н.Н. Красовского [4], Г. Кушнера [5], Р.З. Хасьминского [6] и др.

В данной работе исследована задача устойчивости стохастических систем по отношению к части переменных с использованием функции Ляпунова со знакопостоянной производной.

2. Постановка задачи. Предположим, что возмущенное движение системы представляет собой марковский процесс, описываемый системой стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$dx(t) = f(x)dt + \sigma(x)dW(t), \quad f(0) = 0, \quad \sigma(0) = 0. \tag{1}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ – вещественный n-мерный вектор состояния системы, вещественные n-мерная функция $f(x)$ и матрица σ размера $n \times k$ удовлетворяют условиям Липшица на всяком ограниченном подмножестве в $\mathbb{R}^n$, $W(t)$ – k-мерный винеровский процесс, компоненты $w_j(t)$ $(j = 1, 2, ..., k)$ которого являются независимыми одномерными винеровскими процессами, причем $Mw_j(t) = 0$, $Mw_j^2(t) = 2t$.

При этих условиях существует единственный строго марковский процесс $x^{\xi,s}(t)$ с непрерывными почти наверное траекториями и фелеровской переходной функцией [7], который является решением уравнения (1) при начальном условии $x^{\xi,s}(s) = \xi$ и с которым связан оператор

$$L = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, [a_{i,j}] = \sigma\sigma^T. \tag{2}$$

Для определенности будем изучать устойчивость решения $x(t) \equiv 0$ системы (1) при $t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ по отношению к переменным $x_1, x_2, ..., x_m$, $0 < m \leq n$. Обозначим эти переменные через $y_i = x_i$ $(i = 1, 2, ..., m)$, а остальные – через $z_j = x_{m+j}$ $(j = 1, ..., n - m)$.

Будем пользоваться следующими определениями [8]:

Определение 1. Тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ системы (1) y-устойчиво по вероятности, если для всех $s \in \mathbb{R}^+, \varepsilon > 0, \gamma > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при каждом $\|\xi\| < \delta$ выполнено неравенство

$$P_{\xi,s}\{\sup_{t\geq s}\|y^{\xi,s}(t)\| > \varepsilon\} < \gamma. \tag{3}$$

Здесь $P_{\xi,s}$ – вероятностная мера, порожденная процессом $x^{\xi,s}$,

$$\|y\| = \left(\sum_{i=1}^{m} y_i^2\right)^{1/2} = (y, y)^{1/2}.$$

Определение 2. Тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ системы (1) асимптотически y-устойчиво по вероятности, если оно y-устойчиво по вероятности и, кроме того,

$$\lim_{\xi\to 0} P_{\xi,s}\{\lim_{t\to\infty}\|y^{\xi,s}(t)\| = 0\} = 1. \tag{4}$$

Будем рассматривать непрерывные функции $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, $V(0) = 0$, которые дважды непрерывно дифференцируемы всюду, за исключением, быть может, точки $x = 0$.

Также введем в рассмотрение класс K Хана, состоящий из всех непрерывных строго возрастающих функций $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\alpha(0) = 0$.

Следующая теорема распространяет результат К. Ризито [9] на класс систем со случайными воздействиями.

Теорема 1. *Предположим, что*

1) *существует функция $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ такая, что $V(0) = 0$, $LV(x) \leq 0$, $\alpha_1(\|y\|) \leq V(x)$ для некоторой функции $\alpha_1 \in K$;*

2) *решения системы (1), начинающиеся в некоторой окрестности точки $x = 0$, ограничены почти наверное;*

3) множество $M = \{x : y = 0\}$ инвариантно;

4) множество $M_v \backslash M$ не содержит целых полутраекторий системы (1), где $M_v = \{x : LV(x) = 0\}$.

Тогда решение $x(t) \equiv 0$ асимптотически y-устойчиво по вероятности.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $\|\xi\| < \varepsilon$, и пусть

$$\tau_\varepsilon = \inf t : \|y^{\xi,s}(t)\| > \varepsilon, \quad \tau_\varepsilon(t) = \min(\tau_\varepsilon, t).$$

Тогда, используя один частный случай формулы Дынкина [5], получим

$$M_{\xi,s}V(x^{\xi,s}(\tau_\varepsilon(t))) = V(\xi) + M_{\xi,s}\int_s^{\tau_\varepsilon(t)} LV(x^{\xi,s}(u))du,$$

где $M_{\xi,s}$ – математическое ожидание по вероятностной мере $P_{\xi,s}$. В силу того, что $LV \le 0$, отсюда вытекает неравенство

$$M_{\xi,s}V(x^{\xi,s}(\tau_\varepsilon(t))) \le V(\xi), \quad t \ge s,$$

которое можно переписать в виде

$$\int_{\tau_\varepsilon < t} \alpha_1(\|y^{\xi,s}(\tau_\varepsilon)\|)P_{\xi,s}(d\omega) + \int_{\tau_\varepsilon \ge t} \alpha_1(\|y^{\xi,s}(t)\|)P_{\xi,s}(d\omega) \le V(\xi).$$

Откуда следует $\alpha_1(\varepsilon)P_{\xi,s}\{\tau_\varepsilon < t\} \le V(\xi)$. Из последнего равенства в силу непрерывности функции $V(x)$ и равенства $V(0) = 0$ получаем соотношение

$$\lim_{\xi \to 0} P_{\xi,s}\{\tau_\varepsilon < t\} = 0,$$

которое, очевидно, влечет за собой выполнение (3).

Таким образом, нам осталось доказать, что

$$\lim_{\xi \to 0} P_{\xi,s}\{\lim_{t \to \infty} \|y^{\xi,s}(t)\| = 0\} = 1.$$

Из множества выборочных траекторий процесса $x^{\xi,s}(t)$ выделим подмножество B выборочных траекторий таких, что для каждой компоненты $y_i^{\xi,s}(t)$ $(i = 1, ..., m)$ процесса $x^{\xi,s}(t)$ выполняется равенство $\tau_\varepsilon(t) = t, t \in \mathbb{R}^+$. Тогда из доказанного выше следует соотношение

$$\lim_{x \to 0} P_{\xi,s}\{B\} = 1. \tag{5}$$

По условию 2) теоремы существует такое $\delta > 0$, что все решения $x^{\xi,s}(t)$ системы (1) с $\|\xi\| < \delta$ ограничены при $t \ge s$. Пусть $\|\xi\| < \delta$, покажем, что

$$\lim_{t \to \infty} \|y^{\xi,s}(t)\| = 0.$$

В силу ограниченности $x^{\xi,s}(t)$ существует последовательность $t_k \to \infty$:

$$x^{\xi,s}(t_k) \to x^* = (y^*, z^*) \in \Gamma^+,$$

где $\Gamma^+ \neq \emptyset$ – множество ω-предельных точек решения $x^{\xi,s}(t)$. Так как условия, необходимые для использования стохастической версии принципа инвариантности Ла-Салля [8] выполнены, то $\Gamma^+ \subset M_v$.

Нам необходимо показать, что $y^* = 0$. В силу инвариантности множества Γ^+ получим, что $x^{x^*,s}(t) \in \Gamma^+$ при всех $t \geq s$. Предположим, что $y^* \neq 0$. Поскольку множество M инвариантно и $x^* \in \Gamma^+ \subset M_v$, то $x^{x^*,s}(t) \in M_v \backslash M$, $t \geq s$. Получено противоречие с условием 4) теоремы. Таким образом, $y^* = 0$, значит

$$\lim_{t\to\infty} \|y^{\xi,s}(t)\| = 0. \tag{6}$$

Из равенства (6) с учетом (5) вытекает утверждение теоремы. □

3. Одноосная стабилизация спутника с помощью реактивных двигателей ориентации. Рассмотрим задачу о движении тела вокруг центра масс под действием реактивных управляющих моментов без учета изменения массы. Уравнения движения могут быть записаны в форме Эйлера-Пуассона со случайными добавками при управлении

$$\begin{cases} d\omega_1 = (\frac{A_2-A_3}{A_1}\omega_2\omega_3 + u_1)dt + \omega_1\sigma dW(t), \\ d\omega_2 = (\frac{A_3-A_1}{A_2}\omega_1\omega_3 + u_2)dt + \omega_2\sigma dW(t), \\ d\omega_3 = (\frac{A_1-A_2}{A_3}\omega_1\omega_2)dt, \\ d\nu_1 = (\omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3)dt, \\ d\nu_2 = (\omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1)dt, \\ d\nu_3 = (\omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2)dt, \end{cases} \tag{7}$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – проекции вектора угловой скорости ω на соответствующие главные оси инерции тела; ν_1, ν_2, ν_3 – проекции неподвижного орта ν на соответствующие главные оси инерции; A_1, A_2, A_3 – главные центральные моменты инерции тела; u_1, u_2 – управляющие моменты. При дальнейшем анализе буде считать все величины безразмерными.

Система (7) при $u_1 = u_2 = 0$ допускает следующее частное решение:

$$\begin{gathered} \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \\ \nu_1 = \nu_2 = 0, \quad \nu_3 = 1. \end{gathered} \tag{8}$$

Решение (8) соответствует положению равновесия, при котором третья главная ось инерции тела направлена по вектору ν. Применим сформулированную выше теорему для стабилизации решения (8) системы (7) по переменным $\omega_1, \omega_2, \nu_1, \nu_2$.

Такой выбор переменных соответствует задаче об одноосной стабилизации твердого тела, т.е. проекции ν_1, ν_2 и их производные $\dot{\nu}_1, \dot{\nu}_2$ должны быть „малыми“ и стремящимися к нулю при $t \to \infty$, при этом остальные компоненты решения предполагаются ограниченными [10].

Функцию $V(x)$ зададим формулой $V = \frac{1}{2}(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2) + \frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2^2)$.

Определим управление с обратной связью следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega_2\omega_3 - \tfrac{1}{A_1}\nu_2\nu_3 - \{\tfrac{|A_1-A_2|}{2A_1}|\omega_3| + A_1h + \tfrac{1}{2}\sigma\sigma^T\}\omega_1, \\ u_2 &= -\omega_1\omega_3 + \tfrac{1}{A_2}\nu_1\nu_3 - \{\tfrac{|A_1-A_2|}{2A_2}|\omega_3| + A_2h + \tfrac{1}{2}\sigma\sigma^T\}\omega_2, \end{aligned} \tag{9}$$

где функция h будет определена ниже.

Проведя вычисления, имеем

$$LV = -\frac{|A_1 - A_2|}{2}|\omega_3|\omega_1^2 - \frac{|A_1 - A_2|}{2}|\omega_3|\omega_2^2 - A_1^2h\omega_1^2 - A_2^2h\omega_2^2 \le 0.$$

Таким образом, первое условие теоремы 1 выполнено.

Все решения системы (7) ограничены по переменным ν_i благодаря наличию геометрического интеграла $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = \text{const}$. Остается проверить ограниченность решений по переменным ω_i. Для этого воспользуемся теоремой 39.1 из монографии [2]. Согласно этой теореме, для ограниченности решений по ω_i достаточно, чтобы существовала определенно-положительная по ω_i функция $W_0(x)$, которая не убывает на решениях замкнутой системы (7), (9) и удовлетворяет условию $W_0(x) \to \infty$ при $\omega_i \to \infty$. В качестве такой функции выберем

$$W_0(x) = \frac{1}{2}(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2) + \frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2^2).$$

Тогда

$$LW_0(x) = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2\omega_3 - \frac{|A_1 - A_2|}{2}|\omega_3|(\omega_1^2 + \omega_2^2) - h(A_1^2\omega_1^2 + A_2^2\omega_2^2).$$

Согласно теореме об ограниченности решений, для ω_i-ограниченности достаточно, чтобы выполнялось неравенство $LW_0(x) \le 0$, т.е. чтобы функция $h(x) > 0$ удовлетворяла следующему условию:

$$h(x)(A_1^2\omega_1^2 + A_2^2\omega_2^2) \ge (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2\omega_3. \tag{10}$$

Используя неравенство $2A_1A_2\omega_1\omega_2 \le A_1^2\omega_1^2 + A_2^2\omega_2^2$, получим, что для выполнения (10) достаточно положить

$$h(x) = \left|\frac{A_1 - A_2}{2A_1A_2}\omega_3\right| + \varepsilon, \tag{11}$$

где ε – произвольное положительное число.

Проверим инвариантность множества M, которое имеет вид

$$M = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3) : \nu_1 = \nu_2 = \omega_1 = \omega_2 = 0\}.$$

Достаточно показать, что система (7), (9) на множестве M разрешима для любых начальных условий.

Перепишем систему (7), (9), подставив в нее $\nu_1 = \nu_2 = \omega_1 = \omega_2 = 0$

$$\begin{cases} d\omega_3 = 0, \\ d\nu_3 = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Очевидно, решением системы будет

$$\begin{cases} \omega_3(t) = \text{const}, \\ \nu_3(t) = \text{const}. \end{cases} \tag{13}$$

Таким образом, условие 3) теоремы 1 выполнено.

Осталось показать, что и четвертое условие выполняется. Множество M_v имеет вид:

$$M_v = \{\omega_1 = \omega_2 = 0\},$$

$$x(t) \in M_v : \begin{cases} d\nu_1 = \omega_3\nu_2 dt, \\ d\nu_2 = -\omega_3\nu_1 dt, \\ 0 = -\frac{1}{A_1}\nu_2\nu_3 dt, \\ 0 = \frac{1}{A_2}\nu_1\nu_3, \\ d\omega_3 = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Нетрудно проверить, что для достаточно близких к (8) начальных условиях все целые траектории системы (7) с управлением (9) удовлетворяют свойству $\nu_1 = \nu_2 = 0$. При этом решением системы (14) является $\nu_1(t) = 0$, $\nu_2(t) = 0$, $\omega_3(t) = \text{const}$, $\nu_3(t) = \text{const}$. Это же решение удовлетворяет системе (12). Итак, $M_v \backslash M$ не содержит целых полутраекторий.

Все условия теоремы 1 выполнены, значит решение (8) системы (7) асимптотически y-устойчиво по вероятности.

4. Одноосная стабилизация спутника с помощью двух маховиков. Динамические уравнения движения твердого тела, содержащего пару симметричных маховиков, со случайными воздействиями при управлении могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} d\omega_1 = \left(\frac{A_2-A_3}{A_1-I_1}\omega_2\omega_3 + \frac{I_2\Omega_2}{A_1-I_1}\omega_3 - \frac{1}{A_1-I_1}u_1\right)dt + \omega_1\sigma dW(t), \\ d\omega_2 = \left(\frac{A_3-A_1}{A_2-I_2}\omega_1\omega_3 - \frac{I_1\Omega_1}{A_2-I_2}\omega_3 - \frac{1}{A_2-I_2}u_2\right)dt + \omega_2\sigma dW(t), \\ d\omega_3 = \left(\frac{A_1-A_2}{A_3}\omega_1\omega_2 + \frac{I_1\Omega_1}{A_3}\omega_2 - \frac{I_2\Omega_2}{A_3}\omega_1\right)dt, \\ d\Omega_1 = \left(\frac{A_1}{I_1(A_1-I_1)}u_1 - \frac{A_2-A_3}{A_1-I_1}\omega_2\omega_3 - \frac{I_2\Omega_2}{A_1-I_1}\omega_3\right)dt - \omega_1\sigma dW(t), \\ d\Omega_2 = \left(\frac{A_2}{I_2(A_2-I_2)}u_2 - \frac{A_3-A_1}{A_2-I_2}\omega_1\omega_3 + \frac{I_1\Omega_1}{A_2-I_2}\omega_3\right)dt - \omega_2\sigma dW(t), \\ d\nu_1 = (\omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3)dt, \\ d\nu_2 = (\omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1)dt, \\ d\nu_3 = (\omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2)dt, \end{cases} \tag{15}$$

где ω_i – координаты вектора угловой скорости тела-носителя в главной системе координат; Ω_1, Ω_2 – относительные угловые скорости первого и второго маховика; A_i – главные моменты инерции всей системы, состоящей из тела-носителя и маховиков;

I_1, I_2 – осевые моменты инерции первого и второго маховика соответственно (предполагается, что $A_1 > I_1, A_2 > I_2$); u_1, u_2 – управляющие моменты, приложенные к первому и второму маховику (см. [10]).

Система уравнений (15) при $u_1 = u_2 = 0$ допускает положение равновесия

$$\begin{gathered}\omega_i = 0, \quad \Omega_1 = \mathrm{const}, \quad \Omega_2 = \mathrm{const}, \\ \nu_1 = \nu_2 = 0, \quad \nu_3 = 1.\end{gathered} \tag{16}$$

Рассматриваемая механическая система допускает следующие интегралы:

$$W_1 = (A_1\omega_1 + I_1\Omega_1)^2 + (A_2\omega_2 + I_2\Omega_2)^2 + (A_3\omega_3)^2 = \mathrm{const},$$

$$W_2 = (A_1\omega_1 + I_1\Omega_1)\nu_1 + (A_2\omega_2 + I_2\Omega_2)\nu_2 + (A_3\omega_3)\nu_3 = \mathrm{const},$$
$$W_3 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = \mathrm{const}.$$

Для существования интеграла моментов необходимо на вектор σ, характеризуюший случайные воздействия, наложить условие $\sigma \in N$, где N – инвариантное подпространство линейного оператора Q, соответствующее нулевому собственному значению. Линейный оператор Q задан матрицей Гессе функции W_1

$$Q = \begin{pmatrix} 2A_1^2 & 0 & 0 & 2A_1I_1 & 0 \\ 0 & 2A_2^2 & 0 & 0 & 2A_2I_2 \\ 0 & 0 & 2A_3^2 & 0 & 0 \\ 2I_1A_1 & 0 & 0 & 2I_1^2 & 0 \\ 0 & 2I_2A_2 & 0 & 0 & 2I_2^2 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Найдем собственные значения данной матрицы и собственные векторы, соответствующие нулевому собственному значению. Эти векторы имеют вид

$$\bar{x} = (-\frac{I_1}{A_1}\Omega_1, -\frac{I_2}{A_2}\Omega_2, 0, \Omega_1, \Omega_2)^T.$$

Таким образом, множество N имеет вид:

$$N = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \Omega_1, \Omega_2)^T : \omega_1 = -\frac{I_1}{A_1}\Omega_1, \omega_2 = -\frac{I_2}{A_2}\Omega_2, \omega_3 = 0\}.$$

Для стабилизации системы (15) по переменным $\omega_1, \omega_2, \nu_1, \nu_2$ воспользуемся теоремой 1 со следующей функцией $2V(x) = (A_1 - I_1)\omega_1^2 + (A_2 - I_2)\omega_2^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2$.

Зададим функцию обратной связи

$$\begin{aligned} u_1 &= \nu_2\nu_3 + (A_2\omega_2 + I_2\Omega_2)\omega_3 + \omega_1(h + \tfrac{1}{2}\sigma\sigma^T(A_1 - I_1) + \tfrac{|A_1 - A_2|}{2}|\omega_3|), \\ u_2 &= -\nu_1\nu_3 - (A_1\omega_1 + I_1\Omega_1)\omega_3 + \omega_2(h + \tfrac{1}{2}\sigma\sigma^T(A_2 - I_2) + \tfrac{|A_1 - A_2|}{2}|\omega_3|), \end{aligned} \tag{18}$$

где $h > 0$.

Как и в предыдущем примере, проверим выполнение условий теоремы 1. Имеем

$$LV(x) = -\omega_1^2(h + \frac{|A_1 - A_2|}{2}|\omega_3|) - \omega_2^2(h + \frac{|A_1 - A_2|}{2}|\omega_3|) \le 0.$$

Наличие интегралов W_1, W_2, W_3 и условие $LV(x) \le 0$ обеспечивают ограниченность решений системы (15) с обратной связью (18).

Система (15) на множестве M примет вид

$$\begin{cases} d\omega_3 = 0, \\ d\Omega_1 = \frac{I_2\Omega_2\omega_3}{A_1-I_1}dt, \\ d\Omega_2 = -\frac{I_1\Omega_1\omega_3}{A_2-I_2}dt, \\ d\nu_3 = 0, \end{cases} \tag{19}$$

где $M = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \Omega_1, \Omega_2, \nu_1, \nu_2, \nu_3) : \nu_1 = \nu_2 = \omega_1 = \omega_2 = 0\}$.

Найдем решение системы (19). Получим

$$\begin{cases} \omega_3(t) = c_1\sqrt{\frac{(A_1-I_1)(A_2-I_2)}{I_1I_2}} \neq 0, \\ \nu_3(t) = c_2, \\ \Omega_1(t) = c_3\cos(c_1t) + c_4\sin(c_1t), \\ \Omega_2(t) = \sqrt{\frac{I_2(A_2-I_2)}{I_1(A_1-I_1)}}(c_4\cos(c_1t) - c_3\sin(c_1t)). \end{cases} \tag{20}$$

или

$$\begin{cases} \omega_3(t) = 0, \\ \nu_3(t) = c_2, \\ \Omega_1(t) = c_3, \\ \Omega_2(t) = c_4. \end{cases}$$

Итак, для произвольных начальных условий из множества M, выражения (20) задают решение системы (19) в M, что доказывает инвариантность множества M.

Множество M_v имеет вид: $M_v = \{\omega_1 = \omega_2 = 0\}$,

$$x(t) \in M_v : \begin{cases} d\nu_1 = \omega_3\nu_2dt, \\ d\nu_2 = -\omega_3\nu_1dt, \\ \nu_2\nu_3 = 0, \\ \nu_1\nu_3 = 0, \\ d\omega_3 = 0, \\ d\nu_3 = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Для достаточно близких к положению равновесия (16) начальных условий все решения системы (15) с управлением (18) обладают свойством $\nu_1 = \nu_2 = 0$. Тогда соответствующее решение системы (21) задается соотношениями $\nu_1(t) = 0$, $\nu_2(t) = 0$ и (20).

Это же решение удовлетворяет системе (19). Значит, $M_v \backslash M$ не содержит целых полутраекторий, что означает выполнение четвертого условия теоремы 1.

Тогда по теореме 1, решение (16) системы (15), (18) асимптотически устойчиво по переменным $\nu_1, \nu_2, \omega_1, \omega_2$ по вероятности.

5. Заключение. В работе распространена теорема К. Ризито об асимптотической устойчивости по части переменных на случай систем стохастических дифференциальных уравнений. С помощью этой теоремы решены задачи одноосной стабилизации твердого тела с использованием функций обратной связи (9), (18).

Представляет дальнейший интерес исследование задачи об асимптотической устойчивости инвариантных множеств и описание аттракторов нелинейных систем со случайным воздействием.

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 472 с.
2. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
3. *Воротников В.И.* Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1991. – 288 с.
4. *Кац И.Я., Красовский Н.Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. матем. и мех. – 1960. – Т. 24. – Вып. 5. – С. 809-823.
5. *Кушнер Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. – М.: Мир, 1969. – 199 с.
6. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
7. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Наукова думка, 1968. – 354 с.
8. *Xuerong Mao* Some contributions to stochastic asymptotic stability and boundedness via multiple Lyapunov functions // Jornal of mathematical and applications. – 2000. – С. 325-340.
9. *Шаров В.Ф.* Устойчивость и стабилизация стохастических систем по отношению к части переменных // Автоматика и телемеханика. – 1978. – Вып. 11. – С. 63-71.
10. *Zuyev A.L.* On partial stabilization of nonlinear autonomous systems: sufficient conditions and examples // Proc of the European Control Conference ECC 2001. – Porto (Portugal). – P. 1918-1922.
11. *Risito C.* Sulla stabilita asintotica parziale // Ann. Math. Pura Appl. – 1970. – 84. – P. 279-292.
12. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. – М.: Мир, ООО «Издательство АСТ», 2003. – 408 с.

I. G.Vasylieva, A. L. Zuyev

Partial stabilization of nonlinear systems with random disturbances.

For systems of Ito stochastic differential equations, a theorem on stability in probability with respect to a part of variables is proven by using a Lyapunov function with semi-definite derivative. We consider the problem of single axis stabilization of a satellite by means of jets and a pair of flywheels.

Keywords: *Ito stochastic differential equations, stability in probability, stability for some of the variables.*

І. Г. Васильєва, О. Л. Зуєв

Часткова стабілізація нелінійних систем з випадковими впливами.

Для систем стохастичних диференціальних рівнянь Іто доведено теорему про асимптотичну стійкість за ймовірністю відносно частини змінних із застосуванням функції Ляпунова зі знакосталою похідною. Розглянуто задачі одноосьової стабілізації супутника за допомогою реактивних двигунів орієнтації та одноосьової стабілізації супутника за допомогою двох маховиків.

Ключові слова: *Стохастичні диференціальні рівняння Іто, стійкість за ймовірністю, стійкість відносно частини змінних.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк *Получено 28.11.12*
shurko-irina@mail.ru
al_zv@mail.ru