УДК 517.9

©2012. **А. А. Бондарь**

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПОДМНОГООБРАЗИЯ КОМПАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ФИКСИРОВАННОЙ СТРУКТУРОЙ ЖОРДАНОВЫХ БЛОКОВ

С помощью специального локального диффеоморфизма описано подмногообразие компактных операторов с фиксированной структурой жордановых блоков выделенных собственных значений. Также предъявлены формулы некоторых специальных однопараметрических возмущений данной жордановой структуры.

Ключевые слова: *многообразие компактных операторов, жорданова форма.*

1. Введение. В работе [1] В.И. Арнольд впервые рассмотрел многообразие вещественных симметричных матриц с фиксированными кратностями выбранных собственных значений. Он нашел формулу его коразмерности, которая зависит только от кратностей выбранных собственных значений и не зависит от размерности объемлющего пространства. Эти результаты были обобщены для случая компактных вещественных самосопряжённых операторов в работе [2], где введен локальный диффеоморфизм, распрямляющий многообразие Арнольда. Дальнейшее изучение свойств многообразия Арнольда и локального диффеоморфизма осуществлено Я.М. Дымарским [3], [4]. В работе [5] автором было дано неявное задание подмногообразия компактных операторов с фиксированной структурой жордановых блоков выделенных ненулевых собственных значений. Здесь предложена параметризация этого подмногообразия, полученная при помощи специального диффеоморфизма. Параметризация имеет определенные преимущества перед неявным заданием. В настоящей работе с ее помощью дается описание некоторых специальных однопараметрических возмущений данной жордановой структуры.

2. Обозначения и определения. Пусть X – банахово пространство над полем $\mathbb{C}$, а L_c – банахово пространство компактных операторов, действующих в X. Пусть $J \in L_c$ фиксированный компактный оператор со спектром σ и ненулевое собственное значение $\lambda \in \sigma$ фиксировано. Пусть P_λ есть проекционный оператор Рисса, отвечающий λ, а $P_{\sigma\setminus\lambda}$ – проекционный оператор Рисса, отвечающий $\sigma \setminus \lambda$. Пространство $X = X^{(1)} \oplus X^{(2)}$, где $X^{(1)} = P_\lambda(X)$ – инвариантное подпространство, отвечающее собственному значению λ, а $X^{(2)} = P_{\sigma\setminus\lambda}(X)$ – инвариантное подпространство, отвечающее остальной части спектра σ. Разложение пространства X порождает разложение пространства операторов: $L_c = L_c^{11} \oplus L_c^{12} \oplus L_c^{21} \oplus L_c^{22}$. Произвольный оператор $B \in L_c$ при этом имеет блочное представление

$$B = \begin{bmatrix} B_{\mathbf{1},\mathbf{1}} & B_{\mathbf{1},\mathbf{2}} \\ B_{\mathbf{2},\mathbf{1}} & B_{\mathbf{2},\mathbf{2}} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Автор признателен Я.М. Дымарскому за постановку проблемы и постоянную поддержку.

В частности, в каноническом базисе подпространства $X^{(1)}$ оператор J имеет блочно-диагональный вид

$$J = \begin{bmatrix} J(\lambda) & 0 \\ 0 & A_{\mathbf{2,2}} \end{bmatrix},$$

где $J(\lambda)$ есть прямая сумма жордановых блоков, отвечающих собственному значению λ.

Пусть алгебраическая кратность λ равняется m, а геометрическая кратность равняется s, тогда конечномерный оператор $B_{\mathbf{1,1}}$ имеет порядок m и блочное представление

$$B_{\mathbf{1,1}} = \left[B_{ij}\right]_{i,j=1}^{s}, \tag{2}$$

которое порождено жордановой структурой $J(\lambda)$.

В дальнейшем мы будем отождествлять операторы в $X^{(1)}$ и матрицы порядка m. Матричное пространство L_c^{11} мы наделяем эрмитовой структурой с помощью скалярного произведения $(A, B) = Trace(A \cdot B^*)$, где B^* – матрица, полученная из B транспонированием и комплексным сопряжением.

Обозначим через $\overline{k} := \{k_1, ..., k_s\}$ вектор, чьи компоненты являются размерами жордановых блоков в $J(\lambda)$ ($k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_s$, $\sum k_i = m$). Через $N_\varepsilon(J) \subset L_c$ обозначим ε-окрестность оператора J. Мы изучаем подмножество $L_c(J, \varepsilon, \lambda, \overline{k})$ компактных операторов $A \in N_\varepsilon(J)$, имеющих в окрестности λ единственное собственное значение λ', которому отвечают жордановы блоки $J(A, \lambda')$ той же структуры, что и $J(\lambda)$.

Пусть $Orb(A)$ – орбита произвольной фиксированной матрицы $A \in L_c^{11}$ под действием группы $GL(m, \mathbb{C})$ всех невырожденных матриц порядка m. Рассмотрим специальное семейство матриц $A = J(\lambda) + F$, отличающихся от исходной жордановой тем, что в некоторых местах вместо нулей стоят голоморфные функции параметров, обращающиеся в нуль при нулевых значениях параметров.

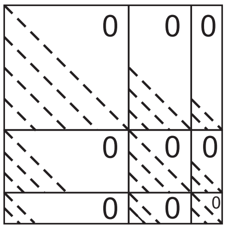

Рис. 1. Нормальная форма

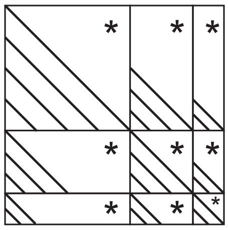

Рис. 2. Матрица из касательного пространства

При этом блочная (см. (2)) матрица F имеет вид, описанный на рис. 1: каждый пунктирный отрезок означает ряд одинаковых чисел, а в незаполненных местах подразумеваются нули. Множество всех матриц на рис. 1 образует линейное подпространство $L_{\overline{k}}^{11} \subset L_c^{11}$ размерности $d = k_1 + 3k_2 + ... + (2s-1)k_s$. Это подпространство ортогонально и трансверсально орбите $Orb(J(\lambda))$ [6]. Далее нам понадобится касательное пространство $T_{J(\lambda)}Orb$ к орбите $J(\lambda)$, состоящее из матриц вида $[C, J(\lambda)] := C \cdot J(\lambda) - J(\lambda) \cdot C$ [6]. Мы утверждаем, что произвольная матрица

$S \in T_{J(\lambda)}Orb$ имеет вид, описанный на рис. 2: сумма элементов на указанных отрезках равна нулю, все остальные элементы $(*)$ являются произвольными. Во-первых, очевидно, что подпространство таких матриц имеет коразмерность d в пространстве L_c^{11}. Во-вторых, вышеуказанные матрицы ортогональны матрицам из подпространства $L_{\overline{k}}^{11}$. Остается вспомнить, что подпространство $L_{\overline{k}}^{11}$ является ортогональным и трансверсальным к орбите $Orb(J(\lambda))$.

Таким образом, L_c^{11} является прямой суммой ортогональных подпространств: $L_c^{11} = L_{\overline{k}}^{11} \oplus T_{J(\lambda)}Orb$; произвольная матрица $B_{\mathbf{1,1}} \in L_c^{11}$ единственным образом представима в виде

$$B_{\mathbf{1,1}} = F(B_{\mathbf{1,1}}) + S(B_{\mathbf{1,1}}), \tag{3}$$

где $F : L_c^{11} \to L_{\overline{k}}^{11}, \quad S : L_c^{11} \to T_{J(\lambda)}Orb$ ортогональные проекторы.

Разложения (1) и (3) порождают проекторы

$$\widehat{F},\ \widehat{S}:\ L_c \to L_c,$$

$$\widehat{F}(B) := \begin{bmatrix} F(B_{\mathbf{1,1}}) & 0 \\ 0 & B_{\mathbf{2,2}} \end{bmatrix},\ \widehat{S}(B) := \begin{bmatrix} S(B_{\mathbf{1,1}}) & B_{\mathbf{1,2}} \\ B_{\mathbf{2,1}} & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Основные теоремы. Для исследования многообразия операторов рассмотрим отображение малой окрестности нуля

$$\Psi:\ L_c \supset N(0) \to L_c,\quad \Psi(B) := \Big(I + \big(\widehat{S}(B)\big)^T\Big)\Big(J + \widehat{F}(B)\Big)\Big(I + \big(\widehat{S}(B)\big)^T\Big)^{-1}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1. $\Psi(0) = J$.
2. *Операторы* $J + \widehat{F}(B)$ *и* $\Psi(B)$ *подобны.*
3. *Отображение* Ψ *инвариантно относительно подпространств* L_c^{11} *и* L_c^{22}.
4. *Отображение* Ψ *голоморфно в нуле.*
5. *Отображение* Ψ *является диффеоморфизмом некоторой малой окрестности* $N(0)$ *на шаровую окрестность* $N_\varepsilon(J)$ *достаточно малого радиуса* ε.
6. *Сужение отображения* Ψ *на подпространство* L_c^{11} *локально отображает касательное пространство* $T_{J(\lambda)}Orb$ *на* $Orb(J(\lambda))$.

Доказательство. Первое, второе и третье утверждения следуют непосредственно из формулы (4).

Под голоморфностью отображения Ψ мы понимаем определение из [7]. Голоморфность Ψ следует из линейности отображений $\widehat{S}$ и $\widehat{F}$ и формулы (4).

Чтобы доказать пятое утверждение, найдем производную $D\Psi(0)$ в точке $0 \in L_c$ и докажем, что она является линейным изоморфизмом. С этой целью разложим $(I + (\widehat{S}(B))^T)^{-1}$ в ряд и выделим линейную часть:

$$\begin{gathered}\Psi(B) = (I + (\widehat{S}(B))^T)(J + \widehat{F}(B))(I + (\widehat{S}(B))^T)^{-1} = \\ = (I + (\widehat{S}(B))^T)(J + \widehat{F}(B))(I - (\widehat{S}(B))^T + ((\widehat{S}(B))^T)^2 - \ldots) = \\ = J + \widehat{F}(B) + (\widehat{S}(B))^T \cdot J - J \cdot (\widehat{S}(B))^T + o(B),\end{gathered}$$

где $o(B)$ – бесконечно малая второго порядка. Поэтому

$$D\Psi(0)B = \widehat{F}(B) + \left[(\widehat{S}(B))^T, J\right] = \tag{5}$$

$$= \begin{pmatrix} F(B_{\mathbf{1,1}}) + \left[(S(B_{\mathbf{1,1}}))^T, J(\lambda)\right] & B^T_{\mathbf{2,1}} \cdot A_{\mathbf{2,2}} - J(\lambda) \cdot B^T_{\mathbf{2,1}} \\ A_{\mathbf{2,2}} \cdot B^T_{\mathbf{1,2}} - B^T_{\mathbf{1,2}} \cdot J(\lambda) & B_{\mathbf{2,2}} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $D\Psi(0)$ является биекцией. Для этого необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$D\Psi(0)B = C \tag{6}$$

имело единственное решение B при любых $C \in L_c$. Уравнение (6) равносильно системе операторных уравнений:

$$\begin{cases} F(B_{\mathbf{1,1}}) + \left[(S(B_{\mathbf{1,1}}))^T, J(\lambda)\right] = C_{\mathbf{1,1}}, \\ B_{\mathbf{2,2}} = C_{\mathbf{2,2}}, \\ B^T_{\mathbf{2,1}} \cdot A_{\mathbf{2,2}} - J(\lambda) \cdot B^T_{\mathbf{2,1}} = C_{\mathbf{1,2}}, \\ A_{\mathbf{2,2}} \cdot B^T_{\mathbf{1,2}} - B^T_{\mathbf{1,2}} \cdot J(\lambda) = C_{\mathbf{2,1}}. \end{cases}$$

Заметим, что уравнения независимы и каждое содержит в качестве неизвестного один из блоков разложения (1). Последние два уравнения являются уравнениями типа Сильвестра. Поскольку λ не является собственным значением оператора $A_{\mathbf{2,2}}$, то указанные уравнения имеют единственные решения $B_{\mathbf{2,1}}, B_{\mathbf{1,2}}$ при любых $C_{\mathbf{1,2}}, C_{\mathbf{2,1}}$ [8]. Остается показать, что первое уравнение системы имеет единственное решение. Уравнение

$$F(B_{\mathbf{1,1}}) + \left[(S(B_{\mathbf{1,1}}))^T, J(\lambda)\right] = C_{\mathbf{1,1}}$$

будет иметь единственное решение при любых $C_{\mathbf{1,1}}$, тогда и только тогда, когда соответствующее однородное уравнение

$$F(B_{\mathbf{1,1}}) + \left[(S(B_{\mathbf{1,1}}))^T, J(\lambda)\right] = 0 \tag{7}$$

будет иметь только тривиальное решение $B_{\mathbf{1,1}} = 0$. Поскольку

$$F(B_{\mathbf{1,1}}) \in L^{\mathbf{11}}_{\overline{k}} \perp T_{J(\lambda)} \ni \left[(S(B_{\mathbf{1,1}}))^T, J(\lambda)\right],$$

то уравнение (7) эквивалентно системе

$$\begin{cases} F(B_{\mathbf{1,1}}) = 0 \in L^{\mathbf{11}}_{\overline{k}}, \\ \left[(S(B_{\mathbf{1,1}}))^T, J(\lambda)\right] = 0 \in T_{J(\lambda)}Orb. \end{cases} \tag{8}$$

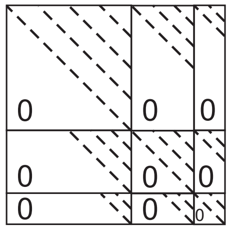

Рис. 3. Решение уравнения $AX = XB$.

Из второго уравнения системы (8) следует, что блочная матрица $(S(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}))^T$ имеет вид, изображенный на рис. 1 [9]. Поэтому, матрица $S(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}})$ имеет вид, изображенный на рис. 3. В то же самое время, по определению, $S(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}) \in T_{J(\lambda)}Orb$, то есть $S(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}})$ должна иметь вид, изображенный на рис. 2. Это возможно только в том случае, когда матрица $S(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}})$ является нулевой. Поэтому уравнение (7) имеет только тривиальное решение $B_{\mathbf{1},\mathbf{1}} = 0$. $\square$

Перейдем к исследованию многообразия операторов. Нам понадобится линейное подпространство

$$T := \{B|\ B_{\mathbf{1},\mathbf{1}} \in T^{11}\} \subset L_c, \text{ где}$$

$$T^{11} := \{(\lambda' - \lambda)I\} \oplus T_{J(\lambda)}Orb \subset L_c^{11}, \quad \lambda' \in \mathbb{C}.$$

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Подмножество $L_c(J, \varepsilon, \lambda, \overline{k}) \subset L_c$ определяется следующим образом:*

$$L_c(J, \varepsilon, \lambda, \overline{k}) = \Psi(T \cap N(0)).$$

2. *Подмножество $L_c(J, \varepsilon, \lambda, \overline{k}) \subset L_c$ является аналитическим подмногообразием комплексной коразмерности*

$$co\dim L_c(J, \varepsilon, \lambda, \overline{k}) = \big(k_1 + 3k_2 + 5k_3 + \ldots + (2s-1)k_s\big) - 1.$$

3. *Касательное пространство $T_J L_c(J, \varepsilon, \lambda, \overline{k}) = T$.*

4. *Отображение Ψ локально отображает касательное пространство $T_J L_c(J, \varepsilon, \lambda, \overline{k})$ на $L_c(J, \varepsilon, \lambda, \overline{k})$.*

Доказательство. Покажем вначале справедливость теоремы для конечномерного случая. Для этого мы будем использовать сужение Ψ^{11} отображения Ψ на подпространство L_c^{11}. Обозначим через $V^m(\overline{k}) \subset L_c^{11}$ множество всех матриц, у которых жордановы формы отличаются от $J(\lambda)$ возможно лишь собственным значением, т.е. $V^m(\overline{k})$ является "пачкой матриц с жордановой формой $J(\lambda)$" в терминологии [6]. Обозначим через $L_c^m(\overline{k}, \varepsilon) = V^m(\overline{k}) \cap N_\varepsilon(J(\lambda))$ окрестность матрицы $J(\lambda)$ в пачке $V^m(\overline{k})$. Таким образом, $L_c^m(\overline{k}, \varepsilon)$ является сужением $L_c(J, \varepsilon, \lambda, \overline{k})$ на L_c^{11}.

Локальное пересечение пачки матриц с семейством матриц Арнольда является интервалом

$$L_c^m(\overline{k},\varepsilon) \cap \{J(\lambda) + L_{\overline{k}}^{11}\} = J(\lambda) + \{(\lambda' - \lambda)I,\ |\lambda' - \lambda| < \varepsilon\}. \tag{9}$$

Поскольку семейство $\{J(\lambda) + L_{\overline{k}}^{11}\}$ трансверсально орбите $Orb(J(\lambda))$ и размерность подпространства $L_{\overline{k}}^{11}$ равна коразмерности $Orb(J(\lambda))$, то пересечение (9) содержит все матрицы из семейства Арнольда, подобные матрицам из $L_c^m(\overline{k},\varepsilon)$. Далее применяя проекцию F к прообразу $(\Psi^{11})^{-1}(L_c^m(\overline{k},\varepsilon))$, мы получим

$$F((\Psi^{11})^{-1}(L_c^m(\overline{k},\varepsilon))) = \{(\lambda' - \lambda)I\}.$$

Из разложения (3) и утверждения 5 теоремы 1 вытекает, что подмножество $L_c^m(\overline{k},\varepsilon)$ определяется следующим образом:

$$L_c^m(\overline{k},\varepsilon) = \Psi^{11}(T^{11} \cap N^{11}(0)), \quad (N^{11}(0) \subset L_c^{11}) \tag{10}$$

и является аналитическим подмногообразием комплексной коразмерности

$$co\dim L_c^m(\overline{k},\varepsilon) = \big(k_1 + 3k_2 + 5k_3 + \ldots + (2s-1)k_s\big) - 1.$$

Производная (5) отображения Ψ переводит матрицу $B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}$ из касательного пространства $T_0(T^{11}) = T^{11}$ в матрицу

$$D\Psi(0)B_{\mathbf{1},\mathbf{1}} = (\lambda' - \lambda)I + [(S(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}))^T, J(\lambda)], \tag{11}$$

где $[(S(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}))^T, J(\lambda)] \in T_{J(\lambda)}Orb$. Поскольку Ψ является локальным диффеоморфизмом, то касательное пространство

$$T_{J(\lambda)}L_c^m(\overline{k},\varepsilon)) := D\Psi(0)(T^{11}) = \{(\lambda' - \lambda)I\} \oplus T_{J(\lambda)}Orb = T^{11}. \tag{12}$$

Рассмотрение конечномерного случая завершено.

Применим теперь к малому оператору $B \in T \cap N(0)$ отображение Ψ:

$$\begin{gathered}\Psi(B) = (I + (\widehat{S}(B))^T)(J + \widehat{F}(B))(I + (\widehat{S}(B))^T)^{-1} = \\ = \left(I + \begin{bmatrix} S(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}) & B_{\mathbf{2},\mathbf{1}} \\ B_{\mathbf{1},\mathbf{2}} & 0 \end{bmatrix}^T\right) \cdot \begin{bmatrix} J(\lambda) + (\lambda' - \lambda)I & 0 \\ 0 & A_{\mathbf{2},\mathbf{2}} + B_{\mathbf{2},\mathbf{2}} \end{bmatrix} \cdot \\ \cdot \left(I + \begin{bmatrix} S(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}) & B_{\mathbf{2},\mathbf{1}} \\ B_{\mathbf{1},\mathbf{2}} & 0 \end{bmatrix}^T\right)^{-1}.\end{gathered}$$

Мы видим, что $\Psi(T \cap N(0)) \subset L_c(A,\varepsilon,\lambda,\overline{k})$. При малом возмущении спектры диагональных блоков $J(\lambda) + (\lambda' - \lambda)I$ и $A_{\mathbf{2},\mathbf{2}} + B_{\mathbf{2},\mathbf{2}}$ не пересекаются. Учитывая, что Ψ локальный диффеоморфизм, и применяя (10), мы получаем утверждения 1 и 2 теоремы.

Из определения (5) отображения $D\Psi(0)$ следует, что

$$T_A L_c(A, \varepsilon, \lambda, \overline{k}) = D\Psi(0)(T) =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} (\lambda' - \lambda)I + [(S(B_{\mathbf{1,1}}))^T, J(\lambda)] & B_{\mathbf{2,1}}^T \cdot A_{\mathbf{2,2}} - J(\lambda) \cdot B_{\mathbf{2,1}}^T \\ A_{\mathbf{2,2}} \cdot B_{\mathbf{1,2}}^T - B_{\mathbf{1,2}}^T \cdot J(\lambda) & B_{\mathbf{2,2}} \end{bmatrix},\ B \in T \right\}.$$

Из теоремы 1 и равенств (11), (12) мы получаем, что касательное пространство

$$T_A L_c(A, \varepsilon, \lambda, \overline{k}) = T.$$

Наконец, последнее утверждение теоремы непосредственно вытекает из утверждений один и три. □

Утверждения теоремы легко переформулировать для случая конечного количества отслеживаемых ненулевых собственных значений.

4. Однопараметрические возмущения. В приложениях часто встречаются однопараметрические возмущения (семейства) операторов, которые сохраняют или изменяют специальным образом жорданову структуру исходного оператора. Используя локальный диффеоморфизм Ψ мы можем выписать явно некоторые из этих возмущений.

Обозначим через $T_\lrcorner \subset L_c$ линейное подпространство блочных операторов вида (1), где $B_{\mathbf{1,1}} \in T_{J(\lambda)}Orb$, а остальные блоки произвольные. Пусть I_m блочный оператор вида (1), где блоки $B_{\mathbf{1,2}}, B_{\mathbf{2,1}}, B_{\mathbf{2,2}}$ нулевые, а блок $B_{\mathbf{1,1}}$ – единичная матрица порядка m. Обозначим через $S^{2m-1} \subset \mathbb{C}^m$ сферу (вещественной размерности $2m-1$) нормированных собственных векторов J, отвечающих собственному значению λ. В частности, $u \in S^{2m-1}$. Пусть $N(u) \subset S^{2m-1}$ малая окрестность u.

Опишем однопараметрические семейства операторов зависящих от малого параметра $t \in \mathbb{C}$, которые сохраняют жорданову структуру выделенного собственного значения.

Теорема 3. *Предположим, что*

$$\begin{aligned} &\gamma(t) \in \mathbb{C}, && \gamma(0) = 0, \\ &B(t) \in T_\lrcorner \subset L_c, && B(0) = 0 \end{aligned}$$

произвольные аналитические функции. Справедливы следующие утверждения:

1. *При возмущении*

   $$C(t) = \Psi(J + \gamma(t) \cdot I_m + B(t)) - J, \quad C(0) = 0$$

   оператора J оператор $A(t) := J + C(t)$ имеет собственное значение $\lambda(t) = \lambda + \gamma(t)$, которому отвечают жордановы блоки той же структуры, что и $J(\lambda)$.

2. *Обратно, если аналитическая функция $A(t) \in L_c$ $(A(0) = J)$ сохраняет жорданову структуру, отвечающую выделенному собственному значению, то существует единственная пара функций $\gamma(t)$ и $B(t)$, для которых $A(t) \equiv \Psi(J + \gamma(t) \cdot I_m + B(t))$.*

3. *Если* $w(t) \in N(u) \subset S^{2m-1}, (w(0) = u)$ *– аналитическая функция, то* $u(t) = \left(I + \left(\widehat{S}(B(t))\right)^T\right) w(t)$ *есть некоторое семейство нормированных собственных векторов оператора* $A(t)$*, соответствующих собственному значению* $\lambda(t)$*.*

Теперь опишем крайние случаи изменения жордановой структуры при возмущении. Изучим случай "предельного расщепления" жордановой структуры.

Теорема 4. *Предположим, что*

$$\begin{array}{l} \gamma_i(t) \in \mathbb{C},\ \gamma_i(0) = 0 \ \ (i = 1, ..., m), \\ \gamma_i(t) \neq \gamma_j(t) \ \textit{при} \ \ i \neq j \ \ \textit{и} \ \ t \neq 0 \\ B(t) \in T_{\lrcorner} \subset L_c, \ \ B(0) = 0 \end{array}$$

произвольные аналитические функции. Тогда при возмущении

$$C(t) = \Psi \left(J + \left[\begin{array}{ccc|c} \gamma_1(t) & ... & 0 & \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & \gamma_m(t) & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right] + B(t) \right) - J$$

оператора J *оператор* $A(t) := J + C(t)$ *имеет* m *различных простых собственных значений* $\lambda_i = \lambda + \gamma_i(t)$*, близких* λ*.*

Рассмотрим случай "предельного укрупнения" жордановой структуры.

Теорема 5. *Предположим, что*

$$\begin{array}{l} \gamma_i(t) \in \mathbb{C},\ \gamma_i(0) = 0,\ (i = 0, ..., s-1), \\ B(t) \in T_{\lrcorner} \subset L_c, \ \ B(0) = 0 \end{array}$$

произвольные аналитические функции. Пусть $U(t) \in L_c$ *произвольный оператор, у которого элементы на местах* $(k_1, k_1 + 1), (k_1 + k_2, k_1 + k_2 + 1), ..., (\sum_{i=1}^{s-1} k_i, \sum_{i=1}^{s-1} k_i + 1)$ *соответственно равняются* $\gamma_1(t), \gamma_2(t), ..., \gamma_{s-1}(t)$*, а остальные элементы равны нулю. Тогда при возмущении*

$$C(t) = \Psi\left(J + \gamma_0(t) \cdot I_m + U(t) + B(t)\right) - J$$

оператора J *оператор* $A(t) := J + C(t)$ *имеет единственное собственное значение* $\lambda' := \lambda + \gamma_0(t)$*, близкое* λ*, которому отвечает единственный блок жордана порядка* m*.*

1. *Арнольд В.И.* Моды и квазимоды // Функц. анализ и его прилож. – 1948. – 6, № 2. – С. 94-101.
2. *Fujiwara D., Tanikawa M., Yukita Sh.* The spectrum of Laplasian I // Proc. Jap. Acad. Ser. A. – 1978. – 54, № 4. – P. 87-91.
3. *Дымарский Я.М.* Метод многообразий в теории собственных векторов нелинейных операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2007. – Т. 24. – С. 3-159.
4. *Dymarskii Ya.M.* Local research of manifolds generated by families of self-adjoint operators // Topology. – 2009. – 48. – P. 213-223.
5. *Бондарь А.А.* Подмногообразия компактных операторов с фиксированными жордановыми клетками // Український математичний вiсник. – 2012. – Т. 9, №4. – С. 445-459.

6. *Арнольд В.И.* О матрицах, зависящих от параметров // Успехи математических наук. – 1971. – 2, №2 (158). – С. 101-114.
7. *Бурбаки Н.* Дифференцируемые и аналитические многообразия. – М.: Мир, 1975. – 220 с.
8. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 535 с.
9. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.

A. A. Bondar

Parametrization of submanifold of compact operators with fixed Jordan blocks structure.

Using special local diffeomorphism a submanifold of compact operators with the fixed structure of Jordan blocks is described. Also, explicit formulas of some special one-parameter perturbations of Jordan structure are given.

Keywords: *compact operators manifold, Jordan form.*

О. О. Бондар

Параметризація підмноговиду компактних операторів з фіксованою структурою жорданових блоків.

За допомогою спеціального локального дифеоморфізму описано підмноговид компактних операторів з фіксованою структурою жорданових блоків виділених власних значень. Також подано формули деяких спеціальних однопараметричних збурень даної жорданової структури.

Ключові слова: *підмноговид компактних операторів, жорданова форма.*

Луганский национальный ун-т имени Т. Шевченко
a.-bondar@mail.ru

Получено 27.11.11