УДК 517.9

©2012. **С. М. Чуйко, П. В. Кулиш**

ЛИНЕЙНАЯ НЕТЕРОВА КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В СЛУЧАЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

Найдены необходимые и достаточные условия существования решений линейной нетеровой краевой задачи для системы обычных дифференциальных уравнений в случае параметрического резонанса.

Ключевые слова: *краевая задача, дифференциальные уравнения, параметрический резонанс.*

1. Постановка задачи. Исследована задача о построении решения $z(t,\varepsilon)$: $z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b]$, $z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$ нетеровой $(m \neq n)$ краевой задачи [1]

$$dz/dt = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \ \ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \tag{1}$$

в малой окрестности решения порождающей задачи

$$dz_0/dt = A(t)z_0 + f(t), \ \ell z_0(\cdot) = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

Здесь $A(t)-$ $(n\times n)-$ мерная матрица и $f(t)-$ $n-$ мерный вектор-столбец, элементы которых – непрерывные на отрезке $[a,b]$ действительные функции, $\ell z(\cdot)$ – линейный ограниченный векторный функционал $\ell z(\cdot) : C[a,b] \to \mathbb{R}^m$. Положим

$$Z(z,t,\varepsilon) := W(t,\mu(\varepsilon))z(t,\varepsilon), \ J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) := \varpi(\mu(\varepsilon))z(\cdot,\varepsilon),$$

где $W(t,\mu(\varepsilon))$ – непрерывная по t на отрезке $[a,b]$ $(n\times n)-$ матрица, $\varpi(\mu(\varepsilon))z(\cdot,\varepsilon)$ – линейный функционал. Считаем неизвестную $\mu(\varepsilon) \in \mathbb{R}^1$ непрерывной функцией малого параметра ε. Исследуем критический случай $(P_{Q^*} \neq 0)$; при условии

$$P_{Q^*}\left\{\alpha - \ell K\left[f(s)\right](\cdot)\right\} = 0, \ Q := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n} \tag{3}$$

порождающая задача (2) имеет $(r = n - n_1)-$ параметрическое семейство решений

$$z_0(t,c_0) = X_r(t)c_0 + G\left[f(s);\alpha\right](t), \ X_r(t) := X(t)P_{Q_r}, \ c_0 \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $X(t)-$ нормальная $(X(a) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной части системы (2), rank $Q := n_1$, $P_{Q_r}-$ $(n\times r)-$ матрица, составленная из $r-$ линейно-независимых столбцов $(n\times n)-$ матрицы-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q)$ и $P_{Q^*}-$ $(m\times m)-$ матрица-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q^*)$,

$$G\left[f(s);\alpha\right](t) = X(t)Q^+\left\{\alpha - \ell K\left[f(s)\right](\cdot)\right\} + K\left[f(s)\right](t)$$

– обобщенный оператор Грина краевой задачи (2),

$$K\Big[f(s)\Big](t) = X(t)\int_a^t X^{-1}(s)f(s)ds$$

– оператор Грина задачи Коши для системы (2), Q^+– псевдообратная матрица по Муру-Пенроузу [1]. Представим неизвестную функцию $\mu(\varepsilon)$ в виде

$$\mu(\varepsilon) := \mu_0 + \nu(\varepsilon),\ \mu_0 := \mu(0)$$

и зафиксируем вектор $c_0^* \in \mathbb{R}^r$, определяющий порождающее решение $z_0(t, c_0^*)$. Предположим матрицу

$$W(t,\mu) := V(t)\mu(\varepsilon) + W(t,0),\ W(t,\mu(\varepsilon)) \in \mathbb{R}^{r\times r}$$

и линейный функционал

$$\varpi(\mu(\varepsilon))z(\cdot,\varepsilon) := \theta z(\cdot,\varepsilon)\cdot\mu(\varepsilon) + \vartheta z(\cdot,\varepsilon),\ \theta z(\cdot,\varepsilon), \vartheta z(\cdot,\varepsilon) : C[a,b] \to \mathbb{R}^m$$

линейными однородными функциями неизвестной $\mu(\varepsilon)$; здесь $\theta z(\cdot,\varepsilon)$ и $\vartheta(z_0(\cdot,c_0^*))$ – линейные векторные функционалы $\theta z(\cdot,\varepsilon),\ \vartheta(z_0(\cdot,c_0^*)) : C[a,b] \to \mathbb{R}^m$. Поставленная задача обобщает традиционные периодические краевые задачи в случае параметрического резонанса, исследованные в монографиях [3, 4, 5].

2. Условия существования решения. Предположим, что задача (1) имеет решение, обращающееся при $\varepsilon = 0$ в порождающее $z_0(t, c_0^*)$. Оставляя ρ линейно независимых строк необходимого условия [1], приходим к уравнению

$$\mathcal{F}(c_0^*,\mu_0) := D_0\cdot\mu_0 + P_{Q_\rho^*}\Big\{\vartheta z_0(\cdot,c_0^*) - \ell K\Big[W(s,0)z_0(s,c_0^*)\Big](\cdot)\Big\} = 0, \tag{4}$$

где

$$D_0 := P_{Q_\rho^*}\Big\{\theta z_0(\cdot,c_0^*) - \ell K\Big[V(s)z_0(s,c_0^*)\Big](\cdot)\Big\} \in \mathbb{R}^{\rho\times 1}.$$

Здесь P_{D_0}– (1×1)– мерная матрица-ортопроектор: $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{N}(D_0)$; аналогично $P_{D_0^*}$– $(\rho\times\rho)$– мерная матрица-ортопроектор: $\mathbb{R}^\rho \to \mathbb{N}(D_0^*)$, $P_{Q_\rho^*} \in \mathbb{R}^{\rho\times m}$ – матрица, составленная из ρ линейно независимых строк ортопроектора P_{Q^*}. В случае $P_{D_0^*}P_{Q_\rho^*} = 0,\ P_{D_0} = 0$ последнее уравнение имеет единственное решение

$$\mu_0^* = -D_0^+\cdot P_{Q_\rho^*}\Big\{\vartheta z_0(\cdot,c_0^*) - \ell K\Big[W(s,0)z_0(s,c_0^*)\Big](\cdot)\Big\}.$$

Необходимые условия существования решения нетеровой краевой задачи (1) в случае параметрического резонанса определяет следующая лемма.

Лемма. *Пусть краевая задача (1) представляет критический* ($P_{Q^*} \neq 0$) *случай и выполнено условие (3) разрешимости порождающей задачи (2). Предположим* *также, что задача (1) имеет решение, обращающееся при* $\varepsilon = 0$ *в порождающее* $z_0(t, c_0^*)$ *и существует непрерывная функция* $\mu(\varepsilon) : \mu(0) := \mu_0^*$. *Тогда* $\mathcal{F}(c_0^*, \mu_0^*) = 0$; *при условии* $P_{D_0^*} P_{Q_\rho^*} = 0, \ P_{D_0} = 0$ *имеет место равенство*

$$\mu_0^* = -D_0^+ \cdot P_{Q_\rho^*} \Big\{ \vartheta z_0(\cdot, c_0^*) - \ell K \Big[W(s,0) z_0(s, c_0^*) \Big](\cdot) \Big\}.$$

В случае $P_{D_0^*} P_{Q_\rho^*} = 0, \ P_{D_0} = 0$ для фиксированного вектора $c_0^* \in \mathbb{R}^r$ константа μ_0^* определяет порождающее решение $z_0(t, c_0^*)$, в малой окрестности которого могут существовать искомые решения исходной задачи (1). По аналогии с нетеровыми слабонелинейными краевыми задачами в критическом случае [1], а также периодическими краевыми задачами [2], уравнение $\mathcal{F}(c_0^*, \mu_0) = 0$ будем называть уравнением для порождающих констант задачи (1) в случае параметрического резонанса. Фиксируя одно из решений $c_0^* \in \mathbb{R}^r, \ \mu_0^* \in \mathbb{R}^1$ уравнения (4), приходим к задаче об отыскании решения $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon)$ задачи (1) в окрестности порождающего решения $z_0(t, c_0^*)$, а также функции $\nu(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0]$. Отклонение от порождающего решения определяет краевая задача

$$dx(t,\varepsilon)/dt = A(t) x(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t, c_0^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon), \tag{5}$$

$$\ell \, x(\cdot, \ \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \tag{6}$$

разрешимая тогда и только тогда, когда

$$D_0 \cdot \nu(\varepsilon) = -P_{Q_\rho^*} \Big\{ \mu(\varepsilon) \cdot \theta x(\cdot, \varepsilon) + \vartheta x(\cdot, \varepsilon) - \ell K \Big[\mu(\varepsilon) V(s) x(s, \varepsilon) + W(s,0) x(s, \varepsilon) \Big](\cdot) \Big\}.$$

Последнее уравнение при условии $P_{D_0^*} P_{Q_\rho^*} = 0, \ P_{D_0} = 0$ разрешимо, при этом задача (5), (6) имеет единственное решение, которое определяет операторная система

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon G \Big\{ W(s, \mu(\varepsilon)) \Big[z_0(s, c_0^*) + x(s, \varepsilon) \Big]; \varpi(\mu(\varepsilon)) \Big[z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot, \varepsilon) \Big] \Big\}(t),$$

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0^* - D_0^+ \cdot P_{Q_\rho^*} \Big\{ \mu(\varepsilon) \cdot \theta x(\cdot, \varepsilon) + \vartheta x(\cdot, \varepsilon) - \tag{7}$$

$$- \ell K \Big[\mu(\varepsilon) V(s) x(s, \varepsilon) + W(s,0) x(s, \varepsilon) \Big](\cdot) \Big\}.$$

Для построения решения системы (7) в случае $P_{D_0^*} P_{Q_\rho^*} = 0, \ P_{D_0} = 0$ применим метод простых итераций [1, 2]. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть для краевой задачи (1) имеет место критический случай* $P_{Q^*} \neq 0$ *и выполнено условие (3) разрешимости порождающей задачи (2). Тогда для каждого корня* $c_0^* \in \mathbb{R}^r, \ \mu_0^* \in \mathbb{R}^1$ *уравнения (4) при условиях* $P_{D_0^*} P_{Q_\rho^*} = 0$ *и* $P_{D_0} = 0$

задача (5), (6) имеет единственное решение $x(t,\varepsilon) \in C^1[a,b],\ C[0,\varepsilon_0]$, *определяемое операторной системой (7), и существует непрерывная функция* $\mu(\varepsilon) : \mu(0) := \mu_0^*$. *При этом нетерова задача (1) имеет единственное решение* $z(t,\varepsilon) :\ z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b],\ z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],\ z(t,0) = z_0(t,c_0^*)$. *Для построения решения операторной системы (7) для* $\varepsilon \in [0,\varepsilon_*]$ *применима итерационная схема*

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Bigg\{W(s,\mu_k(\varepsilon))\Big[z_0(s,c_0^*) + x_k(s,\varepsilon)\Big]; \varpi(\mu_k(\varepsilon))\Big[z_0(\cdot,c_0^*) + x_k(\cdot,\varepsilon)\Big]\Bigg\}(t),$$

$$\mu_{k+1}(\varepsilon) = \mu_0^* - D_0^+ \cdot P_{Q_\rho^*}\Bigg\{\mu_k(\varepsilon)\cdot\theta x_{k+1}(\cdot,\varepsilon) + \vartheta x_{k+1}(\cdot,\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Big[\mu_k(\varepsilon)V(s)x_{k+1}(s,\varepsilon) + W(s,0)x_{k+1}(s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Bigg\},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

Длина отрезка $[0,\varepsilon_*]$, на котором применим метод простых итераций, может быть оценена, как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [1, 2], так и из условия сжимаемости оператора, определяемого системой (7) аналогично [8].

3. Периодическая задача для уравнения Матье. Условия доказанной теоремы выполняются в случае 2π-периодической задачи [2] для уравнения Матье

$$y'' + \Big(h(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t\Big)\cdot y = 0. \tag{8}$$

Решения $y(t,\varepsilon) :\ y(\cdot,\varepsilon) \in C^2[0,2\pi],\ y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$ периодической задачи для уравнения (8) ищем в малой окрестности решения порождающей 2π-периодической задачи для уравнения $y_0'' + k^2 y_0 = 0,\ k \in \mathbb{N}$. Нами предложена двухшаговая итерационная схема, построенная по схеме метода наименьших квадратов [6, 7], при фиксированном $k \in \mathbb{N}$ определяющая последовательные приближения к функции $h(\varepsilon) :\ h(\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],\ h(0) = k^2$ и соответствующей функции Матье $y(t,\varepsilon)$. Положим $k = 1$. Согласно принятым обозначениям, приходим к задаче о нахождении $2\pi-$ периодического решения

$$z(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\Big(z^{(a)}(t,\varepsilon),\ z^{(b)}(t,\varepsilon)\Big),\ z^{(a)}(t,\varepsilon),\ z^{(b)}(t,\varepsilon) \in C^1[0,2\pi],\ C[0,\varepsilon_0]$$

дифференциального уравнения (8); здесь

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ Z(z,\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Big(\mu(\varepsilon) - \cos 2t\Big)z^{(a)} \end{bmatrix},$$

а также $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \equiv 0,\ h(\varepsilon) := 1 - \varepsilon\mu(\varepsilon),\ \alpha = 0$. Поскольку $Q = 0$, постольку имеет место критический случай. Уравнение для порождающих амплитуд в случае 2π-периодической задачи для уравнения Матье при фиксированном $2\mu_0 \pm 1 \neq 0$ имеет единственное тривиальное решение $c_0 = 0$, которому в свою очередь отвечает только тривиальное решение периодической задачи для уравнения Матье (8). Положим

$$c_0^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mu_0^* = \frac{1}{2}.$$

Уравнение для порождающих амплитуд в случае 2π-периодической задачи для уравнения Матье при зафиксированном нами векторе c_0^* имеет единственную линейно независимую строку, при этом уравнение $\mathcal{F}(c_0^*, \mu_0) = 0$ становится скалярным. В свою очередь и матрица $D_0 = -\pi$ представляет собой скаляр, при этом условия $P_{D_0^*} P_{Q_\rho^*} = 0, \ P_{D_0} = 0$ выполнены, следовательно 2π-периодическая задача для уравнения Матье (8) имеет единственное решение. Примем в качестве нулевого приближения $h_0(\varepsilon)$ к неизвестной функции $h(\varepsilon)$ значение $h_0(\varepsilon) = h(0) = k^2 := 1$. Пусть $\varphi^{(1)}(t), \ \varphi^{(2)}(t), \ \varphi^{(3)}(t), \ ...$ – система линейно-независимых $2\pi-$ периодических дважды непрерывно-дифференцируемых скалярных функций. Обозначим матрицы

$$\varphi_j(t) = \Big[\varphi^{(1)}(t) \ \varphi^{(2)}(t) \ ... \ \varphi^{(k_j)}(t)\Big] \in \mathbb{R}^{1\times k_j}, \ j = 0, \ 1, \ 2, \ ... \, .$$

Первое приближение $y_1(t,\varepsilon)$ к периодическому решению уравнения (8) ищем в виде $y_1(t,\varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + \xi_1(t,\varepsilon), \ \xi_1(t,\varepsilon) = \varphi_1(t)c_1(\varepsilon)$, как $2\pi-$ периодическое решение уравнения

$$\frac{d^2 y_1(t,\varepsilon)}{dt^2} + \Big[h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t\Big] y_1(t,\varepsilon) = 0.$$

Потребуем

$$F(c_1(\varepsilon)) = \Bigg|\Bigg| \varphi_1''(t)c_1(\varepsilon) + \Big[h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t\Big]\varphi_1(t)c_1(\varepsilon) +$$

$$+ y_0''(t, c_0^*) + \Big[h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t\Big] y_0(t, c_0^*)\Bigg|\Bigg|^2_{L^2[0,2\pi]} \to \min .$$

Для фиксированной матрицы $\varphi_1(t)$ минимум функции $F(c_1(\varepsilon))$ существует, поскольку непрерывная неотрицательная функция достигает минимума. Необходимое условие минимизации функции $F(c_1(\varepsilon))$ приводит к уравнению

$$\Gamma_0\Big(\varphi_1(\cdot), \varepsilon\Big) \cdot c_1(\varepsilon) = -\int_0^{2\pi} \Phi_0^*(t,\varepsilon) \Big\{ y_0''(t, c_0^*) + \Big[h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t\Big] y_0(t, c_0^*)\Big\} dt,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $c_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_1}$ при условии невырожденности $(k_1 \times k_1)-$ матрицы Грама

$$\Gamma_0\Big(\varphi_1(\cdot), \varepsilon\Big) = \int_0^{2\pi} \Phi_0^*(t,\varepsilon) \cdot \Phi_0(t,\varepsilon) dt, \ \Phi_0(t,\varepsilon) := \Big\{\varphi_1''(t) + \Big[h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t\Big]\varphi_1(t)\Big\}.$$

Таким образом, при условии $\det \Gamma_0\Big(\varphi_1(\cdot), \varepsilon\Big) \neq 0$ находим вектор

$$c_1(\varepsilon) = -\left[\Gamma_0\Big(\varphi_1(\cdot), \varepsilon\Big)\right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \Phi_0^*(t, \varepsilon)\left\{y_0''(t, c_0^*) + \Big[h_0(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t\Big]y_0(t)\right\}dt,$$

определяющий первое приближение $y_1(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + \varphi_1(t) \cdot c_1(\varepsilon)$ периодическому решению уравнения (8), а также первое приближение $\mu_1(\varepsilon)$ к функции $\mu(\varepsilon)$:

$$\mu_1(\varepsilon) = \mu_0^* + D_0^+ \cdot P_{Q_\rho^*}\left\{\ell K\Big[\mu_0^* \cdot V(s)x_1(s, \varepsilon) + W(s, 0)x_1(s, \varepsilon)\Big](\cdot)\right\}.$$

Второе приближение

$$y_2(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon),\ \xi_2(t, \varepsilon) = \varphi_2(t) \cdot c_2(\varepsilon),\ c_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_2}$$

к периодическому решению уравнения (8) ищем, как $2\pi-$ периодическое решение уравнения

$$\frac{d^2y_2(t, \varepsilon)}{dt^2} + \Big[h_1(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t\Big]y_2(t, \varepsilon) = 0.$$

При условии невырожденности $(k_2 \times k_2)-$ матрицы Грама

$$\Gamma_1\Big(\varphi_2(\cdot), \varepsilon\Big) = \int_0^{2\pi} \Phi_1^*(t, \varepsilon) \cdot \Phi_1(t, \varepsilon)dt,\ \Phi_1(t, \varepsilon) := \left\{\varphi_2''(t) + \Big[h_1(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t\Big]\varphi_2(t)\right\}$$

находим вектор

$$c_2(\varepsilon) = -\left[\Gamma_1\Big(\varphi_2(\cdot), \varepsilon\Big)\right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \Phi_1^*(t, \varepsilon)\left\{y_1''(t, \varepsilon) + \Big[h_1(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t\Big]y_1(t, \varepsilon)\right\}dt,$$

а также второе приближение $\mu_2(\varepsilon)$ к функции $\mu(\varepsilon)$:

$$\mu_2(\varepsilon) = \mu_0^* + D_0^+ \cdot P_{Q_\rho^*}\left\{\ell K\Big[\mu_1^* \cdot V(s)x_2(s, \varepsilon) + W(s, 0)x_2(s, \varepsilon)\Big](\cdot)\right\}.$$

Обозначим $(1 \times k_{j+1})-$ матрицу

$$\Phi_j(t, \varepsilon) = \left\{\varphi_{j+1}''(t) + \Big[h_j(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t\Big]\varphi_{j+1}(t)\right\},\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \dots .$$

Продолжая рассуждения, при условии

$$\det \Gamma_j\Big(\varphi_{j+1}(\cdot), \varepsilon\Big) \neq 0,\ \Gamma_j\Big(\varphi_{j+1}(\cdot), \varepsilon\Big) := \int_0^{2\pi} \Phi_j^*(t, \varepsilon) \cdot \Phi_j(t, \varepsilon)dt$$

приходим к следующей итерационной схеме:

$$y_{j+1}(t,\varepsilon) = y_0(t,c_0^*) + \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon) + \ ... \ + \xi_{j+1}(t,\varepsilon), \ \xi_{j+1}(t,\varepsilon) = \varphi_{j+1}(t)\cdot c_{j+1}(\varepsilon),$$

$$c_{j+1}(\varepsilon) = -\left[\Gamma_j\left(\varphi_{j+1}(\cdot),\varepsilon\right)\right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \Phi_j^*(t,\varepsilon)\left\{y_j''(t) + \left[h_j(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t\right]y_j(t)\right\}dt,$$

$$\mu_{j+1}(\varepsilon) = \mu_0^* + D_0^+ \cdot P_{Q_\rho^*}\left\{\ell K\left[\mu_j^*\cdot V(s)x_{j+1} + W(s,0)x_{j+1}\right](\cdot)\right\}, \ ... \ , \ j = 0,1,2,\dots .$$

Итерационная схема задает последовательность отображений, определяемую оператором Υ : $\left(y_{j+1}(t,\varepsilon), h_{j+1}(\varepsilon)\right) = \Upsilon\left(y_j(t,\varepsilon), h_j(\varepsilon)\right)$. Если оператор Υ является сжимающим, приведенная итерационная схема сходится к искомому 2π – периодическому решению $y(t,\varepsilon)$ уравнения (8). Скорость сходимости определяется выбором матриц $\varphi_j(t)$, а также величин ε и k. Примем в качестве нулевого приближения $h_0(\varepsilon)$ к неизвестной функции $h(\varepsilon)$ зависимость $h_0(\varepsilon) = 1 - \varepsilon\cdot\mu_0^*$ и зафиксируем вектор-строку $\varphi_1(t) = [\cos 3t \ \ \cos 5t \ \ \cos 7t \ \ \cos 9t \ \ \cos 11t \ ]$. Первое приближение к 2π – периодическому решению уравнения (8)

$$y_1(t,\varepsilon) = \cos t + \frac{1}{16}\,\varepsilon\cos 3t + \frac{1}{768}\,\varepsilon^2\left(-3\cos 3t + \cos 5t\right) + \frac{1}{73\ 728}\,\varepsilon^3\left(6\cos 3t - \right.$$

$$\left. -8\cos 5t + \cos 7t\right) + \frac{1}{11\ 796\ 480}\,\varepsilon^4\left(220\cos 3t + 30\cos 5t - 15\cos 7t + \cos 9t\right)$$

определяет первое приближение $h_1(\varepsilon)$ к функции $h(\varepsilon)$:

$$h_1(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} + \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{\varepsilon^4}{24\ 576} + \frac{11\varepsilon^5}{1\ 179\ 648}.$$

Зафиксируем матрицу $\varphi_2(t) = [\cos 3t \ \ \cos 5t \ \ \cos 7t \ ... \ \cos 19t \ \ \cos 21t \ \ \cos 23t \ ]$. Второе приближение к 2π – периодическому решению уравнения (8)

$$y_2(t,\varepsilon) = \cos t + \frac{1}{16}\varepsilon\cos 3t - \frac{1}{256}\varepsilon^2\cos 3t + \frac{\varepsilon^3\cos 3t}{12\ 288} + \frac{11\varepsilon^4\cos 3t}{589\ 824} - \frac{49\varepsilon^5\cos 3t}{18\ 874\ 368} +$$

$$+\frac{55\varepsilon^6\cos 3t}{603\ 979\ 776} + \frac{83\varepsilon^7\cos 3t}{4\ 529\ 848\ 320} - \frac{12\ 121\varepsilon^8\cos 3t}{3\ 865\ 470\ 566\ 400} + \frac{114\ 299\varepsilon^9\cos 3t}{834\ 941\ 642\ 342\ 400} +$$

$$+\frac{192\ 151\varepsilon^{10}\cos 3t}{8\ 015\ 439\ 766\ 487\ 040} - \frac{83\ 513\ 957\varepsilon^{11}\cos 3t}{17\ 954\ 585\ 076\ 930\ 969\ 600} +$$

$$+\frac{944\ 750\ 239\varepsilon^{12}\cos 3t}{4\ 021\ 827\ 057\ 232\ 537\ 190\ 400} +$$

$$+\frac{1}{768}\varepsilon^2\cos 5t - \frac{\varepsilon^3\cos 5t}{9\ 216} + \frac{\varepsilon^4\cos 5t}{393\ 216} + \frac{7\varepsilon^5\cos 5t}{12\ 582\ 912} - \frac{719\varepsilon^6\cos 5t}{9\ 059\ 696\ 640} + \frac{689\varepsilon^7\cos 5t}{241\ 591\ 910\ 400} +$$

$$+\frac{58\ 321\varepsilon^8\cos 5t}{104\ 367\ 705\ 292\ 800}-\frac{121\ 067\varepsilon^9\cos 5t}{1\ 252\ 412\ 463\ 513\ 600}+\frac{1\ 600\ 351\varepsilon^{10}\cos 5t}{374\ 053\ 855\ 769\ 395\ 200}+$$

$$+\frac{184\ 607\ 429\varepsilon^{11}\cos 5t}{251\ 364\ 191\ 077\ 033\ 574\ 400}-\frac{6\ 935\ 404\ 307\varepsilon^{12}\cos 5t}{48\ 261\ 924\ 686\ 790\ 446\ 284\ 800}+$$

$$+\frac{\varepsilon^3\cos 7t}{73\ 728}-\frac{\varepsilon^4\cos 7t}{786\ 432}+\frac{\varepsilon^5\cos 7t}{31\ 457\ 280}+\frac{17\varepsilon^6\cos 7t}{2\ 516\ 582\ 400}-\frac{133\varepsilon^7\cos 7t}{135\ 895\ 449\ 600}+$$

$$+\frac{233\varepsilon^8\cos 7t}{6\ 522\ 981\ 580\ 800}+\frac{482\ 357\varepsilon^9\cos 7t}{70\ 135\ 097\ 956\ 761\ 600}-\frac{2\ 091\ 619\varepsilon^{10}\cos 7t}{1\ 745\ 584\ 660\ 257\ 177\ 600}+$$

$$+\frac{2\ 152\ 109\varepsilon^{11}\cos 7t}{40\ 218\ 270\ 572\ 325\ 371\ 904}+\frac{583\ 305\ 781\varepsilon^{12}\cos 7t}{64\ 349\ 232\ 915\ 720\ 595\ 046\ 400}+$$

$$+\frac{\varepsilon^4\cos 9t}{11\ 796\ 480}-\frac{\varepsilon^5\cos 9t}{117\ 964\ 800}+\frac{\varepsilon^6\cos 9t}{4\ 529\ 848\ 320}+\frac{\varepsilon^7\cos 9t}{21\ 743\ 271\ 936}-\frac{41\varepsilon^8\cos 9t}{6\ 088\ 116\ 142\ 080}+$$

$$+\frac{2\ 033\varepsilon^9\cos 9t}{8\ 182\ 428\ 094\ 955\ 520}+\frac{296\ 923\varepsilon^{10}\cos 9t}{6\ 284\ 104\ 776\ 925\ 839\ 360}-$$

$$-\frac{3\ 327\ 547\varepsilon^{11}\cos 9t}{402\ 182\ 705\ 723\ 253\ 719\ 040}+\frac{153\ 817\ 543\varepsilon^{12}\cos 9t}{413\ 673\ 640\ 172\ 489\ 539\ 584\ 000}+$$

$$+\frac{\varepsilon^5\cos 11t}{2\ 831\ 155\ 200}-\frac{\varepsilon^6\cos 11t}{27\ 179\ 089\ 920}+\frac{\varepsilon^7\cos 11t}{1\ 014\ 686\ 023\ 680}+\frac{23\varepsilon^8\cos 11t}{113\ 644\ 834\ 652\ 160}-$$

$$-\frac{391\varepsilon^9\cos 11t}{13\ 091\ 884\ 951\ 928\ 832}+\frac{517\varepsilon^{10}\cos 11t}{465\ 489\ 242\ 735\ 247\ 360}+$$

$$+\frac{189\ 377\varepsilon^{11}\cos 11t}{904\ 911\ 087\ 877\ 320\ 867\ 840}-\frac{547\ 795\varepsilon^{12}\cos 11t}{14\ 892\ 251\ 046\ 209\ 623\ 425\ 024}+$$

$$+\frac{\varepsilon^6\cos 13t}{951\ 268\ 147\ 200}-\frac{\varepsilon^7\cos 13t}{8\ 878\ 502\ 707\ 200}+\frac{\varepsilon^8\cos 13t}{324\ 699\ 527\ 577\ 600}+$$

$$+\frac{13\varepsilon^9\cos 13t}{20\ 780\ 769\ 764\ 966\ 400}-\frac{2\ 501\varepsilon^{10}\cos 13t}{26\ 931\ 877\ 615\ 396\ 454\ 400}+$$

$$+\frac{77\varepsilon^{11}\cos 13t}{22\ 161\ 087\ 866\ 383\ 368\ 192}+\frac{605\ 039\varepsilon^{12}\cos 13t}{930\ 765\ 690\ 388\ 101\ 464\ 064\ 000}+$$

$$+\frac{\varepsilon^7\cos 15t}{426\ 168\ 129\ 945\ 600}-\frac{\varepsilon^8\cos 15t}{3\ 896\ 394\ 330\ 931\ 200}+\frac{\varepsilon^9\cos 15t}{140\ 270\ 195\ 913\ 523\ 200}+$$

$$+\frac{29\varepsilon^{10}\cos 15t}{20\ 198\ 908\ 211\ 547\ 340\ 800}-\frac{173\varepsilon^{11}\cos 15t}{807\ 956\ 328\ 461\ 893\ 632\ 000}+$$

$$+\frac{223\varepsilon^{12}\cos 15t}{27\ 701\ 359\ 832\ 979\ 210\ 240\ 000}+$$

$$+\frac{\varepsilon^8\cos 17t}{245\ 472\ 842\ 848\ 665\ 600}-\frac{\varepsilon^9\cos 17t}{2\ 209\ 255\ 585\ 637\ 990\ 400}+$$

$$+\frac{\varepsilon^{10}\cos 17t}{78\ 551\ 309\ 711\ 572\ 992\ 000}+\frac{\varepsilon^{11}\cos 17t}{392\ 756\ 548\ 557\ 864\ 960\ 000}-$$

$$-\frac{271\varepsilon^{12}\cos 17t}{711\ 001\ 569\ 046\ 466\ 396\ 160\ 000}+$$

$$+\frac{\varepsilon^{9}\cos 19t}{176\ 740\ 446\ 851\ 039\ 232\ 000}-\frac{\varepsilon^{10}\cos 19t}{1\ 571\ 026\ 194\ 231\ 459\ 840\ 000}+$$

$$+\frac{\varepsilon^{11}\cos 19t}{55\ 300\ 122\ 036\ 947\ 386\ 368\ 000}+\frac{\varepsilon^{12}\cos 19t}{278\ 080\ 613\ 671\ 506\ 857\ 164\ 800}+$$

$$+\frac{\varepsilon^{10}\cos 21t}{155\ 531\ 593\ 228\ 914\ 524\ 160\ 000}-\frac{\varepsilon^{11}\cos 21t}{1\ 368\ 678\ 020\ 414\ 447\ 812\ 608\ 000}+$$

$$+\frac{\varepsilon^{12}\cos 21t}{47\ 779\ 305\ 439\ 922\ 541\ 821\ 952\ 000}+$$

$$+\frac{\varepsilon^{11}\cos 23t}{164\ 241\ 362\ 449\ 733\ 737\ 512\ 960\ 000}-\frac{\varepsilon^{12}\cos 23t}{1\ 433\ 379\ 163\ 197\ 676\ 254\ 658\ 560\ 000}$$

определяет второе приближение $h_2(\varepsilon)$ к функции $h(\varepsilon)$

$$h_2(\varepsilon)=1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{32}+\frac{\varepsilon^3}{512}-\frac{\varepsilon^4}{24\ 576}-\frac{11\varepsilon^5}{1\ 179\ 648}+\frac{49\varepsilon^6}{37\ 748\ 736}-\frac{55\varepsilon^7}{1\ 207\ 959\ 552}-$$

$$-\frac{83\varepsilon^8}{9\ 059\ 696\ 640}+\frac{12\ 121\varepsilon^9}{7\ 730\ 941\ 132\ 800}-\frac{114\ 299\varepsilon^{10}}{1\ 669\ 883\ 284\ 684\ 800}-$$

$$-\frac{192\ 151\varepsilon^{11}}{16\ 030\ 879\ 532\ 974\ 080}+\frac{83\ 513\ 957\varepsilon^{12}}{35\ 909\ 170\ 153\ 861\ 939\ 200}.$$

Для проверки точности найденного второго приближения к периодическому решению уравнения Матье и его собственной функции найдем невязки этого приближения в самом уравнении Матье

$$\Delta_2(\varepsilon)=\left|\left|y_2''(t,\varepsilon)+\Big(h_2(\varepsilon)+\varepsilon\cos 2t\Big)\cdot y_2''(t,\varepsilon)\right|\right|_{C[0;2\pi]},$$

а также сравним эти невязки с отклонениями

$$\Delta_r(\varepsilon)=\left|\left|y_h''(t,\varepsilon)+\Big(h_r(\varepsilon)+\varepsilon\cos 2t\Big)\cdot y_r''(t,\varepsilon)\right|\right|_{C[0;2\pi]},$$

соответствующими функции [2, с.235], [9]

$$h_h=1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{32}+\frac{\varepsilon^3}{512}-\frac{\varepsilon^4}{24\ 576},\ h_r=1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{32}+\frac{\varepsilon^3}{512}-\frac{\varepsilon^4}{24\ 576}-\frac{11\ \varepsilon^4}{1\ 179\ 648}$$

и решению уравнения Матье

$$y_r(t,\varepsilon)=\cos t+\frac{1}{16}\ \varepsilon\cos 3t+\frac{1}{768}\ \varepsilon^2\Big(-3\cos 3t+\cos 5t\Big)+\frac{1}{73\ 728}\ \varepsilon^3\Big(6\cos 3t-$$

$$-8\cos 5t+\cos 7t\Big)+\frac{1}{11\ 796\ 480}\ \varepsilon^4\Big(220\cos 3t+30\cos 5t-15\cos 7t+\cos 9t\Big),$$

полученной в монографии [2, 9]. Вторые приближения к периодическому решению уравнения Матье $y_2(t,\varepsilon)$ и его собственной функции $h_2(\varepsilon)$ значительно превосходят по точности ранее известные приближения [2, с.235]

$$\Delta_2(1,0) \approx 4,72\ 278 \times 10^{-13},\ \Delta_r(1,0) \approx 3,18\ 803 \cdot 10^{-5},$$

$$\Delta_2(0,5) \approx 5,43\ 239 \times 10^{-16},\ \Delta_r(0,5) \approx 9,89\ 857 \cdot 10^{-7},$$

а также полученные нами ранее приближения [6, 7, 10].

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV + 317 pp.
2. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
3. *Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д.* О параметрическом возбуждении электрических колебаний. Журн. техн. физики. – 1934. – № 3. – С. 5-29.
4. *Шмидт Г.* Параметрические колебания. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
5. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. – М.: Наука, 1987. – 328 с.
6. *Чуйко С.М., Старкова О.В.* Двухшаговая итерационная схема для построения функций Матье // Динамические системы. – 2009. – **26**. – С. 103-113.
7. *Bojchuk I.A., Starkova O.V., Chujko S.M.* Weakly perturbed nonlinear boundary-value problem in critical case // Studies of the University of Žilina. Math. series. – 2009. – **23**, № 1. – P. 1-8.
8. *Чуйко А.С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелинейные колебания. – 2005. – **8**, № 2. – С. 278-288.
9. *Хаяси Т.* Вынужденные колебания в нелинейных системах. – М.: Иностр. лит., 1957. – 204 с.
10. *Чуйко С.М., Старкова О.В.* Двухшаговая итерационная техника для построения функций Матье // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформатика. – **22**, № 1. – 2011. – С. 157-172.

S. M. Chuiko P. V. Kulish

Linear Noetherian boundary value problem in the case of parametric resonance.

We construct necessary and sufficient conditions for the existence of solution of Noether linear boundary value problem for a parametric excitation system of ordinary differential equations.

Keywords: *boundary value problem, differential equations, parametric excitation system.*

С. М. Чуйко, П. В. Куліш

Лінійна нетерова крайова задача у випадку параметричного резонансу.

Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язків лінійної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу.

Ключові слова: *крайова задача, диференціальні рівняння, параметричний резонанс.*

Славянский государственный педагогический ун-т
chujko-slav@inbox.ru

Получено 28.05.12