ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2012. Том 24

УДК 517.5

©2012. **И. М. Савостьянова**

ВЗВЕШЕННЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ НА ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Изучаются некоторые классы функций с нулевыми сферическими средними. Для таких классов получено описание в виде ряда по сферическим гармоникам.

Ключевые слова: *сферические средние, сферические гармоники.*

1. Введение. Пусть R^n – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $S = \{x \in R^n : |x| = 1\}, U = \{x \in R^n : |x| > 1\}$, f - непрерывная функция на U. Предположим, что при всех $y \in R^n, r > 1 + |y|$, справедливо равенство

$$\int_S f(y + r\sigma)P_j(y + r\sigma)d\sigma = 0, \tag{1}$$

где $d\sigma$ – нормированная поверхностная мера на S, $P_j(x)$ – произвольный однородный гармонический многочлен степени не выше j, $j \in \{0, 1, \dots\}$.

Функции, удовлетворяющие (1.1) при $j = 0$ изучались С. Хелгасоном [1], В.В. Волчковым [2] и другими авторами (см. [3], [4], [5]). В частности,хорошо известна теорема Хелгасона о носителе, утверждающая, что непрерывная функция с нулевыми интегралами по всем сферам, охватывающим шар $|x| \leq 1$, и убывающая быстрее любой степени на бесконечности, равна нулю при $|x| > 1$.

В данной работе получено описание пространства решений системы интегральных уравнений (1) в терминах разложения функции в ряд по сферическим гармоникам (см. теорему 1 ниже). Этот результат является обобщением теоремы, полученной Волчковым В.В. в работе [2] (для единичной весовой функции).

2. Формулировка основного результата. Пусть ρ, σ – полярные координаты в R^n (для всех $x \in R^n$ $\rho = |x|$, а если $x \neq 0$, то $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n) = x/\rho \in S$). Для любых $0 \leq \alpha < \beta \leq \infty$ обозначим $K_{\alpha,\beta} = \{x \in R^n : \alpha < |x| < \beta\}$. Пусть $\{Y_l^{(k)}\}$ – фиксированный ортонормированный базис в пространстве H_k сферических гармоник степени на S (см., например [6, с. 162]), a_k – размерность пространства H_k. При $k = 0$ имеем $a_k = 1$. Положим $Y_1^{(0)} = 1/\sqrt{\omega_{n-1}}$, где ω_{n-1} – площадь S. Любой функции $f \in C(K_{\alpha,\beta})$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{a_k} f_{kl}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma), \tag{2}$$

где $\alpha < \rho < \beta$,

$$f_{kl}(\rho) = \int_S f(\rho\sigma)\overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}d\sigma.$$

Обозначим через $S_{\alpha,\beta,j}$ множество непрерывных в $K_{\alpha,\beta}$ функций f, для которых выполнено равенство (1) при всех $y \in R^n$, $r > 0$ таких, что $r + |y| < \beta$, $\alpha + |y| < r$.

Теорема 1. *Пусть $f \in C(K_{\alpha,\beta})$. Тогда для того, чтобы $f \in S_{\alpha,\beta,j}$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты разложения (2) функции f имели вид*

$$f_{kl}(\rho) = 0, \quad 0 \le k \le j$$

$$f_{kl}(\rho) = \sum_{\nu=0}^{k-j-1} c_{k,l,\nu,j}\rho^{2\nu-n-k+2}, \quad k > j,$$

где $c_{k,l,\nu,j}$ – комплексные постоянные.

3. Вспомогательные построения. Как обычно, обозначим символами N, Z, Z_+ множества натуральных, целых и целых неотрицательных чисел, соответственно. Пусть $SO(n)$ – группа вращений R^n с нормированной мерой Хаара $d\tau$, $T^k(\tau)$ – сужение квазирегулярного представления группы $SO(n)$ на пространство H_k [7, с. 426], $\{t^k_{lp}\}$ – матрица представления $T^k(\tau)$, т.е.

$$Y^{(k)}_l(\tau^{-1}\sigma) = \sum_{p=1}^{a_k} t^k_{lp}(\tau)Y^{(k)}_p(\sigma), \quad \tau \in SO(n). \tag{3}$$

При $n = 2$ в дальнейшем будет использоваться следующий базис в H_k, $k \ge 1$:

$$Y^{(k)}_1(\sigma) = (\sigma_1 + i\sigma_2)^k, Y^{(k)}_2(\sigma) = (\sigma_1 - i\sigma_2)^k.$$

Если τ – вращение на угол θ в R^2, то для этого базиса $t^k_{11}(\tau) = e^{-ik\theta}$, $t^k_{22}(\tau) = e^{ik\theta}$, $t^k_{12}(\tau) = t^k_{21}(\tau) = 0$.

Если $n \ge 3$, то для коэффициентов разложения (2) при всех $1 \le l, p \le a_k$ имеет место равенство

$$f_{kl}(\rho)Y^{(k)}_p(\sigma) = a_k \int_{SO(n)} f(\tau^{-1}x)\overline{t^{(k)}_{lp}(\tau)}d\tau \tag{4}$$

(см. [7, с. 431]).

Введем на пространстве $C^1(\alpha, \beta)$ дифференциальный оператор d_k, $k \in Z$, действующий по правилу

$$(d_k f)(t) = f'(t) - \frac{k}{t}f(t), \quad f \in C^1(\alpha, \beta).$$

4. Свойства функций класса $S_{\alpha,\beta,j}$.

Лемма 1. *Пусть $f \in S_{\alpha,\beta,j}$. Тогда:*

а) $f(\tau x) \in S_{\alpha,\beta,j}$, $\forall\tau \in SO(n)$;

б) если $n = 2$ и $f = f(x_1, x_2)$, то функция $g = f(x_1, -x_2)$ принадлежит $S_{\alpha,\beta,j}$;

в) если $f \in C^1(K_{\alpha,\beta})$, то все частные производные первого порядка от f принадлежат $S_{\alpha,\beta,j}$.

Доказательство. Воспользовавшись инвариантностью меры $d\sigma$ относительно вращений τ, имеем

$$\int_S f(\tau y + \tau r\sigma) P_j(y + r\sigma) d\sigma = \int_S f(\tau y + r\xi) P_j(y + r\tau^{-1}\xi) d\xi =$$

$$= \int_S f(\tau y + r\xi)(P_j \circ \tau^{-1})(\tau y + r\xi) d\xi.$$

Поскольку $(P_j \circ \tau^{-1})$ – однородный гармонический многочлен степени не выше j (см. [7, с. 436]), из (1) получаем утверждение а).

Пусть теперь $n = 2$ и $f = f(x_1, x_2)$. Используя инвариантность меры $d\sigma$ относительно симметрий $(\sigma_1, \sigma_2) \to (\sigma_1, -\sigma_2)$, имеем

$$\int_S f(y_1 + r\sigma_1, -y_2 - r\sigma_2) P_j(y_1 + r\sigma_1, y_2 + r\sigma_2) d\sigma =$$

$$= \int_S f(y_1 + r\sigma_1, -y_2 + r\sigma_2) P_j(y_1 + r\sigma_1, y_2 - r\sigma_2) d\sigma =$$

$$= \int_S f(y_1 + r\sigma_1, -y_2 + r\sigma_2) Q_j(y_1 + r\sigma_1, -y_2 + r\sigma_2) d\sigma,$$

где $Q_j(x_1, x_2) = P_j(x_1, -x_2)$. Отсюда и (1) получаем утверждение б). Перейдем к доказательству утверждения в). Продифференцируем равенство (1) по каждой координате вектора $y \in R^n$. Получаем

$$\int_S \left(f(y + r\sigma) \frac{\partial P_j(y + r\sigma)}{\partial y_i} + P_j(y + r\sigma) \frac{\partial f(y + r\sigma)}{\partial y_i} \right) d\sigma = 0.$$

Поскольку $\frac{\partial P_j(y+r\sigma)}{\partial y_i}$ многочлен степени $j - 1$, то

$$\int_S f(y + r\sigma) \frac{\partial P_j(y + r\sigma)}{\partial y_i} d\sigma = 0.$$

Отсюда следует

$$\int_S P_j(y + r\sigma) \frac{\partial f(y + r\sigma)}{\partial y_i} d\sigma = 0,$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 2. *Пусть $f \in S_{\alpha,\beta,j}$. Тогда каждое слагаемое в разложении (2) принадлежит $S_{\alpha,\beta,j}$.*

Доказательство. Пусть $n = 2$. Разложим f в ряд Фурье:

$$f(\rho e^{i\varphi}) = \sum_{m \in Z} f_m(\rho) e^{im\varphi}.$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} f\left(\rho e^{i(\varphi+\alpha)}\right) e^{-ik\alpha} d\alpha = \sum_{m \in Z} f_m(\rho) \int_0^{2\pi} e^{im\varphi} e^{i(m-k)\alpha} d\alpha = 2\pi f_k(\rho) e^{ik\varphi}. \qquad (5)$$

Из равенства (1) и утверждения а) леммы 1 имеем

$$\int_0^{2\pi} f\left(ye^{i\alpha}+re^{i(\varphi+\alpha)}\right)P_j(y+re^{i\varphi})d\varphi=0.$$

Домножим данное равенство на $e^{-ik\alpha}$, проинтегрируем его по α на $[0;2\pi]$ и поменяем порядок интегрирования. Получаем

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(ye^{i\alpha}+re^{i(\varphi+\alpha)}\right)e^{-ik\alpha}d\alpha P_j(y+re^{i\varphi})d\varphi=0.$$

Учитывая (5), замечаем, что

$$\int_0^{2\pi} f_k(|y+re^{i\varphi}|)\left(\frac{y+re^{i\varphi}}{|y+re^{i\varphi}|}\right)^k P_j(y+re^{i\varphi})d\varphi=0.$$

Отсюда следует, что $f_k(\rho)e^{ik\varphi}\in S_{\alpha,\beta,j}$.

Пусть теперь $n\geq 3$. Применив к (1) утверждение а) леммы 1, при любом $\tau\in SO(n)$ получаем

$$\int_S f(\tau^{-1}y+r\tau^{-1}\sigma)P_j(y+r\sigma)d\sigma=0.$$

После умножения указаного равенства на $\overline{t^k_{lp}(\tau)}$, проинтегрируем его на $SO(n)$

$$\int_{SO(n)}\int_S f(\tau^{-1}y+r\tau^{-1}\sigma)\overline{t^k_{lp}(\tau)}P_j(y+r\sigma)d\sigma d\tau=0.$$

Поменяв порядок интегрирования и воспользовавшись формулой (4), получим утверждение леммы 2. $\square$

Лемма 3. *Пусть $f\in C^1(\alpha,\beta)$, $k\in Z_+$ – фиксировано и при некотором $Y\in H_k$ функция $f(\rho)Y(\sigma)$ принадлежит $S_{\alpha,\beta,j}$ Тогда:*

а) $(d_kf)(\rho)Y_l^{(k+1)}(\sigma)\in S_{\alpha,\beta,j}$, при всех $1\leq l\leq a_{k+1}$;

б) если $k\geq 1$, то $(d_{2-k-n}f)(\rho)Y_l^{(k-1)}(\sigma)\in S_{\alpha,\beta,j}$, при всех $1\leq l\leq a_{k-1}$.

Доказательство. Пусть $n=2$. По условию $f(\rho)e^{ik\varphi}\in C^1(\alpha,\beta)$. По лемме 1 имеем $(f(\rho)e^{ik\varphi})'_{x_1}\in S_{\alpha,\beta,j}$. Поскольку

$$(f(\rho)e^{ik\varphi})'_{x_1}=\left(f'(\rho)+k\rho^{-1}f(\rho)\right)e^{i(k-1)\varphi}+\left(f'(\rho)-k\rho^{-1}f(\rho)\right)e^{i(k+1)\varphi},$$

отсюда и из леммы 1 получаем утверждения а), б).

Пусть $n\geq 3$. Из условия и леммы 1 имеем $\frac{\partial(f(\rho)Y(\sigma))}{\partial x_1}\in S_{\alpha,\beta,j}$. Дифференцируя, находим

$$\frac{\partial(f(\rho)Y(\sigma))}{\partial x_1}=\frac{\partial(f(|x|))}{\partial x_1}\frac{Y(x)}{|x|^k}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{Y(x)}{|x|^k}\right)f(|x|)=$$

$$=f'(|x|)\frac{Y(x)}{|x|^k}\frac{x_i}{|x|}+f(|x|)\frac{Y'_{x_1}(x)}{|x|^k}-kf(|x|)\frac{Y(x)}{|x|^{k+1}}\frac{x_1}{|x|}=$$

$$= |x|^{-1} f(|x|) Y'_{x_1}\left(\frac{x}{|x|}\right) + (d_k f)(|x|)\frac{x_1}{|x|} Y\left(\frac{x}{|x|}\right) =$$

$$= \rho^{-1} f(\rho) U(\sigma) + (d_k f)(\rho)\sigma_1 Y(\sigma),$$

где $U(\sigma) = 0$ при $k = 0$ и $U(\sigma) = \rho^{1-k}\frac{\partial(\rho^k Y(\sigma))}{\partial x_1} \in H_{k-1}$ при $k \geq 1$. Имея ввиду, что при $k = 0$ $\sigma_1 Y(\sigma) \in H_1$, а при $k \geq 1$ $\sigma_1 Y(\sigma) = U_0(\sigma) + U_1(\sigma)$, где $U_0 \in H_{k-1}$, $U_1 \in H_{k+1}$ (см. лемму 3.4 [6, с. 253]), получаем

$$\frac{\partial(f(\rho)Y(\sigma))}{\partial x_1} = (d_k f)(\rho) U_1(\sigma) + \rho^{-1} f(\rho) U_2(\sigma) + f'(\rho) U_3(\sigma), \tag{6}$$

где $U_2, U_3 \in H_{k-1}$ при $k \geq 1$ и равны нулю при $k = 0$. Отсюда и лемм 1, 2 следует утверждение а) леммы 3. Докажем утверждение б). Положим

$$V_1(\sigma) = (\sigma_1 + i\sigma_2)^k, \quad V_m(\sigma) = (\sigma_1 + i\sigma_2)^{k-1}\sigma_m,$$

где $k \geq 1$, $2 \leq m \leq n-1$. Рассмотрим функцию $F_m(x) = f(\rho)V_m(\sigma)$, $m = 1, ..., n-1$. Учитывая, что $V_m \in H_k$, из леммы 2, получаем, что $F_m \in S_{\alpha,\beta,j}$. Тогда по лемме 1, имеем

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - i\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \sum_{m=2}^{n-1}\frac{\partial F_m}{\partial x_m} \in S_{\alpha,\beta,j}.$$

Из определения $F_m(x)$ находим

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - i\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \sum_{m=2}^{n-1}\frac{\partial F_m}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f(|x|)\left(\frac{x_1 + ix_2}{|x|}\right)^k\right) - i\frac{\partial}{\partial x_2}\left(f(|x|)\left(\frac{x_1 + ix_2}{|x|}\right)^k\right) +$$

$$+ \sum_{m=2}^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(f(|x|)\frac{x_m}{|x|}\left(\frac{x_1 + ix_2}{|x|}\right)^{k-1}\right) = \left(\frac{x_1 + ix_2}{|x|}\right)^{k-1} f'(|x|)\times$$

$$\times\left\{\left(\frac{x_1 + ix_2}{|x|}\right)\left(\frac{x_1 - ix_2}{|x|}\right) + \sum_{m=2}^{n-1}\frac{x_m^2}{|x|^2}\right\} + \left(\frac{x_1 + ix_2}{|x|}\right)^{k-1}\frac{f(|x|)}{|x|}\times$$

$$\times\left\{2k + n - 2 - k\frac{x_1^2 + x_2^2}{|x|^2} - k\sum_{m=2}^{n-1}\frac{x_m^2}{|x|^2}\right\} = (d_{2-k-n} f)(\rho)(\sigma_1 + i\sigma_2)^{k-1}.$$

Поскольку $(\sigma_1 + i\sigma_2)^{k-1} \in H_{k-1}$, из леммы 2, получаем утверждение б). $\Box$

5. Доказательство основного результата.

Лемма 4. *Пусть $k \in N$ – фиксировано, $g \in C(\alpha,\beta)$ и $g(\rho)Y(\sigma) \in S_{\alpha,\beta,j}$ для некоторого $Y \in H_k$. Тогда*

$$g(\rho) = \sum_{m=0}^{k-j-1} c_m \rho^{2m-n-k+2}, \tag{7}$$

где c_m – комплексные постоянные и сумма считается равной нулю при $0 \leq k \leq j$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $g \in C^\infty(\alpha, \beta)$. Пусть $0 \leq k \leq j$. Положим $j = k$ и $P_j(x) = \overline{Y(x)}$, где $Y(x) = |x|^k Y\left(\frac{x}{|x|}\right)$. Из условия имеем

$$\int_S g(|y + r\sigma|) Y\left(\frac{y + r\sigma}{|y + r\sigma|}\right) \overline{Y(y + r\sigma)} d\sigma = 0.$$

Положив $y = 0$, получаем

$$g(r) \int_S Y(\sigma) \overline{Y(\sigma)} d\sigma = 0.$$

Отсюда $g(r) = 0$.

Пусть теперь $k = j + 1$. Тогда по лемме 3 функция $(d_{1-n-j} g)(\rho) Y_l^{(j)}(\sigma)$ принадлежит $S_{\alpha,\beta,j}$. По доказанному $d_{1-n-j} g = 0$. Отсюда $g(\rho) = c\rho^{1-n-j}$, где c – константа. Продолжая аналогичные рассуждения, индукцией по k получаем, что g имеет вид (7) для $g \in C^\infty(\alpha, \beta)$.

Общий случай получается отсюда стандартным приемом сглаживания (см. [2, с. 1313]). □

Перейдем к доказательству основного результата.

Доказательство теоремы 1.

Необходимость. Пусть $f \in S_{\alpha,\beta,j}$. По лемме 2 имеем $f_{kl}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma) \in S_{\alpha,\beta,j}$. Применяя лемму 4 при $g(\rho) = f_{kl}(\rho)$, получаем

$$f_{kl}(\rho) = 0, \quad 0 \leq k \leq j$$

$$f_{kl}(\rho) = \sum_{\nu=0}^{k-j-1} c_{k,l,\nu,j} \rho^{2\nu-n-k+2}, \quad k > j,$$

что и требовалось. Докажем *достаточность.* Учитывая, что

$$H_k H_m \subset H_{k-m} + H_{k-m+2} + ... + H_{k+m}$$

(см.[4, гл. 9, § 2.3]), из условия и леммы 2.1.7 [3] получаем, что $f_{kl}(\rho) Y_p^{(k)}(\sigma) \in S_{\alpha,\beta,j}$ при всех $k \geq 0, 0 \leq l, p \leq a_k$. Положим

$$F(\tau) = \int_S f(\tau^{-1} y + r\tau^{-1}\sigma) P_j(y + r\sigma) d\sigma, \quad \tau \in SO(n).$$

Умножая это равенство на $t_{lp}^k(\tau)$ и интегрируя на $SO(n)$, из (4) получаем

$$\int_{SO(n)} F(\tau) \overline{t_{lp}^k(\tau)} d\tau = 0.$$

Учитывая полноту системы $t_{lp}^k(\tau)$ (см. [7, с. 435]) для $n \geq 3$ и указанные в п. 3) формулы для $t_{lp}^k(\tau)$ при $n = 2$, заключаем, что $F = 0$ на $SO(n)$. Отсюда $f \in S_{\alpha,\beta,j}$. Таким образом, теорема 1 доказана. □

1. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 735 с.
2. *Волчков В.В.* Сферические средние на евклидовых пространствах // Укр. мат. журн.– 1998. – Вып. 50, № 10. – С. 1310-1315.
3. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations.– Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 pp.
4. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. – London: Springer, 2009. – 671 pp.
5. *Rawat R., Srivastava.* Spherical means in annular regions in the n-dimensional real hyperbolic spaces, Proc. Indian Acad. Sci.(Math. Sci.) – 2011. – V. 121, № 3. – P. 311-325.
6. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 336 с.
7. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представлений групп. – М.: Наука, 1991. – 576 с.

I. M. Savostyanova

The weighed spherical averages on Euclid's spaces.

Some classes of functions with zero spherical averages are investigated. For such classes the description in the form of a number on spherical harmonics is obtained.

Keywords: *spherical averages, spherical harmonics.*

І. М. Савостьянова

Зважені сферичні середні на евклідових просторах.

Вивчаються деякі класи функцій з нульовими сферичними середніми. Для таких класів отримано опис у вигляді ряда за сферичними гармоніками.

Ключові слова: *сферичні середні, сферичні гармоніки.*

Донецкий национальный ун-т
cavost@mail.ru

Получено 15.12.11