

УДК 539.374

©2012. Н. И. Кодак, В. Н. Ложкин

## УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ С ДВУМЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ВЫРЕЗАМИ

Методом последовательных конформных отображений изучено упругопластическое равновесие неограниченной изотропной плоскости с двумя одинаковыми эллиптическими вырезами в случае идеальной пластичности. Плоскость сжимается равномерными усилиями вдоль и поперек линии центров вырезов. Контуры вырезов свободны от внешних воздействий. На неизвестной границе раздела упругой и пластической областей напряжения являются непрерывными. Определены условия, при которых имеет место начальный пластический охват контуров вырезов и при которых возможно наибольшее сближение пластических областей.

**Ключевые слова:** начальный пластический охват, упругая и пластическая области, неизвестная граница раздела, конформное отображение.

**1. Введение.** Решение упругопластических задач для изотропной плоскости с двумя круговыми вырезами при различных условиях пластичности описываются четырьмя аналитическими функциями. Две из них характеризуют напряженное состояние упругой части плоскости, две другие конформно отображают внешности единичных окружностей на внешности неупругих областей, полностью охватывающих контуры вырезов и несоприкасающихся друг с другом. Коэффициенты разложений функций определяются из условия непрерывности упругих и пластических напряжений на неизвестной границе их раздела методом малого параметра. Такой подход позволил получить приемлемые качественные результаты в случаях, когда контуры вырезов и внешние границы охватывающих их неупругих областей достаточно удалены друг от друга [1, 2].

В данной работе предложен и реализован метод последовательных конформных отображений для изучения возникновения и развития неупругих областей в неограниченной изотропной плоскости с двумя одинаковыми эллиптическими вырезами от начального пластического охвата их контуров в случае идеальной пластичности. В качестве исходного приближения берется отображение, построенное методом малого параметра для плоскости с двумя круговыми вырезами [1]. Из условий непрерывности упругих и пластических напряжений на подлежащей определению границе их раздела методом коллокации находятся коэффициенты разложений функций, характеризующих напряженное состояние упругой части плоскости, с последующим уточнением коэффициентов отображений для построения следующего приближения решения задачи.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим неограниченную изотропную плоскость с двумя одинаковыми эллиптическими вырезами с полуосями  $a_1$  и  $a_2$ . Полуоси  $a_1$  лежат на оси  $Ox_1$ , а центры вырезов расположены на расстоянии  $L$  от начала координат  $Ox_1x_2$ . Плоскость сжимается усилиями  $q_1$  вдоль и  $q_2$  поперек линии центров.

Расстояние между центрами вырезов и интенсивность сжимающих усилий таковы, что в плоскости возникают неупругие области. Они полностью охватывают контуры вырезов и не соприкасаются друг с другом. Их внешние границы находятся на расстоянии  $H$  по оси  $Ox_1$ . Пусть

$$a_1 = (1 + \delta)R, \quad a_2 = (1 - \delta)R, \quad |\delta| < 1; \quad L = a_1 l; \quad H = a_1 h, \quad (1)$$

где  $R$  – линейный параметр, характеризующий размеры вырезов.

Геометрическая и силовая симметрия упругопластического равновесия плоскости позволяют исследовать возникновение и развитие неупругих областей около одного-правого выреза.

Введем безразмерные координаты:

$$z = \xi_1 + i\xi_2 = R^{-1}(x_1 + ix_2), \quad z - l = r \exp(i\theta); \quad \eta_n = a_1^{-1}x_n, \quad n = 1, 2. \quad (2)$$

Напряжения в правой пластической области удовлетворяют уравнениям равновесия, соотношению Мизеса и условиям на контуре выреза [3]

$$\begin{aligned} r\partial\sigma_r^p/\partial r + \sigma_r^p - \sigma_\theta^p + \partial\tau_{r\theta}^p/\partial\theta = 0, \quad r\partial\tau_{r\theta}^p/\partial r + 2\tau_{r\theta}^p + \partial\sigma_\theta^p/\partial\theta = 0; \\ (\sigma_r^p - \sigma_\theta^p)^2 + (2\tau_{r\theta}^p)^2 = 4k^2; \quad r = r_0: \quad \sigma_\nu^p = \tau_\nu^p = 0; \\ r_0(\theta) = (1 - \delta^2)(1 - 2\delta \cos 2\theta + \delta^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\nu$  – внешняя нормаль к эллиптическому контуру выреза,  $k$  – постоянная, имеющая размерность напряжений.

Напряжения в упругой части плоскости удовлетворяют уравнениям равновесия, соотношению совместности и условиям внешнего нагружения [4]:

$$\begin{aligned} \partial\sigma_{11}^e/\partial\xi_1 + \partial\tau_{12}^e/\partial\xi_2 = 0, \quad \partial\tau_{12}^e/\partial\xi_1 + \partial\sigma_{22}^e/\partial\xi_2 = 0; \\ (\partial^2/\partial\xi_1^2 + \partial^2/\partial\xi_2^2)(\sigma_{11}^e + \sigma_{22}^e) = 0; \quad |z| \rightarrow \infty: \quad \sigma_{11}^e = -q_1; \quad \sigma_{22}^e = -q_2, \quad \tau_{12}^e = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

На подлежащей определению границе раздела упругой и пластической областей напряжения являются непрерывными.

**3. Аналитическое решение задачи.** Решение задачи (3) не зависит от внешнего нагружения плоскости. Построенное методом малого параметра, оно имеет вид

[3]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^p, \sigma_\theta^p, \tau_{r\theta}^p &= k \sum_{n=0} \delta^n (\sigma_r^{(n)}, \sigma_\theta^{(n)}, \tau_{r\theta}^{(n)}); \\
 \sigma_r^{(0)} &= -2 \ln r, \quad \sigma_\theta^{(0)} = -2(1 + \ln r), \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = 0; \\
 \sigma_r^{(1)} = \sigma_\theta^{(1)} &= 2r^{-1} (\cos \sqrt{3} \ln r - \sqrt{3} \sin \sqrt{3} \ln r) \cos 2\theta, \\
 \tau_{r\theta}^{(1)} &= 4r^{-1} \cos(\sqrt{3} \ln r) \sin 2\theta; \\
 \sigma_r^{(2)} &= (1/2) \{ 1 - r^{-2} (4 + \cos 2\sqrt{3} \ln r - \sqrt{3} \sin 2\sqrt{3} \ln r) - \\
 &\quad - [r^{-1} (\cos \sqrt{15} \ln r - \sqrt{15} \sin \sqrt{15} \ln r) - \\
 &\quad - r^{-2} (8 + 11 \cos 2\sqrt{3} \ln r - 7\sqrt{3} \sin 2\sqrt{3} \ln r)] \cos 4\theta \}, \\
 \sigma_\theta^{(2)} &= (1/2) \{ 1 + r^{-2} (4 + 7 \cos 2\sqrt{3} \ln r + \sqrt{3} \sin 2\sqrt{3} \ln r) - \\
 &\quad - [r^{-1} (\cos \sqrt{15} \ln r - \sqrt{15} \sin \sqrt{15} \ln r) - \\
 &\quad - r^{-2} (3 \cos 2\sqrt{3} \ln r - 7\sqrt{3} \sin 2\sqrt{3} \ln r)] \cos 4\theta \}, \\
 \tau_{r\theta}^{(2)} &= -[2r^{-1} \cos \sqrt{15} \ln r - r^{-2} (1 + 7 \cos 2\sqrt{3} \ln r + \sqrt{3} \sin 2\sqrt{3} \ln r)] \sin 4\theta.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Напряженное состояние упругой части плоскости описывается функциями  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  [1], являющимися решением задачи (4),

$$\begin{aligned}
 \Phi(z), \Psi(z) &= -\alpha/2, \beta + \sum_{n=1} (a_n, b_n) \psi_n(z), \\
 \psi_n(z) &= \zeta^{-(n+1)} (z-l) + (-1)^{n+1} \zeta_1^{-(n+1)} (z+l),
 \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\alpha = (2k)^{-1} (q_1 + q_2), \quad \beta = (2k)^{-1} (q_1 - q_2). \tag{7}$$

Функции  $\zeta(z-l)$  и  $\zeta_1(z+l)$  находятся из равенств [1]:

$$\begin{aligned}
 z-l &= r_0 \omega(\zeta), \quad \omega(\zeta) = \sum_{n=-1} c_{n+2} \zeta^{-n}, \quad c_1 = 1; \quad \zeta = \rho \exp(i\varphi); \\
 z+l &= r_0 \omega_1(\zeta_1), \quad \omega_1(\zeta_1) = -\omega(-\zeta_1) = \sum_{n=-1} (-1)^{n+1} c_{n+2} \zeta_1^{-n}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь  $z-l = r_0 \omega(\zeta)$  и  $z+l = r_0 \omega_1(\zeta_1)$  конформно отображают внешности окружностей  $|\zeta| = 1$  и  $|\zeta_1| = 1$ , соответственно, на внешности правой и левой пластических областей.

Для упругих напряжений справедливы равенства [1]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^e + \sigma_{22}^e &= 2k [\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \\
 \sigma_{22}^e - \sigma_{11}^e + 2i\tau_{12}^e &= 2k [(\bar{z} - z) \Phi'_z(z) + \Psi(z)].
 \end{aligned} \tag{9}$$

В окрестности правой пластической области функции (6) принимают вид:

$$\begin{aligned}
 \Phi(\zeta), \Psi(\zeta) &= -\alpha/2, \beta + \sum_{n=1} (a_n, b_n) \psi_n(\zeta), \\
 \psi_n(\zeta) &= \zeta^{-(n+1)} + (-1)^{n+1} \zeta_1^{-(n+1)}(\zeta),
 \end{aligned} \tag{10}$$

где функция  $\zeta_1(\zeta)$  находится из равенства

$$\zeta_1(\zeta) = 2l/r_0 + \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}[\zeta^{-n} + (-1)^n \zeta_1^{-n}(\zeta)]. \quad (11)$$

Тогда соотношения (9) переписутся так:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^e - i\tau_{\rho\varphi}^e &= k[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - \Omega_1(\zeta, \bar{\zeta})\Phi'_\zeta(\zeta) - \Omega_2(\zeta, \bar{\zeta})\Psi(\zeta)], \\ \sigma_\rho^e + \sigma_\varphi^e &= 2k[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}], \end{aligned} \quad (12)$$

Коэффициенты  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$ ,  $r_0$  разложений (6), (8) находятся из условий непрерывности упругих и пластических напряжений на границе их раздела

$$z - l = r_0\omega(\sigma), \quad \sigma = \exp(i\varphi) : \sigma_\rho^e = \sigma_\rho^p, \quad \sigma_\varphi^e = \sigma_\varphi^p, \quad \tau_{\rho\varphi}^e = \tau_{\rho\varphi}^p. \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^p &= (1/2)[\sigma_r^p + \sigma_\theta^p - (\sigma_r^p - \sigma_\theta^p) \operatorname{Re} \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma}) - 2\tau_{r\theta}^p \operatorname{Im} \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma})], \\ \sigma_\varphi^p &= (1/2)[\sigma_r^p + \sigma_\theta^p + (\sigma_r^p - \sigma_\theta^p) \operatorname{Re} \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma}) + 2\tau_{r\theta}^p \operatorname{Im} \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma})], \\ \tau_{\rho\varphi}^p &= -(1/2)[(\sigma_r^p - \sigma_\theta^p) \operatorname{Im} \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma}) - 2\tau_{r\theta}^p \operatorname{Re} \Omega_3(\sigma, \bar{\sigma})], \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\sigma_r^p$ ,  $\sigma_\theta^p$ ,  $\tau_{r\theta}^p$  принимают значения (5), в которых надо положить

$$r = r_0|\omega(\sigma)|, \quad \cos 2n\theta + i \sin 2n\theta = |\omega(\sigma)|^{-2n} \omega^{2n}(\sigma), \quad n = 1, 2. \quad (15)$$

Функции  $\Omega_n(\zeta, \bar{\zeta})$ , входящие в выражения (12), (14), имеют вид:

$$\begin{aligned} \Omega_1(\zeta, \bar{\zeta}) &= \zeta[\overline{\omega(\zeta)} - \omega(\zeta)]/\bar{\zeta}\overline{\omega'(\zeta)}, \quad \Omega_2(\zeta, \bar{\zeta}) = \zeta\omega'(\zeta)/\bar{\zeta}\overline{\omega'(\zeta)}, \\ \Omega_3(\zeta, \bar{\zeta}) &= \zeta\omega'(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}/\bar{\zeta}\overline{\omega'(\zeta)}\omega(\zeta). \end{aligned} \quad (16)$$

С учетом равенств (12) условия (13) можно переписать так:

$$\Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} - \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma})\Phi'_\zeta(\sigma) - \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma})\Psi(\sigma) = k^{-1}(\sigma_\rho^p - i\tau_{\rho\varphi}^p), \quad (17)$$

$$\Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} = (2k)^{-1}(\sigma_\rho^p + \sigma_\varphi^p) = (2k)^{-1}(\sigma_r^p + \sigma_\theta^p). \quad (18)$$

**4. Численное решение задачи.** Решение задачи строится методом последовательных конформных отображений. Для фиксированных значений параметров  $l$  и  $\beta$  в качестве исходного приближения берется отображение, найденное методом малого параметра для плоскости с двумя круговыми отверстиями [1],

$$\begin{aligned} z - l &= r_0\omega(\zeta), \quad \omega(\zeta) = 1 + c_2 + c_3\zeta^{-1} + c_4\zeta^{-2} + c_5\zeta^{-2}(\zeta - \zeta_0)^{-1}, \\ r_0 &= r_p \exp\{-\beta\delta^2 + [(1 + \beta)^2 + (15/2)\beta^2]\delta^4\}, \\ r_p &= \exp(\alpha/2 - 1/2), \quad \delta = r_p/2l - \beta(r_p/2l)^3, \\ c_2 &= 2(1 - \beta)\beta\delta^3, \quad c_3 = -\beta + (1 + \beta^2)\delta^2 - [8(1 + \beta)^3 - 6(1 + \beta)]\delta^4, \\ c_4 &= -2(1 + \beta)(1 + 2\beta)\delta^3, \quad c_5 = 3(1 + \beta)(1 + 3\beta)\delta^4, \quad \zeta_0 = 2\beta\delta^3. \end{aligned} \quad (19)$$

Затем уточняется значение параметра  $\alpha_n$ , при котором возможен начальный пластический охват контура правого выреза, когда внешняя граница неупругой области касается этого контура.

Строится упругое решение для полученного отображения. Из условия (17) методом коллокации находятся коэффициенты разложений (6). Для этого его перепишем так:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1} a_n [2Re \psi_n(\sigma) - Re \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma}) Re \psi'_n(\sigma) + Im \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma}) Im \psi'_n(\sigma)] - \\ & - \sum_{n=1} b_n [Re \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) \psi_n(\sigma) - Im \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) Im \psi_n(\sigma)] = \\ & = \alpha + \beta Re \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) + k^{-1} \sigma_\rho^p, \\ & \sum_{n=1} a_n [Im \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma}) Re \psi'_n(\sigma) + Re \Omega_1(\sigma, \bar{\sigma}) Im \psi'_n(\sigma)] + \\ & + \sum_{n=1} b_n [Im \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) Re \psi_n(\sigma) + Re \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) Im \psi_n(\sigma)] = \\ & = -\beta Im \Omega_2(\sigma, \bar{\sigma}) + k^{-1} \tau_{\rho\varphi}^p. \end{aligned} \quad (20)$$

С учетом равенств (5) запишем условие (18) в следующем виде

$$\begin{aligned} \ln |r_0 \omega(\sigma)|^2 &= (1 + \mu)^{-1} [\alpha - 1 - 2 \sum_{n=1} a_n Re \psi_n(\sigma) + \\ & + \mu \ln |r_0 \omega(\sigma)|^2 + (1/2k)(\sigma_r^p + \sigma_\theta^p) - (1/2)(\sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)})]. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь  $\mu$  – произвольная постоянная. Отображение (8) представим так:

$$\begin{aligned} r_0 \omega(\zeta) &= \omega_0(\zeta) + \omega_h(\zeta), \\ \omega_0(\zeta) &= \sum_{n=-1} t_{n+2} \zeta^{-n}, \quad t_n = r_0 c_n, \quad \omega_h(\zeta) = \sum_{n=-1} h_{n+2} \zeta^{-n}. \end{aligned} \quad (22)$$

Постоянные  $h_n$  предполагаются малыми величинами. С учетом того, что

$$\ln |r_0 \omega(\sigma)|^2 \approx \ln |\omega_0(\sigma)|^2 + |\omega_0(\sigma)|^{-2} [\overline{\omega_0(\sigma)} \omega_h(\sigma) + \omega_0(\sigma) \overline{\omega_h(\sigma)}],$$

условие (21) принимает вид

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{n=-1} h_{n+2} [Re \omega_0(\sigma) \cos n\varphi - Im \omega_0(\sigma) \sin n\varphi] = \\ & = (1 + \mu)^{-1} |\omega_0(\sigma)|^2 [\alpha - 1 - 2 \sum_{n=1} a_n Re \psi_n(\sigma) - \ln |\omega_0(\sigma)|^2 + \\ & + (1/2)\delta(\sigma_r^{(1)} + \sigma_\theta^{(1)}) + (1/2)\delta^2(\sigma_r^{(2)} + \sigma_\theta^{(2)})]. \end{aligned} \quad (23)$$

Из него методом коллокации находятся постоянные  $h_n$ . Новые коэффициенты  $r_0$  и  $c_n$  вычисляются так:

$$r_0 = t_1 + h_1, \quad c_n = (t_1 + h_1)^{-1} (t_n + h_n). \quad (24)$$

Построение приближений заканчивается при совпадении двух последних внешних границ правой пластической области с заданной точностью. Затем осуществляется переход с заданным шагом к новому значению параметра  $\alpha$ , вычисляется коэффициент  $r_0$  по формулам (19), постоянные  $c_n$  сохраняются от предыдущего шага. Определяющим критерием решения задачи принято выполнение условий (13). Сходимость приближений обеспечивается подбором постоянной  $\mu$ , входящей в уравнение (23).

С увеличением параметра  $\alpha$  при фиксированном значении  $\beta$  последующая пластическая область полностью охватывает предыдущую.

Результаты расчетов для  $\delta = -0.1$ , когда малые полуоси эллиптических вырезов лежат на оси  $Ox_1$ , сведены в таблице 1.

Таблица 1

$l$	1.75			2.0			3.0			4.0		
$\beta$	$\alpha_n$	$\alpha_k$	h									
-0.20				1.34	1.349	0.082	1.29	2.073	0.090	1.25	2.6105	0.090
-0.15				1.25	1.405	0.084	1.19	2.128	0.090	1.20	2.6650	0.093
-0.10				1.20	1.461	0.092	1.09	2.184	0.070	1.10	2.7200	0.090
-0.05	1.26	1.2850	0.093	1.15	1.518	0.089	1.09	2.239	0.095	1.10	2.7750	0.097
0.0	1.26	1.3435	0.083	1.15	1.575	0.092	1.15	2.295	0.098	1.21	2.8307	0.087
0.05	1.28	1.4010	0.089	1.22	1.633	0.085	1.29	2.352	0.084	1.29	2.8867	0.095
0.10	1.32	1.4600	0.081	1.34	1.691	0.084	1.41	2.409	0.078	1.47	2.9430	0.092
0.15	1.45	1.5180	0.089	1.45	1.749	0.089	1.57	2.466	0.084	1.55	3.0000	0.081
0.20				1.59	1.808	0.084	1.65	2.524	0.074	1.70	3.0569	0.095
0.25				1.72	1.867	0.085	1.80	2.582	0.074	1.85	3.1147	0.092
0.30							1.96	2.640	0.091	2.05	3.1730	0.088
0.35							2.15	2.699	0.089	2.23	3.2320	0.075

В ней для различных  $l$  и  $\beta$  приведены:

- значения параметра  $\alpha_n$ , при котором имеет место начальный пластический охват контуров вырезов;
- значения параметра  $\alpha_k$ , до которого доведен счет;
- значения параметра  $h$ , соответствующего величинам  $\alpha_k$  и  $\beta$ .

На рисунках 1-4 в системе безразмерных координат  $O\eta_1\eta_2$  (2) приведены внешние границы правых пластических областей, соответствующих постоянным  $\alpha_n$  и  $\alpha_k$ , для таких значений  $l$  и  $\beta$ :

Установлено, что при

$$l = 1.75, \quad \beta < -0.05; \quad l = 2.0, \beta < -0.20$$

раздельный пластический охват контуров вырезов отсутствует. В этих случаях соприкосновение пластических областей происходит до полного охвата ими своих контуров вырезов.

Согласно обозначений (7) внешние усилия  $q_1, q_2$  выражаются так:

$$q_1 = (\alpha + \beta)k, \quad q_2 = (\alpha - \beta)k. \tag{25}$$

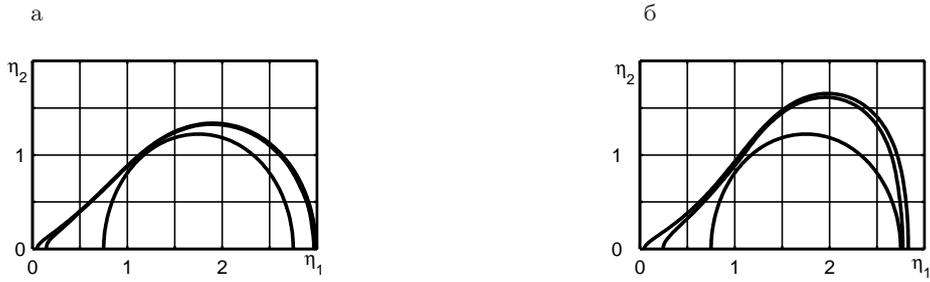


Рис. 1. а)  $l = 1.75, \beta = -0.05$ ; б)  $l = 1.75, \beta = 0.15$

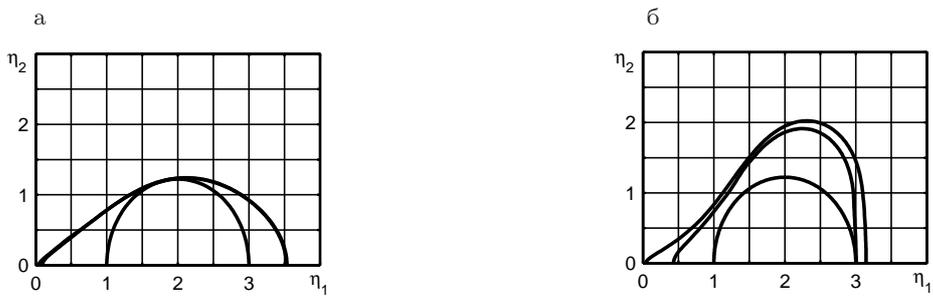


Рис. 2. а)  $l = 2.0, \beta = -0.20$ ; б)  $l = 2.0, \beta = 0.25$



Рис. 3. а)  $l = 3.0, \beta = -0.20$ ; б)  $l = 3.0, \beta = 0.35$



Рис. 4. а)  $l = 4.0, \beta = -0.20$ ; б)  $l = 4.0, \beta = 0.35$

Аналогичные результаты для  $\delta = 0.1$ , когда большие полуоси эллиптических вырезов лежат на оси  $Ox_1$ , сведены в таблице 2. На рисунках 5-8 приведены внешние

Таблица 2

$l$	1.75			2.0			3.0			4.0		
	$\alpha_n$	$\alpha_k$	h									
-0.30							2.29	2.3620	0.094	2.24	2.9584	0.097
-0.25							2.05	2.4160	0.072	2.01	3.0122	0.097
-0.20							1.87	2.4691	0.097	1.85	3.0665	0.094
-0.15							1.70	2.5238	0.081	1.66	3.1211	0.096
-0.10				1.63	1.693	0.093	1.56	2.5785	0.081	1.54	3.1763	0.096
-0.05				1.46	1.747	0.094	1.40	2.6334	0.091	1.40	3.2321	0.086
0.0	1.39	1.5000	0.086	1.35	1.802	0.089	1.27	2.6891	0.091	1.25	3.2881	0.093
0.05	1.30	1.5550	0.082	1.25	1.857	0.089	1.18	2.7454	0.090	1.17	3.3447	0.096
0.10	1.20	1.6095	0.092	1.14	1.913	0.085	1.11	2.8020	0.093	1.10	3.4020	0.089
0.15	1.18	1.6650	0.093	1.14	1.969	0.089	1.10	2.8600	0.082	1.10	3.4596	0.095
0.20	1.16	1.7220	0.086	1.14	2.026	0.090	1.17	2.9180	0.085	1.23	3.5180	0.095
0.25	1.20	1.7780	0.098	1.22	2.084	0.085	1.27	2.9765	0.094	1.30	3.5770	0.093
0.30	1.30	1.8370	0.087	1.30	2.142	0.091	1.38	3.0360	0.094	1.39	3.6366	0.094
0.35	1.40	1.8960	0.085	1.41	2.201	0.096	1.47	3.0963	0.092	1.50	3.6970	0.094

границы правых пластических областей, соответствующих постоянным  $\alpha_n$  и  $\alpha_k$ , для таких значений  $l$  и  $\beta$ :



Рис. 5. а)  $l = 1.75, \beta = 0.0$ ; б)  $l = 1.75, \beta = 0.35$



Рис. 6. а)  $l = 2.0, \beta = -0.10$ ; б)  $l = 2.0, \beta = 0.35$



Рис. 7. а)  $l = 3.0, \beta = -0.30$ ; б)  $l = 3.0, \beta = 0.35$



Рис. 8. а)  $l = 4.0, \beta = -0.30$ ; б)  $l = 4.0, \beta = 0.35$

Установлено, что при

$$l = 1.75, \quad \beta < 0.0; \quad l = 2.0, \quad \beta < -0.10; \quad l = 3.0, \quad \beta < -0.30$$

раздельный пластический охват контуров вырезов отсутствует.

Точность удовлетворения условиям непрерывности напряжений (13) при начальном пластическом охвате контуров вырезов составила  $10^{-4}$ , а в конце счета –  $10^{-3}$ .

**5. Выводы.** Проанализировав данные, приведенные в таблицах, можно утверждать, что метод последовательных конформных отображений в сочетании с методом коллокации позволил исследовать упругопластическое равновесие неограниченной изотропной плоскости с двумя одинаковыми эллиптическими вырезами для расстояний между их контурами от  $(3/2)a_1$  и сблизить внешние границы охватывающих эти контуры пластических областей до расстояний, меньших  $(1/10)a_1$ . Здесь  $a_1$  – полуоси эллиптических вырезов, лежащие на оси  $Ox_1$ .

Абсолютная точность выполнения условия непрерывности упругих и пластических напряжений на границе их раздела не превышает  $10^{-3}$ .

Определены значения геометрических и силовых параметров рассматриваемой задачи, при которых раздельный пластический охват контуров вырезов отсутствует, а соприкосновение пластических областей происходит до полного охвата ими своих контуров вырезов.

1. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. – Киев: Вища школа, 1975. – 227 с.

2. Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Упругопластическая задача. – Новосибирск: Наука, 1983. – 238 с.
3. Иелев Д.Д., Ершов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. – Москва: Наука, 1978. – 208 с.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, Москва: Наука, 1966. – 707 с.

**N. I. Kodak, V. N. Lozhkin**

**Elastoplastic state of an isotropic plane with two elliptical cut outs.**

By method of successive conformal mapping elastoplastic equilibrium of an infinite isotropic plane with two same elliptical cut outs in the case of an ideal plasticity is studied. The plane by a uniform load along and across the line of centers of the cut outs is compressed. Their contours from external force are free. Stress on an unknown border of separating of the elastic and plastic domains are continuous. Efforts, at which the initial plastic inclusion of contours of the cut outs take place and at which the maximum convergence of plastic domains is possible, are determined.

**Keywords:** *initial plastic inclusion, elastic and plastic domains, unknown border of separating, conformal mapping.*

**Н. І. Кодак, В. М. Ложкін**

**Пружнопластичний стан ізотропної площини з двома еліптичними вирізами.**

Методом послідовних конформних відображень вивчено пружнопластичну рівновагу необмеженої ізотропної площини з двома однаковими еліптичними вирізами у випадку ідеальної пластичності. Площина стискається рівномірними зусиллями вздовж і впоперек лінії центрів вирізів. Контури вирізів вільні від зовнішніх впливів. На невідомій межі розділу пружної і пластичної областей напруження є неперервними. Знайдено умови, при яких має місце початкове пластичне охоплення контурів вирізів та при яких можливе найбільше зближення пластичних областей.

**Ключові слова:** *початкове пластичне охоплення, пружна і пластична області, невідома межа розділу, конформне відображення.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк  
lozhkin@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 12.03.12