УДК 517.95

©2012. **В. П. Бурский, Е. В. Лесина**

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В настоящей работе рассматривается проблема разрешимости неоднородной задачи Неймана в ограниченной области для скалярного неправильно эллиптического дифференциального уравнения с комплексными коэффициентами. Рассмотрен случай общего уравнения второго порядка без младших членов с постоянными комплексными коэффициентами в модельной области – единичном круге. Решен вопрос характеризации классов граничных данных, для которых существует единственное решение в обычном пространстве Соболева. Такими классами в типичном случае являются пространства функций с экспоненциальным убыванием коэффициентов Фурье.

Ключевые слова: *неправильно эллиптический дифференциальный оператор, весовое пространство Соболева, ряд Фурье, задача Неймана, символ дифференциального оператора.*

1. Введение. В настоящее время граничные задачи для линейных эллиптических уравнений и систем изучаются в современной литературе только для правильно эллиптического случая, поскольку после примеров А.В. Бицадзе положение дел с граничными задачами для неправильно эллиптического случая представляется весьма туманным. Напомним, что еще в 1948г. А.В. Бицадзе привел пример неправильно эллиптического уравнения $d^2u/d\overline{z}^2 = 0$, $z = x_1 + ix_2$, для которого однородная задача Дирихле в единичном круге K имеет счетное число линейно независимых полиномиальных решений $u_N(z) = (1 - z\overline{z})\, z^N$ (см. [1]). Позже им же был найден еще один пример уравнения с тем же свойством, но уже с простыми нулями символа (см. [2]). В последней работе показано также, что задача Неймана в круге K

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = t\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{t}\frac{\partial u}{\partial \bar{t}} = 0, \quad t = e^{i\theta},$$

так же, как и задача Дирихле, имеет счетное множество линейно независимых решений вида

$$u(z) = \psi(z) - \frac{\overline{z}}{z}\int_0^z \tau^2\psi'(\tau)\, d\tau,$$

где $\psi(z)$ – произвольная в круге K аналитическая функция, которая непрерывна в $\overline{K}$ вместе с первой производной.

В настоящей работе мы рассмотрим неоднородную задачу Неймана (см. ниже задачу (7)) для линейного неправильно эллиптического уравнения второго порядка (1) в модельной области – круге – и получим разрешимость этой задачи в обычной соболевской шкале пространств, при этом правые части в граничных условиях должны быть из некоторого класса аналитических на ∂K функций.

Граничные задачи для неправильно эллиптических уравнений в ограниченной области изучались в работе одного из авторов [7], где получен критерий фредгольмовости общей дифференциальной граничной задачи для скалярного линейного неправильно эллиптического уравнения любого порядка в ограниченной области с гладкой границей. Применение этого критерия к задаче Дирихле и задаче Неймана показывает их нефредгольмовость. Задача Дирихле изучалась нами в работе [8]. Изучение неоднородной задачи Неймана для неправильно эллиптических уравнений в известной нам литературе не предпринималось. В книге [6] один из авторов настоящей работы доказал критерий нарушения единственности (критерий непостоянства) решения задачи Неймана в единичном круге для общего уравнения (1), и в его же работе [5], и там же в книге [6] анонсированы результаты о разрешимости задачи Неймана (7) в обычной соболевской шкале пространств и указан путь для их доказательства. В настоящей работе мы приводим доказательства результатов по разрешимости, исправляя ошибку в формулировках.

Настоящая работа продолжает исследование некорректных граничных задач для неправильно эллиптических уравнений, начатое в статье [8], где нами была доказана разрешимость задачи Дирихле для этого же уравнения в обычной соболевской шкале пространств. В ней, в зависимости от свойств числа $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$, называемого углом между характеристиками уравнения (2), были рассмотрены три случая:

1) угол φ_0 вещественен и π-рационален, т.е. $\varphi_0/\pi \in \mathbb{Q}$;

2) угол φ_0 вещественен и π-иррационален;

3) угол φ_0 невещественен.

Случай **1)** – это случай нарушения единственности решения задачи Дирихле [3], в этом случае имеется счетное число линейно независимых решений однородной задачи Дирихле. В случаях **2)** и **3)** пришлось вводить пространства аналитических правых частей для разрешимости в обычной соболевской шкале пространств, причем на свойства задачи Дирихле в случае **2)**, в отличие от случая **3)**, оказывали влияние теоретико-числовые свойства числа φ_0, аналогично тому, как это происходит со свойствами задачи Дирихле для гиперболического уравнения (2) с вещественными коэффициентами (см., например, [6]). Ниже мы убедимся, что этот эффект проявляется и при исследовании задачи Неймана.

Напомним определение правильно эллиптического оператора. Линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L} = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$ называется эллиптическим в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, если его старший символ $l(x,\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \neq 0$ для всех $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, и называется правильно (или собственно) эллиптическим в открытой или замкнутой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, если m чётно, $m = 2k$, и для любого $x \in \Omega$, для каждой пары линейно независимых действительных векторов ξ и η среди корней полинома $l(x,\xi + t\eta)$ от параметра t имеется ровно k корней $t_+^1, t_+^2, \dots, t_+^k$ с положительной мнимой частью $\operatorname{Im} t_+^j > 0$ и k корней $t_-^1, t_-^2, \dots, t_-^k$ с отрицательной мнимой частью $\operatorname{Im} t_-^j < 0$.

Ясно, что каждый правильно эллиптический линейный дифференциальный оператор – эллиптический. Отметим, что при $n \geq 3$ каждый эллиптический линейный дифференциальный оператор является правильно эллиптическим, но при $n = 2$ это не так (пример: оператор Коши-Римана $\partial/\partial\bar{z} = (\partial/\partial x - i\partial/\partial y)/2$), и что то же справедливо для всех n в случае, когда коэффициенты оператора вещественны ([10], см. также [9]).

2. Постановка задачи. Для случая $n = 2$ мы будем рассматривать общее уравнение второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами без младших членов

$$au_{x_1x_1} + bu_{x_1x_2} + cu_{x_2x_2} = 0. \tag{1}$$

Раскладывая оператор в левой части на линейные множители, уравнение (1) можно записать в виде

$$(a^1 \cdot \nabla)(a^2 \cdot \nabla)\, u = 0$$

с единичными комплексными векторами $a^j = (a_1^j, a_2^j)$, $j = 1, 2$, что позволяет при условии $a_2^j/a_1^j \neq \pm i$ перейти к виду

$$Lu \equiv \left(\sin\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(\sin\varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)u = 0, \tag{2}$$

где углы φ_1 и φ_2 – комплексные числа, определенные равенствами $a_2^j/a_1^j = -\operatorname{tg}\varphi_j$, это – углы наклона характеристик, а угол $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$ – угол между характеристиками.

Ниже мы будем находиться в предположениях $\varphi_1 \neq \varphi_2$ и $a_2^j/a_1^j \neq \pm i$, последнее из которых означает существование (комплексных) углов φ_j, поскольку неравенство $q \neq \pm i$ есть условие разрешимости уравнения $\operatorname{tg}\phi = q$.

Невещественность чисел φ_1 и φ_2 означает, что исходное уравнение является эллиптическим, то есть $l(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, где $l(\xi) = (\xi_1 \sin\varphi_1 + \xi_2\cos\varphi_1)\ (\xi_1\sin\varphi_2 + \xi_2\cos\varphi_2)$ – символ нашего дифференциального оператора L. Под правильной эллиптичностью понимается, что корни λ_1, λ_2 квадратного уравнения $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ имеют мнимые части противоположных знаков, а это эквивалентно тому, что комплексные углы φ_1 и φ_2 имеют мнимые части противоположных знаков, и, стало быть, они имеют мнимые части одного знака в неправильно эллиптическом случае.

Для неправильно эллиптического уравнения (2) в единичном круге K мы будем изучать корректную разрешимость задачи Неймана, а именно, следуя определению корректности по Адамару линейной граничной задачи

$$Lu = f,\ Bu|_{\partial\Omega} = g,$$

укажем пространство $\mathfrak{B}$, для которого справедлива оценка

$$\|u\|_{\mathfrak{S}} \leq \|f\|_{\mathfrak{R}} + \|g\|_{\mathfrak{B}}$$

($\mathfrak{S}, \mathfrak{R}, \mathfrak{B}$ – банаховы пространства решений и правых частей) с пространством Соболева в качестве пространства $\mathfrak{S}$.

3. Метод исследования. В работе [4] получено условие связи следов решения уравнения (2) из обычных соболевских пространств, которое мы приводим ниже в виде следующей теоремы 1.

Теорема 1. *Для того, чтобы функция* $u \in H^s(K)$ *была решением задачи*

$$u|_{\partial K} = \psi \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial K),\ u'_\nu|_{\partial K} = \chi \in H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$$

для уравнения (2), необходимо и достаточно, чтобы функции

$$\begin{aligned} P(x) =& -l(\nu(x))\psi(x) \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial K),\\ C(x) =& l(\nu(x))\chi(x) + [(\nu_1^2 - \nu_2^2)\sin(\varphi_1+\varphi_2) + 2\nu_1\nu_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)]\psi'_\tau +\\ &+ [(\nu_2^2 - \nu_1^2)\cos(\varphi_1+\varphi_2) - 2\nu_1\nu_2\sin(\varphi_1+\varphi_2)]\psi \in H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K) \end{aligned}$$

удовлетворяли условию

$$\int\limits_{\partial K} [P(x)(-i\langle \nu, \overline{\xi}\rangle) + C(x)]\exp(-i\langle x, \overline{\xi}\rangle)\, d\tau = 0 \tag{3}$$

$\forall \xi \in \Lambda = \{\xi \in \mathbb{C}^2 : l(\xi) = 0\}$.

Здесь и ниже τ – натуральный параметр на ∂K, $\langle x, \xi\rangle = x_1\overline{\xi}_1 + x_2\overline{\xi}_2$, $x \cdot \eta = x_1\eta_1 + x_2\eta_2$.

Позже, в работе [5], было показано, что равенство (3) эквивалентно паре условий

$$\int_{\partial K} \big[u'_{\nu_*} + \frac{\overline{\Delta}}{2}u'_\tau\big]Q(x\cdot \widetilde{a}^1)d\tau = 0,$$
$$\int_{\partial K} \big[u'_{\nu_*} - \frac{\overline{\Delta}}{2}u'_\tau\big]Q(x\cdot \widetilde{a}^2)d\tau = 0,$$

где $\widetilde{a}^1 = (-\overline{a}_2^1, \overline{a}_1^1)$, $\widetilde{a}^2 = (-\overline{a}_2^2, \overline{a}_1^2)$ – направляющие векторы множества комплексных характеристических направлений $\Lambda^j = \left\{\lambda\widetilde{a}^j | \lambda \in \mathbb{C}\right\}$, $j = 1,2$, $<\widetilde{a}^j, a^j> = 0$, $\Lambda = \Lambda^1 \cup \Lambda^2$, $\Delta = \sin\varphi_0$, векторные поля $\frac{\partial}{\partial\tau}$ и $\frac{\partial}{\partial\nu_*} = l(\nu)\frac{\partial}{\partial\nu} - \frac{1}{2k}[l(\nu(\tau))]'_\tau \cdot \frac{\partial}{\partial\tau}$ – производные по касательной и по конормали соответственно, k – кривизна кривой ∂K.

Данная эквивалентность вместе с теоремой 1 гарантировала справедливость следующей теоремы, доказанной в [5].

Теорема 2. *Для того, чтобы функция* $u \in H^s(K)$ $(s \geqslant 2)$ *была решением задачи*

$$u'_\tau|_{\partial K} = \gamma \in H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K), \qquad u'_{\nu_*}|_{\partial K} = \kappa \in H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$$

для уравнения (2), необходимо и достаточно, чтобы функции γ *и* κ *удовлетворяли интегральному равенству*

$$\int_{\partial K} \big[\kappa - (-1)^j\frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma\big]Q(x\cdot \widetilde{a}^j)d\tau = 0, \qquad j = 1,2, \tag{4}$$

с любым полиномом $Q \in \mathbb{C}[z]$. *При этом функция* u *восстанавливается с точностью до аддитивной постоянной.*

Таким образом, было получено другое условие связи следов решения, имеющее вид проблемы неопределенности некоторой проблемы моментов, свойства которой определяли свойства граничной задачи.

В работе [8] изучалась следующая проблема моментов на границе круга:

Для $j = 1, 2$, *для двух заданных наборов чисел* μ_n^j, $n = 0, 1, ...$, *найти функцию* α *из пространства* $H^l(\partial K)$, $l \in \mathbb{R}$, *такую, что*

$$\int_{\partial K} \alpha(\tau) \cos n(\tau + \varphi_j)\, d\tau = \mu_n^j. \tag{5}$$

Ниже перечислим необходимые обозначения и определения. Пусть M_l^j – подпространство пространства $H^l(\partial K)$, элементами которого являются функции $\alpha(\tau)$, удовлетворяющие при всех $k \in \mathbb{Z}_+$ интегральному равенству

$$\int_{\partial K} \alpha(\tau)(x \cdot \widetilde{a}^j)^k d\tau = 0, \quad j = 1, 2.$$

Определение 1. Определим пространство Соболева $H_\rho^m(\partial K)$ с весом $\rho = \rho(n)$ для коэффициентов Фурье как пространство функций

$$\alpha(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\alpha_n^C \cos n\tau + \alpha_n^S \sin n\tau\big),$$

из $L_2(\partial K)$ таких, что коэффициенты α_n^C, α_n^S разложения удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(|\alpha_n^C|^2 + |\alpha_n^S|^2\big)\rho^2(n)\big(1 + n^2\big)^m < \infty.$$

Замечание. В дальнейшем в качестве веса $\rho(n)$ примем значение

$$\rho = \rho(n) = e^{n(|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)| - |\mathrm{Im}(\varphi_2-\varphi_1)|)}.$$

Отметим, что $|\mathrm{Im}(\varphi_1 + \varphi_2)| - |\mathrm{Im}(\varphi_2 - \varphi_1)| > 0$ для неправильно эллиптического уравнения (2). Пространство $H_\rho^m(\partial K)$ с таким весом состоит из аналитических функций. Функции с экспоненциальным убыванием коэффициентов Фурье систематически используются в теории функций, начиная с работ С.Н. Берштейна (см., например, книгу [11]).

Определение 2. Будем говорить, что векторы $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ обладают $H_\rho^m - H^l$-свойством на кривой ∂K, $l \leqslant m$, если для каждой функции $\alpha \in H_\rho^m(\partial K)$ существуют единственные функции $\alpha^1 \in M_l^1 \subset H^l(\partial K)$, $\alpha^2 \in M_l^2 \subset H^l(\partial K)$ такие, что имеет место представление $\alpha = \alpha^1 + \alpha^2 + const$.

Задача $H_\rho^m - H^l$ на кривой ∂K $(l \leqslant m)$ состоит в нахождении условий на векторы $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$, необходимых и достаточных для $H_\rho^m - H^l$-свойства на кривой ∂K. Эти условия получены и подробно описаны в работе [8]. Результаты исследования отражены в теореме 3.

Теорема 3. *Пусть* φ_0 *– вещественное ч исло,* $\alpha \in H_\rho^m(\partial K)$ *– любая функция, и пусть выполнено неравенство:*

$$\exists C_0 > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin n\varphi_0| > C_0 n^{-\mu}. \tag{6}$$

Тогда существуют функции α^j, $j = 1, 2$, *из определения 2, принадлежащие пространству* $H^{m-\mu}(\partial K)$. *Если же* φ_0 *– комплексное невещественное число и попрежнему* $\alpha \in H_\rho^m(\partial K)$, *то существуют функции* $\alpha^j \in H^m(\partial K)$.

4. Разрешимость задачи Неймана. Рассмотрим задачу Неймана

$$u'_{\nu_*}|_{\partial K} = \kappa \tag{7}$$

для уравнения (2) в пространстве Соболева $H^s(K)(= W_2^s(K)),\ s \geqslant 2$, где $K = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ |x| < 1\}$ – единичный круг с границей ∂K, функция $\kappa \in H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$, и выясним, для каких классов граничных данных такая задача имеет единственное решение.

Сформулируем и докажем результат, отражающий связь свойств проблемы моментов (5) с разрешимостью задачи (2), (7) для вещественного φ_0. Отметим, что, как показано в работе [5] (см. также [6]), π-рациональность угла φ_0 равносильна существованию непостоянного полиномиального решения однородной задачи (2), (7), причем, если существует одно такое решение, то существует счетный набор линейно независимых полиномиальных решений (возрастающей степени).

Теорема 4. *Пусть число φ_0 вещественно и π-иррационально. При наличии $H_\rho^{s-\frac{3}{2}} - H^{s-\mu-\frac{3}{2}}$-свойства на границе ∂K круга у векторов $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ решение $u(x)$ задачи (7) с $\kappa \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$ для уравнения (2) существует, единственно (с точностью до аддитивной постоянной) и принадлежит пространству $H^{s-\mu}(K)$.*

Доказательство. Ввиду свойства $H_\rho^{s-\frac{3}{2}} - H^{s-\mu-\frac{3}{2}}$ векторов $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2$ всякая функция $\kappa \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$ представима в виде суммы $\kappa = v_1 + v_2$, где $v_j \in M^j_{s-\mu-\frac{3}{2}} \subset H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K),\ j = 1, 2$. Нам необходимо по известной функции κ построить функцию γ таким образом, чтобы было выполнено интегральное равенство (4) из теоремы 2. Полагая $\gamma = \frac{2}{\Delta}(2v_1 - \kappa)$ и подставляя разложение $\kappa = v_1 + v_2$, получим: $\gamma = \frac{2}{\Delta}(v_1 - v_2)$.

Убедимся, что при таком выборе γ и κ выполняется равенство (4). В самом деле, при $j = 1$ имеем: $\int\limits_{\partial K} \left[\kappa + \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma\right] Q(x \cdot \widetilde{a}^1) d\tau =$

$$= \int\limits_{\partial K} \left(v_1 + v_2 + \frac{\overline{\Delta}}{2} \cdot \frac{2}{\Delta}(v_1 - v_2))Q(x \cdot \widetilde{a}^1\right) d\tau = 2 \int\limits_{\partial K} v_1 \cdot Q(x \cdot \widetilde{a}^1) d\tau = 0.$$

Ясно, что равенство нулю интеграла достигается в силу принадлежности $v_1 \in M^1_{s-\mu-\frac{3}{2}}$.

Далее, при $j = 2$ получаем: $\int\limits_{\partial K} \left[\kappa - \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma\right] Q(x \cdot \widetilde{a}^2)\, d\tau =$

$$= \int\limits_{\partial K} (v_1 + v_2 - \frac{\overline{\Delta}}{2} \cdot \frac{2}{\Delta}(v_1 - v_2))Q(x \cdot \widetilde{a}^2)\, d\tau = 2 \int\limits_{\partial K} v_2 \cdot Q(x \cdot \widetilde{a}^2)\, d\tau = 0,$$

поскольку $v_2 \in M^2_{s-\mu-\frac{3}{2}}$.

Отметим, что, ввиду очевидных вложений, $\kappa \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K) \subset H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K) \subset H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K)$. Кроме того, $\gamma \in H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K)$, так как имеет место представление $\gamma = \frac{2}{\Delta}(v_1 - v_2)$, где $v_j \in M^j_{s-\mu-\frac{3}{2}} \subset H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K),\ j = 1, 2$.

Итак, обе функции γ и κ принадлежат пространству $H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K)$ и удовлетворяют равенству (4). Следовательно, для этих функций справедлива теорема 2, а это, в свою очередь, означает, что существует единственное решение $u(x) \in H^{s-\mu}(K)$ задачи

$$u'_\tau|_{\partial K} = \gamma \in H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K), \qquad u'_{\nu_*}|_{\partial K} = \kappa \in H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K)$$

с двумя граничными условиями для уравнения (2). Таким образом, функция $u(x)$ удовлетворяет исходному уравнению и каждому из граничных условий, в частности, условию Неймана $u'_{\nu_*}|_{\partial K} = \kappa$. Значит, существует единственное (с точностью до аддитивной постоянной) решение $u(x) \in H^{s-\mu}(K)$ задачи (2), (7). Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть φ_0 невещественно. Если векторы $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ обладают $H_\rho^{s-\frac{3}{2}} - H^{s-\frac{3}{2}}$-свойством на границе ∂K круга, то решение $u(x)$ задачи (7) с $\kappa \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$ для уравнения (2) существует, единственно (с точностью до аддитивной постоянной) и принадлежит пространству $H^s(K)$.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы с той разницей, что в этом случае $\mu = 0$.

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 6. *Пусть φ_0 невещественно. Если решение $u(x)$ задачи (7) с $\kappa \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$ для уравнения (2) существует, единственно (с точностью до аддитивной постоянной) и принадлежит пространству $H^s(K)$, то векторы $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ обладают $H_\rho^{s-\frac{3}{2}} - H^{s-\frac{3}{2}}$-свойством на границе ∂K круга.*

Доказательство сразу следует из теоремы 2. Действительно, если нам дана произвольная функция $\kappa \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$, $s \geq 2$, то мы по ней строим решение задачи Неймана $u \in H^s(K)$, которое имеет след $\psi = u|_{\partial K} \in H^{s-1/2}(\partial K)$, и ее производная $\gamma = \psi'$ вместе с функцией κ должна, по теореме 2, удовлетворять равенствам (4), что и означает $H_\rho^{s-\frac{3}{2}} - H^{s-\frac{3}{2}}$-свойство на границе ∂K круга.

Объединяя утверждения теорем 3, 4 и 5, получим основной результат в виде теорем 7 и 8, отвечающих случаям **2)** и **3)**.

Теорема 7. *Пусть φ_0 вещественно и π-иррационально, $\kappa \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$ и пусть выполнено неравенство (6). Тогда решение задачи (2), (7) существует, единственно (с точностью до аддитивной постоянной) и принадлежит пространству $H^{s-\mu}(K)$.*

Теорема 8. *Если φ_0 – невещественное число и $\kappa \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$, то решение задачи (2), (7) существует, единственно (с точностью до аддитивной постоянной) и принадлежит пространству $H^s(K)$.*

В самом деле, если φ_0 – вещественное и π-иррациональное (невещественное) число и $\kappa \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$, то, ввиду теоремы 3, слагаемые $\alpha^j \in H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K)(H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K))$, $j = 1, 2$, что означает (в смысле определения 2), что векторы $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ обладают $H_\rho^{s-\frac{3}{2}} - H^{s-\mu-\frac{3}{2}}$ $(H_\rho^{s-\frac{3}{2}} - H^{s-\frac{3}{2}})$-свойством на кривой ∂K. Но тогда из теоремы 4 следует существование, единственность и принадлежность решения $u(x)$ задачи (2), (7) пространству $H^{s-\mu}(K)$ $(H^s(K))$.

1. *Бицадзе А.В.* О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. – 3, № 6. – 1948. – С. 211-212.
2. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы дифференциальных уравнений с частными производными. – М.: Наука. – 1981. – 448 с.
3. *Бурский В.П.* О нарушении единственности решения задачи Дирихле для эллиптических систем в круге // Мат. заметки. – 48, № 3. – 1990. – С. 32-36.
4. *Бурский В.П.* О решениях задачи Дирихле для эллиптических систем в круге // Укр. мат. журнал. – 44, № 10. – 1992. – С. 1307-1313.
5. *Бурский В.П.* О краевых задачах для эллиптического уравнения с комплексными коэффициентами и одной проблеме моментов // Укр. мат. журнал. – 45, № 11. – 1993. – С. 1476-1483.
6. *Бурский В.П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев: Наукова думка. – 2002. – 316 с.
7. *Бурский В.П.* Условия регулярности общей дифференциальной граничной задачи для неправильно эллиптических уравнений // Укр. мат. журнал. – 62, № 6. – 2010. – С.754-761.
8. *Бурский В.П., Кириченко Е.В.* О задаче Дирихле для неправильно эллиптического уравнения // Укр. мат. журнал. – 63, № 2. – 2011. – С. 156-164.
9. *Лионс Ж.-М., Madженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир. – 1971. – 372 с.
10. *Лопатинский Я.Б.* Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // Укр. мат. журнал. – 5, № 2. – 1953. – С. 123-151.
11. *Мандельбройт С.* Квазианалитические классы функций. – ОНТИ НКТП СССР, Ленинград-Москва, 1937.

V. P. Burskii, Ye. V. Lesina

The Neumann problem for improperly elliptic second-order equation.

The solvability of inhomogeneous Neumann problem in bounded domain for scalar improperly elliptic differential equation with constant complex coefficients is investigated. It turned out that this problem has a unique solution in Sobolev space for special classes of Dirichlet data belonging to the spaces of functions with the exponential decreasing of the Fourier coefficients.

Keywords: *improperly elliptic differential operator, weight Sobolev space, Fourier series, Neumann problem, symbol of differential operator.*

В. П. Бурський, Є. В. Лесіна

Задача Неймана для неправильно еліптичного рівняння другого порядку.

У роботі розглядається проблема розв'язності неоднорідної задачі Неймана в обмеженій області для скалярного неправильно еліптичного диференціального рівняння з постійними комплексними коефіцієнтами. Досліджено рівняння другого порядку без молодших членів у модельній області – в одиничному колі. Доведено, що класами граничних даних, для яких задача має єдиний розв'язок у просторі Соболєва, є простори функцій з експоненціальним спаданням коефіцієнтів Фур'є.

Ключові слова: *неправильно еліптичний диференціальний оператор, ваговий простір Соболєва, ряд Фур'є, задача Неймана, символ диференціального оператора.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`burskii@iamm.ac.donetsk.ua`
`lesina@bk.ru`

Получено 27.03.12