УДК 517.95

©2012. **В. П. Бурский, И. И. Куракина**

ОБЩАЯ ЭКВИВАРИАНТНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ

Для уравнения теплопроводности в цилиндре над кругом рассмотрена смешанная задача с произвольным начальным и общим поворотно-инвариантным граничным условиями. Получена явная формула решения в виде ряда Фурье-Дини, исследованы гладкие свойства такого решения, получена априорная оценка в шкале позитивных весовых соболевских пространств.

Ключевые слова: *уравнение теплопроводности, смешанная задача, эквивариантная граничная задача.*

1. Введение. Исследование симметрий дифференциальных уравнений с частными производными, начатое Софусом Ли, в настоящее время превратилось в большое самостоятельное направление. Однако изучение симметрических свойств граничных задач не проводилось вплоть до последнего времени. Исследования в этом направлении, начатые в статье Кочубея А.Н. [6], были продолжены в работах Бурского В.П. [2], а также Бурского В.П. и Т.В. Штепиной [3].

В данной работе рассматривается уравнение теплопроводности в цилиндре над кругом с начальным и граничным условиями. Граничным условием является однородное эквивариантное условие с группой поворотов круга, а начальная задача ставится с общей функцией, инвариантность которой не требуется. Рассматриваемое эквивариантное граничное условие является общим инвариантным относительно поворотов со слабым ограничением (см. ниже условие (3')).

Удается применить метод Фурье разделения переменных в общей ситуации. С помощью теории рядов Дини и свойств функций Бесселя найдена точная формула для решения начально-краевой эквивариантной задачи в виде ряда Фурье-Дини.

Проведен анализ принадлежности найденного решения к пространствам типа пространств Соболева. В результате чего доказана априорная оценка, из которой следует корректность по Адамару поставленной задачи для уравнения теплопроводности в соответствующей шкале пространств Соболева.

2. Постановка задачи. В круговом цилиндре $Q_T = K \times [0,T], T > 0$, где $K = \{x \in R^2 : |x| \le 1\}$ – единичный круг с границей ∂K будем рассматривать однородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

и общим инвариантным относительно группы поворотов граничным условием

$$\alpha{*}u|_{\partial K} + \beta{*}u'_\nu|_{\partial K} = 0, \tag{3}$$

где $\alpha = \sum \alpha_n e^{in\tau}$, $\beta = \sum \beta_n e^{in\tau}$ – функции на единичной окружности ∂K произвольной гладкости, разложенные в ряд Фурье; $*$ – свертка на ∂K: $\alpha * \psi = \Sigma \alpha_n \psi_n e^{in\tau}$, u_0 – некоторая функция из весового класса $L_{2,r}(K)$:

$$\|g\|^2_{L_{2,r}(K)} = \int_K |g(r,\varphi)|^2\, r\, dr\, d\varphi.$$

Если $u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n e^{in\tau}$, $u'_\nu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n e^{in\tau}$, то условие (3) перепишется в виде: $\alpha_n u_n + \beta_n v_n = 0$. Ниже будем полагать, что

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} \geq -n. \tag{3'}$$

Это условие будет означать вещественность нулей $\mu_m^{(n)}$ используемых ниже функций Бесселя, поскольку их комплексные нули мы здесь не рассматриваем. Требуется найти и исследовать решение уравнения (1), удовлетворяющее начально-краевым условиям (2), (3), где $u_0 \in L_{2,r}(K)$, а функции α, β подчинены ограничению $(3')$.

3. Получение формулы решения задачи в явном виде. В полярных координатах задача (1), (2), (3) примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \tag{4}$$

$$u|_{t=o} = u_0(r,\varphi), \tag{5}$$

$$\alpha * u|_{\partial K} + \beta * u'|_{\partial K} = 0, \tag{6}$$

где $K = \{\varphi \in (0, 2\pi), 0 \leq r < 1\}$, $t \in [0; T]$.

Решение задачи (4), (5), (6) будем искать методом Фурье разделения переменных в виде:

$$u(t,r,\varphi) = T(t)R(r)\Phi(\varphi). \tag{7}$$

Таким образом, приходим к уравнениям:

$$T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0, \tag{8}$$

$$\Phi''(\varphi) + \nu^2 \Phi(\varphi) = 0, \tag{9}$$

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + (\lambda^2 - \frac{\nu^2}{r^2})R(r) = 0. \tag{10}$$

Для уравнения (9) имеет место условие периодичности:

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi), \Phi'(0) = \Phi'(2\pi). \tag{11}$$

Решение задачи (9), (11) имеет вид:

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, n = 0, 1, 2, ... \tag{12}$$

(подключили $n = 0$, учитывая, что $\Phi_0(\varphi) = a_0 \neq 0$ есть собственная функция, соответствующая собственному значению $\nu = 0$).

Функции $R(r)$ из уравнения (10) удовлетворяют условию

$$|R(0)| < \infty \tag{13}$$

и условию (6) задачи. Уравнение (10) подстановкой $\lambda r = x$ $(R(r) = y(x))$ приводится к уравнению Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{14}$$

общее решение которого при $\nu = n$ имеет вид:

$$R_n(r) = C_n J_n(\lambda r) + D_n Y_n(\lambda r),$$

где $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ – функции Бесселя 1-го и 2-го рода. Так как в окрестности $x = 0$ функция $J_n(x)$ ограничена, а функция $Y_n(x)$ является неограниченной, то в силу условия (13) коэффициент $D_n = 0$, т.е.

$$R_n(r) = C_n J_n(\lambda r). \tag{15}$$

$$R(r)\Phi(\varphi) = [A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi] J_n(\lambda r) = \gamma_n e^{in\varphi} J_n(\lambda r). \tag{16}$$

Подставим представление (16) в граничное условие (6), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_n J_n(\lambda r) + \lambda \beta_n J_n'(\lambda r)] \gamma_n e^{in\varphi} = 0.$$

Откуда, $\alpha_n J_n(\lambda r) + \lambda \beta_n J_n'(\lambda r) = 0$.

В силу произвольности r, собственные значения λ будем находить из уравнения

$$\alpha_n J_n(\lambda) + \lambda \beta_n J_n'(\lambda) = 0. \tag{17}$$

Обозначим решения λ этого уравнения через $\mu_m^{(n)}$. По предположению $(3')$ все $\mu_m^{(n)}$ вещественны ([1]).

Решениями уравнения (8) являются функции $T_m(t) = C_m e^{-\lambda^2 t}$, где λ определяются из уравнения (17). Значит

$$T_m(t) = C_m e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t}. \tag{18}$$

Таким образом, функции

$$u_{m,n}(r, t, \varphi) = [A_{n,m} \cos n\varphi + B_{n,m} \sin n\varphi] e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} J_n(\mu_m^{(n)} r) \tag{19}$$

являются частными решениями уравнения (4) и удовлетворяют граничным условиям (5), (6).

Решение задачи (4)-(6) ищем в виде ряда

$$u(r,t,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{m,n}(r,t,\varphi). \tag{20}$$

Для того, чтобы найти неизвестные коэффициенты, воспользуемся начальным условием (5).

Рассмотрим следующую теорему (см. [1]).

Теорема 1. *Произвольная функция $w(r,\varphi) \in L_2(K)$ может быть разложена в ряд Дини*

$$w(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} [\zeta_{n,m}\cos n\varphi + \xi_{n,m}\sin n\varphi] J_n(\mu_m^{(n)} r),$$

где коэффициенты разложения определяются по формулам

$$\zeta_{n,m} = \frac{2(\mu_m^{(n)})^2}{[(\mu_m^{(n)})^2[J_\nu'(\mu_m^{(n)})]^2 + ((\mu_m^{(n)})^2-\nu^2)[J_{\nu+1}(\mu_m^{(n)})]^2]}\times$$
$$\times \int_0^{2\pi}\int_0^1 r w(r,\varphi)\cos n\varphi J_n(\mu_m^{(n)} r)\,dr\,d\varphi,$$

$$\xi_{n,m} = \frac{2(\mu_m^{(n)})^2}{[(\mu_m^{(n)})^2[J_\nu'(\mu_m^{(n)})]^2 + ((\mu_m^{(n)})^2-\nu^2)[J_{\nu+1}(\mu_m^{(n)})]^2]}\times$$
$$\times \int_0^{2\pi}\int_0^1 r w(r,\varphi)\sin n\varphi J_n(\mu_m^{(n)} r)\,dr\,d\varphi.$$

Запишем (20) при $t = 0:$

$$u(r,\varphi,0) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} [A_{n,m}\cos n\varphi + B_{n,m}\sin n\varphi] J_n(\mu_m^{(n)} r) = u_0(r,\varphi).$$

По теореме 1 функция $u_0(r,\varphi)$ представима в виде

$$u_0(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} [\tilde{A}_{n,m}\cos n\varphi + \tilde{B}_{n,m}\sin n\varphi] J_n(\mu_m^{(n)} r),$$

где

$$\tilde{A}_{n,m} = \frac{2(\mu_m^{(n)})^2}{[(\mu_m^{(n)})^2[J_\nu'(\mu_m^{(n)})]^2 + ((\mu_m^{(n)})^2-\nu^2)[J_{\nu+1}(\mu_m^{(n)})]^2]}\times$$
$$\times \int_0^{2\pi}\int_0^1 r u_0(r,\varphi)\cos n\varphi J_n(\mu_m^{(n)} r) dr\,d\varphi \tag{21}$$

$$\tilde{B}_{n,m} = \frac{2(\mu_m^{(n)})^2}{[(\mu_m^{(n)})^2[J_\nu'(\mu_m^{(n)})]^2 + ((\mu_m^{(n)})^2-\nu^2)[J_{\nu+1}(\mu_m^{(n)})]^2]}\times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \int_0^1 r u_0(r,\varphi) \sin n\varphi J_n(\mu_m^{(n)} r) dr\, d\varphi. \qquad (22)$$

Получаем:

$$u|_{t=o} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_{n,m} \cos n\varphi + B_{n,m} \sin n\varphi] J_n(\mu_m^{(n)} r) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [\tilde{A}_{n,m} \cos n\varphi + \tilde{B}_{n,m} \sin n\varphi] J_n(\mu_m^{(n)} r).$$

Откуда следует, что $A_{n,m} = \tilde{A}_{n,m}, B_{n,m} = \tilde{B}_{n,m}$.
Значит,

$$u_{n,m}(r,t,\varphi) = [\tilde{A}_{n,m} \cos n\varphi + \tilde{B}_{n,m} \sin n\varphi] e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} J_n(\mu_m^{(n)} r).$$

Таким образом, решение задачи (4), (5), (6) имеет вид:

$$u(r,t,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}(r,t,\varphi) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [\tilde{A}_{n,m} \cos n\varphi + \tilde{B}_{n,m} \sin n\varphi] e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} J_n(\mu_m^{(n)} r), \qquad (23)$$

где $\mu_m^{(n)}$ – вещественные корни уравнения $\alpha_n J_n(\lambda) + \lambda \beta_n J_n'(\lambda) = 0$; $\tilde{A}_{n,m}, \tilde{B}_{n,m}$ определяются по формулам (21),(22) соответственно.

4. Принадлежность ряда Фурье-Дини пространству $H_r^k(K)$. В дальнейшем нам понадобится следующая теорема (см. [1]).

Теорема 2. *Число нулей функции $z^{-\nu} J_\nu(z)$, лежащих между мнимой осью и прямой* $\mathrm{Re}\ z = m\pi + (\frac{1}{2}\mathrm{Re}\ \nu + \frac{1}{4})\pi$, *при достаточно больших значениях m равно n, и все нули функции $J_\nu(z)$ лежат в полосе $|\mathrm{Im}\ z| < A_\nu$, где A_ν– ограничено, если ν – ограничено.*

Пусть $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)} ... \lambda_{m+1}^{(n)}$ – нули функции $a J_n(z) + z J_n'(z)$. Тогда, согласно теореме, корни $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)} ... \lambda_m^{(n)}$ лежат в полосе между мнимой осью и прямой $\mathrm{Re}\ z = m\pi + (\frac{1}{2}\mathrm{Re}\ n + \frac{1}{4})\pi$. Следовательно, корень $\lambda_{m+1}^{(n)}$ лежит между прямыми $\mathrm{Re}\ z = m\pi + (\frac{1}{2} n + \frac{1}{4})\pi$ и $\mathrm{Re}\ z = (m+1)\pi + (\frac{1}{2} n + \frac{1}{4})\pi$. То есть выполнено условие

$$m\pi + (\frac{1}{2} n + \frac{1}{4})\pi \leq \mathrm{Re}\ \lambda_{m+1}^{(n)} \leq (m+1)\pi + (\frac{1}{2} n + \frac{1}{4})\pi.$$

Разделим неравенство на $m + 1 + \frac{n}{2}$

$$\frac{m\pi + (\frac{1}{2} n + \frac{1}{4})\pi}{m + 1 + \frac{n}{2}} \leq \frac{\mathrm{Re}\ \lambda_{m+1}^{(n)}}{m + 1 + \frac{n}{2}} \leq \frac{(m+1)\pi + (\frac{1}{2} n + \frac{1}{4})\pi}{m + 1 + \frac{n}{2}},$$

и при фиксированном n перейдем к пределу при $m \to \infty$. Получим: $\mathrm{Re}\,\lambda_{m+1}^{(n)} \sim (m+1+\frac{n}{2})\pi$, $\mathrm{Re}\,\lambda_m^{(n)} \sim (m+\frac{n}{2})\pi$.

Т.о. доказано следующее

Утверждение 1. $\mathrm{Re}\,\mu_m^{(n)} \sim (m+\frac{n}{2})\pi$. $\square$

Будем использовать следующее весовое пространство Соболева $H_r^k(K)$, где мы рассматриваем норму, заданную следующим образом:

$$\|f\|^2_{H_r^k(K)} = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha f\|^2_{L_{2,r}(K)}\,, \ \|g\|^2_{L_{2,r}(K)} = \int_K |g(r,\varphi)|^2\, r\, dr\, d\varphi.$$

Рассмотрим вопрос принадлежности решения задачи (4), (5), (6) пространству $H_r^k(K)$.

Теорема 3. *Для того, чтобы произвольная функция $f(r,\varphi)$ принадлежала пространству Соболева $H_r^k(K), k = 0, 1, 2...$ (r – вес, K – круг) необходимо и достаточно, чтобы выполнялась оценка*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(1+n^2+m^2)^k(|f_{nm}|^2+|g_{nm}|^2) < \infty, \tag{24}$$

где

$$f(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}[f_{nm}\cos n\varphi + g_{nm}\sin n\varphi]J_n(\mu_m^{(n)}r),$$

$f_{nm} = \tilde{A}_{n,m}, g_{nm} = \tilde{B}_{n,m}$; $\tilde{A}_{n,m}, \tilde{B}_{n,m}$ *определяются по формулам (21), (22) соответственно.*

Доказательство. Пусть функция $f(r,\varphi)$ принадлежит пространству Соболева $H_r^k(K)$:

$$\|f\|^2_{H_r^k(K)} = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha f\|^2_{L_{2,r}(K)} < \infty. \tag{25}$$

Покажем эквивалентность нормы (25) и нормы, заданной формулой (24):

$$\|f\|^2_{H_r^k(K)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(1+n^2+m^2)^k(|f_{nm}|^2+|g_{nm}|^2).$$

Покажем эквивалентность норм при $k=1$.

$$f(r,\varphi) \in H_r^1(K) : \|f\|^2_{H_r^1(K)} = \|f\|^2_{L_{2,r}(K)} + \|\nabla f\|^2_{L_{2,r}(K)} =$$

$$= \|f\|^2_{L_{2,r}(K)} + \left\|f'_\varphi\right\|^2_{L_{2,r}(K)} + \left\|f'_r\right\|^2_{L_{2,r}(K)}.$$

Итак,

$$\|f\|^2_{L_{2,r}(K)} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r|f(r,\varphi)|^2 dr\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [f_{nm} \cos n\varphi + g_{nm} \sin n\varphi] J_n(\mu_m^{(n)} r) \times$$

$$\times \overline{\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} [f_{pl} \cos p\varphi + g_{pl} \sin p\varphi] J_p(\mu_l^{(p)} r)} dr\, d\varphi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [f_{nm} \overline{f_{nm}} \int_0^{2\pi} \cos^2 n\varphi\, d\varphi + g_{nm} \overline{g_{nm}} \int_0^{2\pi} \sin^2 n\varphi\, d\varphi] \times$$

$$\times \int_0^1 r J_n^2(\mu_m^{(n)} r) dr =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \pi [|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2] \int_0^1 r J_n^2(\mu_m^{(n)} r) dr.$$

По утверждению 1 $\mu_m^{(n)} = (m+\frac{n}{2})\pi + o(m+\frac{n}{2}) = (m+\frac{n}{2})\pi\alpha(m+\frac{n}{2})$, где $\alpha(m+\frac{n}{2}) \to 1$ при $(m+\frac{n}{2}) \to \infty$.

Используя свойства ортогональности функций Бесселя и формулу для рекуррентного соотношения между функциями Бесселя и их производными ([1]), получим $\int_0^1 r J_n^2(\mu_m^{(n)} r) dr \leq \tilde{C}_0$.

Таким образом,

$$\|f\|^2_{L_{2,r}(K)} \leq \tilde{C}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \pi [|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2] \leq C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2].$$

Аналогично получим:

$$\left\|f'_\varphi\right\|^2_{L_{2,r}(K)} \leq C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n^2 [|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2],$$

$$\left\|f'_r\right\|^2_{L_{2,r}(K)} \leq C_2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (2m+n)^2 [|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2].$$

Итак,

$$\|f\|^2_{H^1_r(K)} = ||f||^2_{L_{2,r}(K)} + \left\|f'_\varphi\right\|^2_{L_{2,r}(K)} + \left\|f'_r\right\|^2_{L_{2,r}(K)} \leq$$

$$\leq \max\{C_0, C_1, C_2\} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1 + n^2 + (2m+n)^2) [|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2] \leq$$

$$\leq C \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1 + n^2 + m^2)(|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2).$$

Для доказательства эквивалентности норм нужно показать обратное неравенство:

$$\|f\|^2_{H^1_r(K)} \geq \tilde{K} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1 + n^2 + m^2)(|f_{nm}|^2 + |g_{nm}|^2).$$

Оценим снизу выражения $\|f\|^2_{L_{2,r}(K)}, \left\|f'_\varphi\right\|^2_{L_{2,r}(K)}, \|f'_r\|^2_{L_{2,r}(K)}$:
$\|f\|^2_{L_{2,r}(K)} =$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\pi\left(\frac{J_n^2(\mu_m^{(n)})+J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)})}{2}-\frac{nJ_n(\mu_m^{(n)}J_{n+1}(\mu_m^{(n)})}{(\pi m+\pi\frac{n}{2})\alpha(m+\frac{n}{2})}\right)[|f_{nm}|^2+|g_{nm}|^2]\geq$$

$$\geq\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\pi\left(1-\frac{n}{(\pi m+\pi\frac{n}{2})\alpha(m+\frac{n}{2})}\right)\frac{J_n^2(\mu_m^{(n)})+J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)})}{2}[|f_{nm}|^2+|g_{nm}|^2]\geq$$

$$\geq K_1\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\min\left(\frac{J_n^2(\mu_m^{(n)})+J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)})}{2}\right)[|f_{nm}|^2+|g_{nm}|^2]=$$

$$=K_2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}[|f_{nm}|^2+|g_{nm}|^2].$$

Аналогично получим оценки

$$\left\|f'_\varphi\right\|^2_{L_{2,r}(K)}\geq K_3\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}n^2[|f_{nm}|^2+|g_{nm}|^2],$$

$$\left\|f'_r\right\|^2_{L_{2,r}(K)}\geq K_4\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(2m+n)^2[|f_{nm}|^2+|g_{nm}|^2].$$

Таким образом, получили

$$\|f\|^2_{H^1_r(K)}\geq\tilde{K}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(1+n^2+m^2)(|f_{nm}|^2+|g_{nm}|^2).$$

Итак, показана эквивалентность норм (24) и (25) при $k=1, f(r,\varphi)\in H^1_r(K)$.

Далее по индукции. Предположим, что утверждение об эквивалентности норм (24) и (25) верно при $k=j$ и докажем, что эквивалентность имеет место при $k=j+1$.

Если $f(r,\varphi)\in H^{j+1}_r(K)$, то

$$\|f\|^2_{H^{j+1}_r(K)}=\|f\|^2_{L_{2,r}(K)}+\ldots+\left\|\triangledown^{(j)}f\right\|^2_{L_{2,r}(K)}+\left\|\triangledown^{(j+1)}f\right\|^2_{L_{2,r}(K)}=$$

$$=\|f\|^2_{L_{2,r}(K)}+\ldots+\left\|\triangledown^{(j)}f\right\|^2_{L_{2,r}(K)}+\left\|\triangledown(\triangledown^{(j)}f)\ \right\|^2_{L_{2,r}(K)}.$$

Исходя из предположения индукции и по доказанному ранее при $k=1$, получаем требуемое утверждение.

Из эквивалентности норм (24) и (25) следует, что величина, заданная формулой (24), конечна.

Теорема 3 доказана. □

5. Априорная оценка решения задачи. Разложение функции из начального условия (5) в ряд Дини имеет вид

$$u_0(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}[\tilde{A}_{n,m}\cos n\varphi+\tilde{B}_{n,m}\sin n\varphi]J_n(\mu_m^{(n)}r),$$

где $\tilde{A}_{n,m},\tilde{B}_{n,m}$ определяются по формулам (21), (22) соответственно.

Согласно теореме 3, для того, чтобы функция $u_0(r,\varphi)$ принадлежала пространству $H_r^k(K)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\|u_0\|^2_{H_r^k(K)}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(1+n^2+m^2)^k(|\tilde{A}_{n,m}|^2+|\tilde{B}_{n,m}|^2)<\infty$.

Решение задачи (4), (5), (6) $u(r,t,\varphi)\in H_r^k(K_t)$ (где K_t – область при фиксированном t) тогда и только тогда, когда

$$\|u\|^2_{H_r^k(K_t)}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(1+n^2+m^2)^k(|\tilde{f}_{n,m}|^2+|\tilde{g}_{n,m}|^2)<\infty,$$

где

$$\tilde{f}_{n,m}=\tilde{A}_{n,m}e^{-(\mu_m^{(n)})^2t},\tilde{g}_{n,m}=\tilde{B}_{n,m}e^{-(\mu_m^{(n)})^2t}.$$

Оценим норму функции $u(r,t,\varphi)$ через норму функции $u_0(r,\varphi)$.

$$\|u\|^2_{H_r^k(K_t)}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(1+n^2+m^2)^k(|\tilde{f}_{n,m}|^2+|\tilde{g}_{n,m}|^2)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(1+n^2+m^2)^k(|\tilde{A}_{n,m}e^{-(\mu_m^{(n)})^2t}|^2+|\tilde{B}_{n,m}e^{-(\mu_m^{(n)})^2t}|^2)\le$$

$$\le\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(1+n^2+m^2)^k(|\tilde{A}_{n,m}|^2+|\tilde{B}_{n,m}|^2)=\|u_0\|^2_{H_r^k(K)}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Для решения $u(r,t,\varphi)$ задачи (4), (5), (6) для каждого $t\in[0,T]$ выполняется следующая априорная оценка:*

$$\|u\|^2_{H_r^k(K_t)}\le\tilde{C}\,\|u_0\|^2_{H_r^k(K)}. \tag{26}$$

Замечание 1. Отметим, что при $t>0$ конечной будет норма решения u в пространстве $H_r^k(K)$ для любого k. Действительно, в силу утверждения 1 для $t>0$ и для любого k имеем $e^{-(\mu_m^{(n)})^2t}(1+n^2+m^2)^k\to 0$ при $(1+n^2+m^2)\to\infty$. Это означает, что решение $u-$ бесконечно дифференцируемая функция по x для $t>0$.

В дальнейшем нам понадобится следующее

Определение 1. Пространство $H_r^{l,k}(Q_T), l, k \in \mathbb{Z}_+$ определяется как множество всех функций $f(t,x)$ из $L_2(Q_T)$, для которых

$$\|f\|^2_{H_r^{l,k}(Q_T)} = \sum_{q=0}^{l} \int_0^T \left\| \frac{\partial^q f}{\partial t^q} \right\|^2_{H_r^k(K_t)} dt < \infty.$$

Продифференцируем теперь ряд (23) по t 1, 2 ... l раз:

$$u'_t = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-(\mu_m^{(n)})^2)[\tilde{A}_{n,m} \cos n\varphi + \tilde{B}_{n,m} \sin n\varphi] e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} J_n(\mu_m^{(n)} r),$$

$$u''_{tt} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-(\mu_m^{(n)})^2)^2[\tilde{A}_{n,m} \cos n\varphi + \tilde{B}_{n,m} \sin n\varphi] e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} J_n(\mu_m^{(n)} r), \ldots,$$

$$u_t^{(l)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-(\mu_m^{(n)})^2)^l[\tilde{A}_{n,m} \cos n\varphi + \tilde{B}_{n,m} \sin n\varphi] e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t} J_n(\mu_m^{(n)} r).$$

И оценим полученные выражения:

$$\left\|u'_t\right\|^2_{H_r^k(K_t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^k (|-(\mu_m^{(n)})^2|^2 |e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t}|^2 (|\tilde{A}_{n,m}|^2 + |\tilde{B}_{n,m}|^2) \leq$$

(вспоминая, что $\mu_m^{(n)} \sim (m + \frac{n}{2})\pi$)

$$\leq \tilde{c}_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^k \left(m + \frac{n}{2}\right)^4 (|\tilde{A}_{n,m}|^2 + |\tilde{B}_{n,m}|^2) \leq$$

(учитывая, что $\left(m + \frac{n}{2}\right)^4 \leq \tilde{c}_2 (1+n^2+m^2)^2, n = 0, 1, 2, \ldots, m = 1, 2, \ldots$)

$$\leq C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^{(k+2)} (|\tilde{A}_{n,m}|^2 + |\tilde{B}_{n,m}|^2). \tag{27}$$

Действуя аналогично, получим, что

$$\left\|u''_{tt}\right\|^2_{H_r^k(K_t)} \leq C_2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^{(k+4)} (|\tilde{A}_{n,m}|^2 + |\tilde{B}_{n,m}|^2), \ldots, \tag{28}$$

$$\left\|u_t^{(l)}\right\|^2_{H_r^k(K_t)} \leq C_l \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^{(k+2l)} (|\tilde{A}_{n,m}|^2 + |\tilde{B}_{n,m}|^2). \tag{29}$$

Оценим сумму норм решения и полученных выше выражений:

$$\sum_{q=0}^{l} \left\|u_t^{(q)}\right\|^2_{H_r^k(K_t)} \leq C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1+n^2+m^2)^k (|\tilde{A}_{n,m}|^2 + |\tilde{B}_{n,m}|^2) +$$

$$+C_1\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(1+n^2+m^2)^{(k+2)}(|\tilde{A}_{n,m}|^2+|\tilde{B}_{n,m}|^2)+$$

$$+C_2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(1+n^2+m^2)^{(k+4)}(|\tilde{A}_{n,m}|^2+|\tilde{B}_{n,m}|^2)+\ldots+$$

$$+C_l\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(1+n^2+m^2)^{(k+2l)}(|\tilde{A}_{n,m}|^2+|\tilde{B}_{n,m}|^2)\le$$

$$\le M\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(1+n^2+m^2)^{(k+2l)}(|\tilde{A}_{n,m}|^2+|\tilde{B}_{n,m}|^2). \tag{30}$$

Проинтегрируем (30) в пределах от 0 до T:

$$\int_0^T\sum_{q=0}^{l}\left\|u_t^{(q)}\right\|^2_{H_r^k(K_t)}\le MT\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(1+n^2+m^2)^{(k+2l)}(|\tilde{A}_{n,m}|^2+|\tilde{B}_{n,m}|^2). \tag{31}$$

В левой части (31) получили норму функции u во введенном в определении 1 пространстве $H_r^{l,k}(Q_T)$.

$$\|u\|^2_{H_r^{l,k}(Q_T)}=\int_0^T\sum_{q=0}^{l}\left\|u_t^{(q)}\right\|^2_{H_r^k(K_t)}\le MT\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(1+n^2+m^2)^{(k+2l)}(|\tilde{A}_{n,m}|^2+|\tilde{B}_{n,m}|^2).$$

Ниже будем полагать $k=2l$. Введем в рассмотрение пространство $H_r^{l,2l}(Q_T)$.

Нами доказана следующая

Теорема 5. *Для решения $u(r,t,\varphi)$ задачи (4), (5), (6) в цилиндре Q_T выполняется следующая априорная оценка с некоторой константой $C(T)$*

$$\|u\|^2_{H_r^{l,2l}(Q_T)}\le C(T)\,\|u_0\|^2_{H_r^{2l}(K)}\,. \tag{32}$$

Из априорной оценки (32) следует существование, единственность и непрерывная зависимость решения задачи от начальных данных.

Таким образом, показана корректность по Адамару задачи (4), (5), (6) в пространстве $H_r^{l,2l}$.

Замечание 2. Отметим также, что при $t>0$ конечной будет также норма любой производной по t решения u в пространстве $H_r^k(K)$ для любого k. Действительно, применим рассуждения замечания 1 к соотношению (30) и получим, что функция $u_t^{(q)}-$ бесконечно дифференцируемая функция по x. Т.е., решение $u-$ бесконечно дифференцируемая функция по x,t внутри цилиндра Q_T.

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – Т. 2. – М.: Наука, 1974.
2. *Бурский В.П.* Об эквивариантных расширениях дифференциального оператора на примере оператора Лапласа в круге // Укр. матем. журнал. – Т. 51. – 1999. – № 2. – С. 158-169.

3. *Бурский В.П., Штепина Т.В.* О спектре оператора эквивариантной граничной задачи с некоммутативной группой на примере уравнения Пуассона в шаре // Укр.матем.журнал. – Т. 52. – 2000. – № 11. – С. 1473-1483.
4. *Ватсон Г.* Теория бесселевских функций. – Т. 1. – М.: ИЛ, 1949.
5. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.
6. *Кочубей А.Н.* О симметрических операторах, коммутирующих с семейством унитарных операторов // Функциональный анализ и его приложения. – Т. 13. – № 4. – 1979. – С. 77-78.

V. P. Burskii, I. I. Kurakina

General equivariant mixed problem for the heat equation in the circular cylinder.

For the heat equation in the finite cylinder over the unit circle a mixed problem with the initial condition and an arbitrary boundary value problem which is invariant at general rotation is considered. An explicit formula for the solution in a form of Fourier-Dini series is counted, some smooth properties of such solution are studied, an a priori estimates in the positive scale of weight Sobolev spaces are obtained.

Keywords: *heat equation, mixed problem, equivariant boundary value problem.*

В. П. Бурський, І. І. Куракіна

Загальна еквіваріантна мішана задача для рівняння теплопровідності в круговому циліндрі.

Для рівняння теплопровідності в циліндрі над кругом розглянуто мішану задачу із початковою та загальною поворотно-інваріантною граничною умовою. Отримано формулу для розв'язку у вигляді ряду Фур'є-Діні, досліджено гладкі властивості такого розв'язку, отримано апріорну оцінку в шкалі позитивних вагових соболевських просторів.

Ключові слова: *рівняння теплопровідності, мішана задача, еквівалентна гранична задача.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Донецкий национальный ун-т
v30@dn.farlep.net
inna-cin@mail.ru

Получено 01.02.12