

УДК 539.3

©2012. Н. С. Бондаренко, А. С. Гольцев

## ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ТЕПЛОВОЙ АНИЗОТРОПИИ НА ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМ РАЗРЕЗОМ

Решена задача теплопроводности для анизотропной пластины с теплоизолированным разрезом. При этом использована обобщенная теория, основанная на разложении температуры в ряд Фурье по полиномам Лежандра. Исследовано влияние тепловой анизотропии материала пластины и условий теплообмена на величину возмущенного температурного поля, вызванного наличием разреза. Исследовано относительное отклонение между температурой в анизотропной и изотропной пластине. Сделаны обобщающие выводы.

**Ключевые слова:** анизотропная пластина, тепловая анизотропия, теплоизолированный разрез, обобщенная теория, коэффициенты теплопроводности.

**1. Введение.** Тепловые воздействия относятся к основному виду нагрузки, которой подвергаются объекты и изделия современной промышленности. Наличие дефектов типа трещин приводит к значительному снижению несущей способности элементов конструкций. Необходимость учёта различных факторов (условий теплообмена с окружающей средой, тепловой анизотропии материала), влияющих на температурные поля в пластинах и оболочках, обуславливает актуальность статьи.

В работе решена задача теплопроводности для анизотропной (ортотропной и трансверсально-изотропной) пластины, содержащей теплоизолированный разрез. Целью данной работы является исследование влияния тепловой анизотропии материала пластины на величину возмущенного температурного поля, вызванного наличием разреза.

При решении задачи теплопроводности использована обобщенная теория, основанная на разложении температуры в ряд Фурье по полиномам Лежандра [1, 2]. Данный подход позволяет рассматривать не только тонкие пластины, но и пластины средней и большой толщины. Из последних работ, в которых сведение трехмерных задач теплопроводности и термоупругости к двумерным осуществляется в рамках рассматриваемого метода, можно отметить публикации Ю.М. Волчкова [3, 4], В.В. Зозули [5, 6] и монографии М.У. Никабадзе [7, 8].

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим анизотропную (ортотропную или трансверсально-изотропную) пластину толщины  $2h$  в прямоугольной декартовой системе координат  $x, y, z$ . На лицевых поверхностях пластины происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с внешней средой постоянной температуры  $\theta^\pm$  ( $z = \pm h$ ). Пластина имеет теплоизолированный разрез  $L$ .

В качестве исходного взято приближение порядка  $N$  трехмерного уравнения теп-

лопроводности. В преобразованных главных осях

$$X = \frac{x}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad Y = \frac{y}{\sqrt{\lambda_2}}, \quad Z = z, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda_x}{\lambda_z}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_y}{\lambda_z},$$

где  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$  – главные коэффициенты теплопроводности, температура  $T^*$  представляется в виде ряда Фурье по полиномам Лежандра  $P_k$  [1]:

$$T^*(X, Y, Z) = \sum_{k=0}^N T_k^* P_k \left( \frac{Z}{h} \right), \quad T_k^* = \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h T^* P_k \left( \frac{Z}{h} \right) dZ.$$

Коэффициенты разложения удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений в матричной форме [2]:

$$h^2 \Delta \vec{T}^* + A_N \vec{T}^* = -\vec{\theta},$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}, \quad \vec{T}^* = (T_0^*, T_1^*, \dots, T_N^*)^T, \quad A_N = \|A_{km}\|, \quad \vec{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N)^T.$$

Элементы матрицы  $A_N$  и вектора  $\vec{\theta}$  даны в [2]. При этом  $A_{km} = A_{km}(Bi^\pm, N)$ ,  $\theta_k = \theta_k(\theta^\pm, Bi^\pm, N)$ , где  $Bi^\pm$  – критерий Био на лицевых поверхностях  $Z = \pm h$ .

Перейдем в безразмерную систему координат

$$x_1 = \frac{x}{h\sqrt{\lambda_1}}, \quad x_2 = \frac{y}{h\sqrt{\lambda_2}}, \quad x_3 = \frac{z}{h},$$

тогда приближение порядка  $N$  уравнения теплопроводности запишется так

$$\Delta \vec{T}^* + A_N \vec{T}^* = -\vec{\theta}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \quad (1)$$

В случае теплоизолированного разреза теплота не проходит через линию разреза. Поэтому граничные условия на линии разреза  $L$  имеют вид [9]:

$$\left( \frac{\partial \vec{T}^*}{\partial n} \right)^\pm = 0. \quad (2)$$

Здесь и в дальнейшем знаками «+» и «-» обозначены граничные значения функций в соответствии с выбранным направлением нормали  $\vec{n} = (n_1, n_2)$  к линии разреза  $L$ .

Температурное поле в пластине с разрезом представим в виде суммы

$$\vec{T}^* = \vec{T}^o + \vec{T}, \quad (3)$$

где  $\vec{T}^o$  – вектор-столбец из компонент основного температурного поля (температуры в сплошной пластине);  $\vec{T}$  – вектор-столбец из компонент возмущенного температурного поля, вызванного наличием разреза.

Основное температурное поле определяется из системы вида (1), а для определения возмущенного температурного поля имеем такую систему уравнений:

$$\Delta \vec{T} + A_N \vec{T} = 0. \quad (4)$$

Из краевых условий (2) и представлений (3) следуют граничные условия для компонент возмущенного температурного поля на линии разреза  $L$

$$\left( \frac{\partial \vec{T}}{\partial n} \right)^\pm = - \frac{\partial \vec{T}^0}{\partial n} \Big|_L. \quad (5)$$

Предполагаем, что внешний граничный контур пластины находится на значительном удалении от линии разреза  $L$  и возмущенное температурное поле на линии внешней границы считаем равным нулю.

После решения системы уравнений (4) с граничными условиями (5) возмущенная температура в любой точке пластины находится по формуле

$$T = \sum_{k=0}^N T_k P_k(x_3), \quad T_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 T P_k(x_3) dx_3. \quad (6)$$

Таким образом, приближение порядка  $N$  трехмерного уравнения теплопроводности (4) с граничными условиями (5) и требованием убывания возмущенного температурного поля составляют граничную задачу теплопроводности для пластины с теплоизолированным разрезом.

**3. Методика решения.** Методика решения основана на применении двумерного интегрального преобразования Фурье для разрывных функций [10] и методики обращения, использующей специальную  $G$ -функцию [11].

Применяя преобразование Фурье к системе (4), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$(A_N - p^2 E) \vec{T} = \vec{D}, \quad (7)$$

где с учетом граничных условий (5)

$$p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad \vec{D} = (D_0, D_1, \dots, D_N)^T, \quad D_k = \frac{i}{2\pi} \int_L (\xi_1 n_1 + \xi_2 n_2) [T_k] e^{i(\vec{\xi}, \vec{x}')} dL,$$

$[T_k] = T_k^+ - T_k^-$  – скачок компоненты возмущенной температуры  $T_k$  при переходе через линию  $L$ ;  $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$  – координаты текущей точки в пространстве трансформант;  $\vec{x}' = (x'_1, x'_2)$  – координаты точки на линии  $L$ .

СЛАУ (7) решаем по правилу Крамера

$$\tilde{T}_k(\vec{\xi}) = \frac{\Delta_k(\vec{\xi})}{\Delta(p^2)} \quad (k = \overline{0, N}). \quad (8)$$

Здесь  $\Delta(\mu) = \det(A_N - \mu E)$  – характеристический многочлен матрицы  $A_N$ ;  
 $\Delta_k(\vec{\xi})$  – определитель матрицы, получающейся из матрицы  $A_N - p^2 E$  заменой ее  $k$ -го столбца вектором-столбцом  $\vec{D}$ , т.е.:

$$\Delta_k(\vec{\xi}) = \sum_{m=0}^N M_{mk}(p^2) D_m \quad (k = \overline{0, N}), \quad (9)$$

где  $M_{mk}(\mu)$  – алгебраическое дополнение элемента  $m$ -ой строки и  $k$ -го столбца матрицы  $A_N - \mu E$ , причем степень полинома  $M_{mk}(\mu)$  есть

$$\deg M_{mk}(\mu) = \begin{cases} N, & m = k, \\ N - 1, & m \neq k. \end{cases}$$

Трансформанты компонент возмущенной температуры (8) с учетом (9) равны

$$\tilde{T}_k(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_L \sum_{m=0}^N \tilde{B}_{km}[T_m] e^{i(\vec{\xi}, \vec{x}')} dL \quad (k = \overline{0, N}), \quad (10)$$

где

$$\tilde{B}_{km}(\xi_1, \xi_2) = i \frac{M_{mk}(p^2)}{\Delta(p^2)} (\xi_1 n_1 + \xi_2 n_2) \quad (k, m = \overline{0, N}). \quad (11)$$

В работе [2] было доказано, что все характеристические корни матрицы  $A_N$  действительные, отрицательные и имеют кратность не выше двух.

Предположим, что у матрицы  $A_N$  имеется  $s$  ( $0 \leq s \leq (N+1)/2$ ) собственных значений кратности 2. В соответствии с данным предположением характеристический многочлен матрицы  $A_N$  может быть представлен в виде

$$\Delta(p^2) = (-1)^{N+1} \prod_{j=0}^{s-1} (p^2 + \rho_j^2)^2 \prod_{j=s}^{N-s} (p^2 + \rho_j^2), \quad (12)$$

где  $\rho_j^2$  – собственные значения матрицы  $A_N$ , взятые со знаком «-».

Оригиналы компонент температуры  $T_k(x_1, x_2)$  ( $k = \overline{0, N}$ ) найдем с помощью формулы обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье. Имеем

$$B_{km}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}_{km}(\xi_1, \xi_2) e^{-i(\xi_1 \bar{x}_1 + \xi_2 \bar{x}_2)} d\xi_1 d\xi_2 \quad (k, m = \overline{0, N}), \quad (13)$$

где обозначено  $\bar{x}_1 = x_1 - x'_1$ ,  $\bar{x}_2 = x_2 - x'_2$ .

Представим ядра (13) с учетом соотношений (11) в виде:

$$B_{km}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{2}{\pi} \{n_1 \Psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + n_2 \Psi(\bar{x}_2, \bar{x}_1)\}, \quad (14)$$

где

$$\Psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{M_{mk}(p^2)}{\Delta(p^2)} \xi_1 \sin \xi_1 \bar{x}_1 \cos \xi_2 \bar{x}_2 d\xi_1 d\xi_2.$$

Перейдем в интеграле  $\Psi$  к полярным координатам по формулам

$$\bar{x}_1 = r \cos \varphi, \quad \bar{x}_2 = r \sin \varphi, \quad \xi_1 = \rho \cos \theta, \quad \xi_2 = \rho \sin \theta,$$

тогда  $\Psi$  примет вид

$$\Psi = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty \frac{M_{mk}(\rho^2) \rho^2 \cos \theta}{\Delta(\rho^2)} \sin(r\rho \cos \varphi \cos \theta) \cos(r\rho \sin \varphi \sin \theta) d\rho,$$

$$r = \sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}.$$

Применяя разложение Якоби-Ангера [11], найдем

$$\Psi = \frac{\pi}{2} \cos \varphi \int_0^\infty \frac{M_{mk}(\rho^2) \rho^2}{\Delta(\rho^2)} J_1(r\rho) d\rho. \quad (15)$$

Подставляя (15) в выражение для ядер (14), запишем

$$B_{km} = n_0 \int_0^\infty \frac{M_{mk}(\rho^2) \rho^2}{\Delta(\rho^2)} J_1(r\rho) d\rho \quad (k, m = \overline{0, N}), \quad (16)$$

где  $n_0 = n_1 \cos \varphi + n_2 \sin \varphi$ .

Раскладывая рациональные функции, входящие в подынтегральные выражения (16) на сумму простейших дробей с учетом (12), получим

$$\frac{M_{mk}(\rho^2) \rho^2}{\Delta(\rho^2)} = -\delta_{km} + \sum_{j=0}^{N-s} \frac{C_{kmj}}{\rho^2 + \rho_j^2} + \sum_{j=0}^{s-1} \frac{D_{kmj}}{(\rho^2 + \rho_j^2)^2} \quad (k, m = \overline{0, N}), \quad (17)$$

где  $\delta_{km}$  – символ Кронекера; коэффициенты  $C_{kmj}$ ,  $D_{kmj}$  определяются согласно второй теореме разложения Хэвисайда [12].

Подставляя (17) в (16), найдем

$$\begin{aligned} B_{km} = & -n_0 \delta_{km} \int_0^\infty J_1(r\rho) d\rho + n_0 \sum_{j=0}^{N-s} C_{kmj} \int_0^\infty \frac{J_1(r\rho)}{\rho^2 + \rho_j^2} d\rho + \\ & + n_0 \sum_{j=0}^{s-1} D_{kmj} \int_0^\infty \frac{J_1(r\rho)}{(\rho^2 + \rho_j^2)^2} d\rho \quad (k, m = \overline{0, N}). \end{aligned} \quad (18)$$

Значение первого интеграла в правых частях (18) равно  $1/r$  [13]. Используя интегральное представление специальной  $G$ -функции [11] для остальных интегралов, входящих в правые части (18), получим

$$\int_0^{\infty} \frac{J_1(r\rho)}{\rho^2 + \rho_j^2} d\rho = -\frac{r}{2} G_{1,0}(\rho_j r), \quad \int_0^{\infty} \frac{J_1(r\rho)}{(\rho^2 + \rho_j^2)^2} d\rho = \frac{r}{4\rho_j^2} - \left(\frac{r}{2}\right)^3 G_{2,0}(\rho_j r). \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18), получим такие выражения для ядер  $B_{km}$ :

$$B_{km} = -n_0 \left\{ \frac{\delta_{km}}{r} + \frac{r}{2} \sum_{j=0}^{N-s} C_{kmj} G_{1,0}(\rho_j r) + E_{km} r + \left(\frac{r}{2}\right)^3 \sum_{j=0}^{s-1} D_{kmj} G_{2,0}(\rho_j r) \right\} \quad (k, m = \overline{0, N}), \quad E_{km} = -\frac{1}{4} \sum_{j=0}^{s-1} \frac{D_{kmj}}{\rho_j^2}. \quad (20)$$

Таким образом, оригиналы интегральных представлений компонент возмущенного температурного поля (10) имеют вид

$$T_k(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_L \sum_{m=0}^N B_{km}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) [T_m] dL \quad (k = \overline{0, N}). \quad (21)$$

В качестве примера рассмотрим в новой безразмерной системе координат  $y_1 = \sqrt{\lambda_1} x_1$ ,  $y_2 = \sqrt{\lambda_2} x_2$ ,  $y_3 = x_3$  следующий теплоизолированный разрез

$$L_1 = \{(y_1, y_2) \in R^2 : |y_1| \leq l, y_2 = 0\}. \quad (22)$$

Для данного разреза интегральные представления (21) примут вид

$$T_k = \frac{l}{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^N B_{km} \left( \frac{\bar{y}_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{\bar{y}_2}{\sqrt{\lambda_2}} \right) [T_m] d\zeta \quad (k = \overline{0, N}), \quad (23)$$

где  $\bar{y}_1 = l(\psi - \zeta)$ ,  $\bar{y}_2 = y_2$ ,  $l\psi = y_1$ ,  $(l\zeta, 0) \in L_1$ .

В соотношениях (23) согласно (20) ядра записываются так:

$$B_{km} \left( \frac{\bar{y}_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{\bar{y}_2}{\sqrt{\lambda_2}} \right) = -\frac{\delta_{km}}{\sqrt{\lambda_2}} \frac{y_2}{r^2} - \frac{y_2}{2\sqrt{\lambda_2}} \sum_{j=0}^{N-s} C_{kmj} G_{1,0}(\rho_j r) - \frac{E_{km}}{\sqrt{\lambda_2}} y_2 - \frac{y_2 r^2}{8\sqrt{\lambda_2}} \sum_{j=0}^{s-1} D_{kmj} G_{2,0}(\rho_j r) \quad (k, m = \overline{0, N}), \quad r = \sqrt{\frac{l^2}{\lambda_1} (\psi - \zeta)^2 + \frac{y_2^2}{\lambda_2}}.$$

Функции  $T_k$  из (23) должны удовлетворять граничным условиям (5):

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^N \int_{-1}^1 K_{km}(\psi - \zeta) [T_m] d\zeta = -\frac{\partial T_k^o}{\partial y_2} \Big|_{y_2=0}. \quad (24)$$

Ядра  $K_{km}$  найдем, применяя формулу дифференцирования для специальной  $G$ -функции [11]:

$$K_{km}(\psi - \zeta) = l \frac{\partial B_{km}}{\partial y_2} \Big|_{y_2=0} = -\frac{l \delta_{km}}{\sqrt{\lambda_2}} \frac{1}{r^2} - \frac{l}{2\sqrt{\lambda_2}} \sum_{j=0}^{N-s} C_{kmj} G_{1,0}(\rho_j r) -$$

$$-\frac{l E_{km}}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{l r^2}{8\sqrt{\lambda_2}} \sum_{j=0}^{s-1} D_{kmj} G_{2,0}(\rho_j r), \quad r = \frac{l}{\sqrt{\lambda_1}} |\psi - \zeta|.$$

Применим к интегралам, входящим в левые части (24), формулу интегрирования по частям, полагая при этом  $u = [T_m]$ ,  $dv = K_{km}(\psi - \zeta) d\zeta$ , и учтем свойство скачков компонент возмущенной температуры

$$[T_m]|_{\pm 1} = 0 \quad (m = \overline{0, N}), \quad (25)$$

которое следует из непрерывности температуры на концах разреза  $L_1$ . Тогда система интегральных уравнений (24) примет вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_k(\zeta)}{\zeta - \psi} d\zeta + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^N \int_{-1}^1 L_{km}(\psi - \zeta) \Phi_m(\zeta) d\zeta = F_k(\psi) \quad (k = \overline{0, N}), \quad (26)$$

где

$$L_{km}(\psi - \zeta) = -\frac{l^2}{2\lambda_1} \sum_{j=0}^{N-s} C_{kmj} \int_0^\zeta G_{1,0} \left( \frac{\rho_j l}{\sqrt{\lambda_1}} |\psi - t| \right) dt - \frac{l^2 E_{km}}{\lambda_1} -$$

$$-\frac{l^4}{8\lambda_1^2} \sum_{j=0}^{s-1} D_{kmj} \int_0^\zeta (\psi - t)^2 G_{2,0} \left( \frac{\rho_j l}{\sqrt{\lambda_1}} |\psi - t| \right) dt \quad (k, m = \overline{0, N}),$$

$$\Phi_k(\zeta) = \frac{d[T_k]}{d\zeta}, \quad F_k(\psi) = \frac{l\sqrt{\lambda_2}}{\lambda_1} \frac{\partial T_k^o}{\partial y_2} \Big|_{y_2=0} \quad (k = \overline{0, N}).$$

Система (26) состоит из  $(N + 1)$ -го сингулярного интегрального уравнения типа Коши относительно  $(N + 1)$ -й неизвестной функции  $\Phi_m(\zeta)$  при дополнительных условиях, которые следуют из (25):

$$\int_{-1}^1 \Phi_m(\zeta) d\zeta = 0 \quad (m = \overline{0, N}). \quad (27)$$

Данную систему можно решить методом Мультишпа [14].

После решения системы (26) с условиями (27) возмущенное температурное поле в любой точке пластины может быть найдено с помощью интегральных представлений (23) и ряда Фурье по полиномам Лежандра для температуры (6).

**4. Анализ кратности собственных значений матрицы  $A_N$ .** Исследуем, при каких значениях параметров теплообмена  $Bi^\pm$  существуют кратные собственные значения матрицы  $A_N$ . При этом будем рассматривать приближения порядка  $N = 1, 2, 3$  трехмерного уравнения теплопроводности, поскольку в работе [2] показано, что использование третьего приближения обеспечивает достаточную точность расчетов. Приближение  $N = 0$  не рассматривается, поскольку в этом случае у матрицы  $A_0$  есть единственное собственное значение.

Дискриминант  $D(\Delta)$  характеристического многочлена  $\Delta(\mu)$  матрицы  $A_N$  есть произведение [15]

$$D(\Delta) = \prod_{0 \leq j < i \leq N} (\rho_j^2 - \rho_i^2)^2.$$

Дискриминант равен нулю тогда и только тогда, когда многочлен  $\Delta(\mu)$  имеет кратные корни.

Дискриминанты характеристических многочленов при  $N = \overline{1, 3}$  выражаются через коэффициенты этих многочленов по известным формулам [15] и имеют вид:

$$D(\Delta|_{N=k}) = R_k(Bi^+, Bi^-) \quad (k = \overline{1, 3}).$$

Здесь  $R_k(Bi^+, Bi^-)$  ( $k = \overline{1, 3}$ ) – рациональные функции, непрерывные в области

$$\Omega = \{(Bi^+, Bi^-) \in R^2 : Bi^+ \geq 0, Bi^- \geq 0\},$$

в которой критерий Био имеет физический смысл.

Средствами пакета Maple было показано, что функции  $R_k$  ( $k = \overline{1, 3}$ ) возрастают по обоим переменным во всей области  $\Omega$ . При этом

$$\min_{\Omega} R_k(Bi^+, Bi^-) = R_k(0, 0) > 0 \quad (k = \overline{1, 3}).$$

Отсюда видно, что дискриминант характеристического многочлена матрицы  $A_N$  не обращается в нуль в области  $\Omega$ . Таким образом, при проведении практических расчетов достаточно ограничиться рассмотрением случая простых собственных значений матрицы  $A_N$ .

**5. Анализ результатов численных исследований.** В качестве примера рассчитано возмущенное температурное поле в пластине с теплоизолированным разрезом (22) при  $l = 1$ . Использована безразмерная система координат  $y_1 = x/h$ ,  $y_2 = y/h$ ,  $y_3 = z/h$ , определенная с точностью до полутолщины пластины  $h$ .

В качестве исходного бралось приближение  $N = 3$  трехмерного уравнения теплопроводности. Основное температурное поле предполагалось таким, что через линию разреза  $L_1$  проходит однородный тепловой поток, т.е.

$$\left. \frac{\partial T_0^o}{\partial y_2} \right|_{L_1} = 1^\circ C, \quad \left. \frac{\partial T_k^o}{\partial y_2} \right|_{L_1} = 0 \quad (k = \overline{1, 3}).$$

Теплообмен с окружающей средой на лицевых поверхностях пластины предполагался либо верхним односторонним:

$$Bi^+ = 1, \quad Bi^- = 0, \quad (28)$$

либо симметричным:

$$Bi^+ = Bi^- = 1. \quad (29)$$

На рис. 1 показано изменение температуры по толщине пластины в точке  $y_1 = y_2 = 0,5$ . На рис. 1, а параметры теплообмена имеют вид (28), а на рис. 1, б – (29). На рис. 1 рассмотрено три вида материала пластины:

1. изотропный ( $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ) – пунктирные линии;
2. трансверсально-изотропный ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda^* \neq 1$ , где  $\lambda^*$  – параметр относительной теплопроводности в плоскости изотропии) – штриховые линии ( $\lambda_x = \lambda_y \neq \lambda_z$ );
3. ортотропный ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) – сплошные линии.

Исследования проведены для значений относительных коэффициентов теплопроводности в плоскости изотропии  $\lambda_1, \lambda_2$ , которые близки к реальным, приведенным в монографии [16].

Кривые 1, 2 отвечают значениям  $\lambda^* = 1/2$  и  $\lambda^* = 2$ , соответственно; кривые 3 соответствуют случаю  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1/2$ ; кривые 4 – случаю  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ .

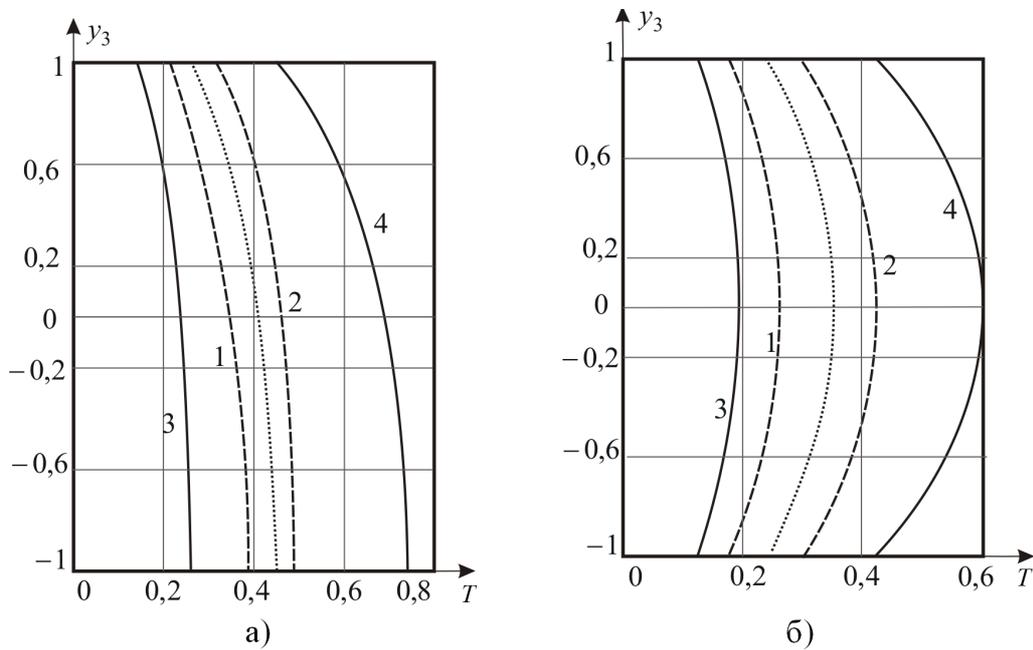


Рис. 1. Изменение температуры по толщине пластины

Из рис. 1 видно, что в трансверсально-изотропной пластине с увеличением параметра относительной теплопроводности в плоскости изотропии  $\lambda^*$  температура возрастает. В ортотропной пластине с ростом параметра  $\lambda_1$  при неизменном значении  $\lambda_2$  температура уменьшается, а с возрастанием  $\lambda_2$  при постоянном  $\lambda_1$  – увеличивается.

На рис. 2 показаны графики температуры в ортотропной пластине ( $\lambda_1 = 1$ ) при непрерывном изменении параметра  $\lambda_2$ . Температура рассчитывалась в точке  $A(0, 5; 0, 5; 1)$  верхней лицевой поверхности (кривые 1), в точке  $B(0, 5; 0, 5; 0)$  сре-

динной плоскости (кривые 2) и в точке  $C(0, 5; 0, 5; -1)$  нижней лицевой поверхности пластины (кривые 3).

Сплошными линиями показаны графики температуры при теплообмене (28); пунктирными линиями – графики температуры при теплообмене (29).

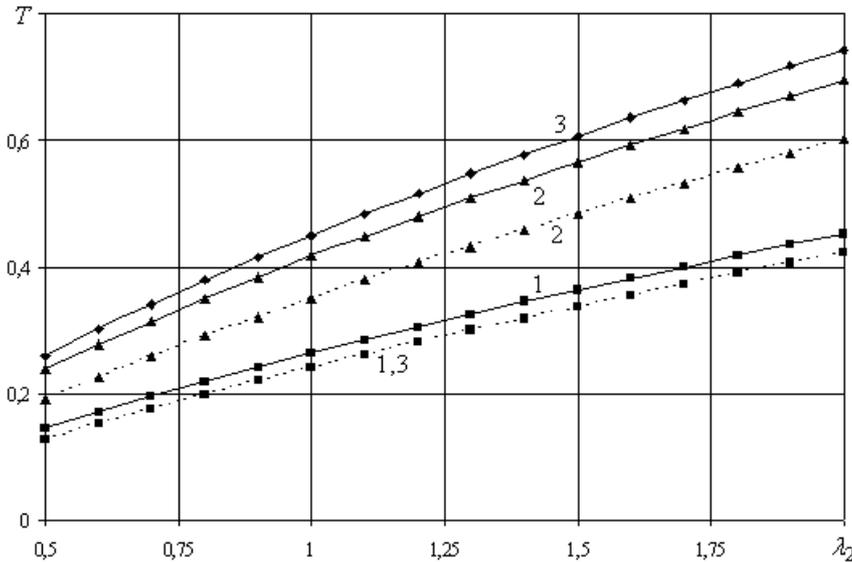


Рис. 2. Изменение температуры в ортотропной пластине в зависимости от  $\lambda_2$

Из рис. 2 видно, что характер теплообмена с окружающей средой существенно влияет на величину температурного поля анизотропной пластины. При одинаковых значениях критерия Био  $Bi^+$  температура в случае симметричного теплообмена ниже, чем в случае верхнего одностороннего теплообмена. Графики на рис. 2 подтверждают ранее сделанный вывод о том, что с ростом параметра  $\lambda_2$  при неизменном  $\lambda_1$  температура увеличивается.

На рис. 3 показаны графики относительных отклонений  $\delta$  (%) температуры в анизотропной пластине от температуры в изотропной пластине в зависимости от изменения относительного коэффициента теплопроводности  $\lambda_2$  при  $\lambda_1 = 1$ .

На рис. 3 приведены такие относительные отклонения:

- при теплообмене (28):  $\delta^+ = \delta|_A$ ,  $\delta^{cp} = \delta|_B$ ,  $\delta^- = \delta|_C$ ;
- при теплообмене (29):  $\delta_{симм.}^{\pm} = \delta|_A = \delta|_C$ ,  $\delta_{симм.}^{cp} = \delta|_B$ .

Приведенные на рис. 3 графики относительных отклонений позволяют сделать вывод, что разница в значениях температур в анизотропной и изотропной пластинах может достигать 80% при существенной тепловой анизотропии материала пластины ( $\lambda_2 = 2\lambda_1$ ).

**6. Выводы.** Проведенные исследования позволяют заключить, что анизотропия тепловых свойств материалов существенно влияет на величину возмущенного температурного поля в пластинах с дефектами типа трещин, что приведет к аналогичной зависимости для температурных коэффициентов интенсивности напряже-

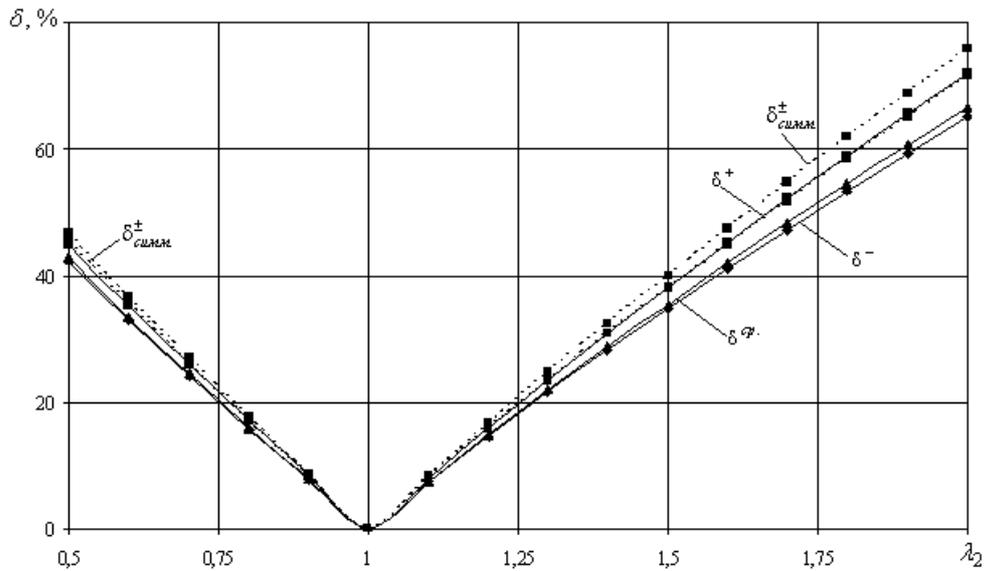


Рис. 3. Относительные отклонения температуры в анизотропной пластине

ний. Игнорирование анизотропных тепловых свойств материалов может привести к значительным погрешностям при проведении прочностных расчетов.

1. Пелех Б.Л. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек / Б.Л. Пелех, М.А. Сухорольский. – К.: Наук. думка, 1980. – 216 с.
2. Bondarenko N.S. Solution of the heat conduction problem for anisotropic plates under concentrated thermal loading using legendre polynomials / N.S. Bondarenko, A.S. Gol'tsev // Journal of Mathematical Sciences. – 2011. – Vol. 174, No. 3. – P. 400-414.
3. Волчков Ю.М. Решение контактных задач на основе уточненной теории пластин и оболочек / Ю.М. Волчков, Д.В. Важева // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, № 5. – С. 169-176.
4. Волчков Ю.М. Сведение трехмерной задачи теории упругости к двумерной на основе аппроксимации напряжений и смещений полиномами Лежандра / Ю.М. Волчков, Л.А. Дергилева // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т. 48, № 3. – С. 179-190.
5. Zozulya V.V. Laminated shells with debonding between laminas in temperature field / V.V. Zozulya // Прикладная механика. – 2006. – Т. 42, № 7. – С. 135-141.
6. Zozulya V.V. Nonperfect contact of laminated shells with considering debonding between laminas in temperature field / V.V. Zozulya // Теоретическая и прикладная механика. – 2006. – Вып. 42. – С. 92-97.
7. Никабадзе М.У. Применение систем ортогональных полиномов при математическом моделировании упругих плоских тонких тел / М.У. Никабадзе. – М.: МГУ. – 2008. – 44 с.
8. Никабадзе М.У. Применение систем полиномов Лежандра и Чебышева при моделировании упругих тонких тел с одним малым размером / М.У. Никабадзе. – М.: МГУ. – 2008. – 287 с.
9. Кит Г.С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г.С. Кит, М.Г. Кривцун. – К.: Наук. думка. – 1984. – 280 с.
10. Шевченко В.П. Задачи термоупругости тонких оболочек с разрезами: учебное пособие / В.П. Шевченко, А.С. Гольцев. – К.: УМК ВО. – 1988. – 84 с.
11. Хижняк В.К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: учебное пособие // В.К. Хижняк, В.П. Шевченко. – Донецк: ДонГУ. – 1980. – 128 с.

12. Шостак Р.Я. Операционное исчисление / Р.Я. Шостак.– М.: Высшая школа. – 1972. – 192 с.
13. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев.– М.: Наука. – 1983. – 752 с.
14. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости / А.И. Каландия. – М.: Наука, 1973. – 304 с.
15. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
16. Космодамианский А.С. Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров. – К.; Донецк: Вища школа. – 1983. – 160 с.

**N. S. Bondarenko, A. S. Gol'tsev**

**Estimation of influence of thermal anisotropy on the temperature field in an anisotropic plate with thermally insulated cut.**

The heat conduction problem for an anisotropic plate with thermally insulated cut is solved. At the same time a generalized theory based on the expansion of temperature in a Fourier series by Legendre polynomials is used. The influence of the thermal anisotropy of the plate material and heat exchange conditions on the value of the perturbed temperature field caused by the presence of the cut is investigated. The relative deviation between the temperature in the anisotropic and isotropic plate is also investigated. General conclusions are made.

**Keywords:** *anisotropic plate, thermal anisotropy, thermally insulated cut, generalized theory, coefficients of thermal conductivity.*

**Н. С. Бондаренко, А. С. Гольцев**

**Оцінка впливу теплової анізотропії на температурне поле в анізотропній пластині з теплоізолюваним розрізом.**

Розв'язано задачу теплопровідності для анізотропної пластини з теплоізолюваним розрізом. При цьому використано узагальнену теорію, що ґрунтується на розвиненні температури в ряд Фур'є за поліномами Лежандра. Досліджено вплив теплової анізотропії матеріалу пластини й умов теплообміну на величину збуреного температурного поля, викликаного наявністю розрізу. Досліджено відносне відхилення між температурою в анізотропній та ізотропній пластині. Зроблено узагальнюючі висновки.

**Ключові слова:** *анізотропна пластина, тепла анізотропія, теплоізолюваний розріз, узагальнена теорія, коефіцієнти теплопровідності.*

Донецкий национальный ун-т  
bondarenko\_n\_s@mail.ru  
a.goltsev@i.ua

Получено 27.12.11